離散はり要素を用いたすきま内で発生する シートフラッタの非線形解析*

呉 小 山^{*1}, 金 子 成 彦^{*2}

Nonlinear Analysis of Leakage Flow Induced Sheet Flutter Using Discretized Beam Elements

Xiaoshan WU and Shigehiko KANEKO^{*3}

^{*3} Department of Mechanical Engineering, The University of Tokyo,
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656 Japan

It is known that flutter of a traveling sheet may occur during its manufacturing process under the influence of leakage flow between the traveling sheet and a guide. In order to avoid the quality defectiveness like wrinkle due to the unsteady phenomenon happening on the sheet, a nonlinear stability analysis of sheet subjected to a leakage flow are performed to study the behavior of sheet in this paper. Concretely, sheet is described as a model consisting of mass less beam elements, springs and discrete mass particles, in which the mass of each particle and spring coefficients are calculated based on the beam model. During the formulation of fluid dynamic forces, nonlinear terms are taken into account for simulation of large-amplitude vibration of sheet, showing the appearance of limit cycle vibration in high flow velocity.

Key Words: Flutter, Flow Induced Vibration, Nonlinear Vibration, Leakage Flow, Discretized Beam Element

1. 結 論

紙やフィルムなどシート類の製造機械や印刷機械では、高速搬送されているシート周辺流れの影響でシートにフラッタやダイバージェンが発生することがあり、それによって生じた品質不良を防ぐため、流れの中に置かれたシートの安定性解析は多くの研究者によって行われている⁽¹⁾⁽²⁾。一方、現実にはシート周辺の流れはガイドやカバーなど隣接する境界に影響されているため、流れは狭いすきま流路を流れている場合が多い⁽³⁾。

そこで、著者ら⁽⁴⁾は、吉田⁽⁵⁾のばね-質量はりモデルを拡張し、すきま流路に置かれたシートを集中質量と回転ばねによってモデル化し、それぞれのシート要素に作用する流体力を求めたうえ、固有値問題に帰着させ、安定性解析を行うことの可能な手法の提案を行った。この方法は微小要素入口の変動流量を新たな変数とすることに特徴があり、繰返し計算の手数がかからず、短い計算時間で固有値をもとめることが可能と

なり、この手法を用いてシートのフラッタ挙動を予測できることを明らかにした。

しかしながら、従来のシートフラッタに関する研究はすべてシートの微小振動に注目したものであり、臨界流速以上でのシートの非線形空力挙動に関する研究はまだ行われていない。一方、狭いすきま流路を流れる流体に起因する流体構造連成問題の非線形解析の例として、Antunes⁽⁶⁾は、軸および軸受の間にあるすきま流れによって支持されている軸のダイナミクスに注目し、レイノルズ方程式を簡略化することより、流体・構造系の連成運動方程式を立て、その後、運動方程式を線形化し、各パラメータが軸の安定性に及ぼす影響を詳しく調べた。さらに、軸が大振幅振動するとき、流体力の非線形効果を考慮に入れ、系の時刻歴挙動を求め、臨界流速以上での非線形解析の必要性を論じた。

そこで、本研究では、離散はり要素手法を用いてすきま流れ内に置かれたシートの大振幅振動に関して非線形解析を行い、自励振動が発生した後の挙動について解析を行った。まず、非線形流体力を求め、構造流体系の連成運動方程式に流体力の非線形性を考慮して解析を行った。

* 原稿受付 2003年1月20日。

^{*1} 東京大学大学院工学系研究科院生 (〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1)。

^{*2} 正員、東京大学大学院工学系研究科。

E-mail: kaneko@mech.t.u.-tokyo.ac.jp

2. 主 な 記 号

- b : 紙および流路の幅
 c_i : i 番めと $i+1$ 番めの要素間の減衰器の減衰係数
 C_0 : 積分定数
 E : シートの縦弾性係数
 F_i : i 番めの集中質量に加わる流体力
 h, h_0 : すきま幅, シートが変形していないときのすきま幅
 h_{ci} : i 番め要素中心点 c から下側壁面までの距離
 I : シートの断面二次モーメント $=bt_s^3/12$
 k_i : i 番めと $i+1$ 番め要素をつなぐ回転ばねのばね定数
 L : シートの全長
 l : 単一シート要素の長さ
 m_i : i 番めシート要素の質量
 n : 要素数
 P : 圧力
 P_a, P_b : 点 A, B での圧力
 P_{in}, P_{ex} : 入口, 出口での圧力
 Q : 流量
 t : 時間
 t_s : 紙の厚さ
 V_{air} : すきま流路内流体の定常平均流速
 x : x 方向距離
 z : z 方向距離
 ϕ_i : i 番めシート要素が水平面となす角度
 λ : 壁面摩擦係数
 ν : 動粘度係数
 ρ : 流体密度
 ρ_m : シートの単位長さ当たりの質量
 ξ_a, ξ_b : 点 A, B での圧力損失係数

Fig. 1 Objective of analysis

Fig. 2 Modeling of sheet

ξ_{in}, ξ_{ex} : 入口, 出口での圧力損失係数

3. 構造系の定式化

解析対象は図1に示しているすきま流路に置かれた片持シートである。すきま流路左端 A と右端 B の圧力差 ($P_a - P_b$) によって、空気流れはシートの固定端から流れ込み、平均流速 V_{air} で上側流路および下側流路を通る。空気流れの影響でシートの上下表面に作用する流体圧力が時間的に変動し、シートにフラッタを引き起こす。以下では、シートは図2のように、 n 組の回転ばね、回転減衰器および集中質量からなる離散化されたはりとしてモデル化する。なお、各パラメータの値ははりのモデルに基づいて求める。ここで、 l_i 、 ϕ_i はそれぞれ i 番め要素の長さおよび要素が水平面となす角度であり、計算上の簡便さのため $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$ (一定) とした。

i 番めの集中質量 m_i および二つの隣接するシート要素をつなぐ回転ばねのばね定数 k_i は、はりのモデルに基づいて次式で定義される。

$$m_i = \rho_m (l_i + l_{i+1}) / 2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$k_i = 2EI / (l_i + l_{i+1}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

また、シートに作用する減衰モーメントは、隣接要素の回転角速度の差に比例するものと仮定する。つまり、

$$M_{ci} = -c_i (\dot{\phi}_{i+1} - \dot{\phi}_i) \quad \dots\dots\dots (3)$$

また、幾何学的な関係から i 番めの集中質量の位置 (x_i, z_i) は $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ で表すことができる。このとき Lagrange 関数は

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{k_i}{2} (\phi_{i+1} - \phi_i)^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。さらに、Lagrange 方程式は次のようである。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_i} + \frac{\partial R}{\partial \phi_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで R は構造減衰を表す Rayleigh の散逸関数であり、次の式で定義される。

$$R = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} c_i (\dot{\phi}_{i+1} - \dot{\phi}_i)^2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(1)から式(4)までを Lagrange 方程式に代入して線形化すれば、次の運動方程式が得られる。

$$[J_M]\{\ddot{\phi}\} + [C_M]\{\dot{\phi}\} + [K_M]\{\phi\} = \{Q_z\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $\{Q_z\}$ はシートに作用する流体から受ける圧力による一般化外力である。なお、式(7)中のベクトルと係数マトリックスの要素は以下に示すとおりである。

$$\{\ddot{\phi}\} = \{\ddot{\phi}_1 \ \ddot{\phi}_2 \ \dots \ \ddot{\phi}_n\}^T, \quad \{\dot{\phi}\} = \{\dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2 \ \dots \ \dot{\phi}_n\}^T$$

$\{\phi\} = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_n\}^T$, $\{Q_z\} = \{Q_{z1} \ Q_{z2} \ \cdots \ Q_{zn}\}^T$
 $[J_M]$ は $n \times n$ の対称行列で, $[C_M]$, $[K_M]$ はそれぞれ
 $n \times n$ の三重対角行列である.

4. 流体力の計算

3章では, シートを回転ばねと減衰器でつながる離散化されたはり要素のモデルとみなし, Lagrange 方程式から線形化された運動方程式を得た. すきま流路の幅に対してシート振動振幅が同じオーダーとなるような大振幅時には, 流体圧力に非線形特有の現象が現れるため, 流体力の非線形解析が必要である.

4.1 すきま流の基礎式 流体力を求めるため, すきま流の基礎式を適用した. 図3に示されるように, 二つの壁で挟まれるすきま幅 h , 幅 l のすきま流路内の粘性, 非圧縮流れについて考える. 入口直前, 直後と出口直前, 直後の圧力をそれぞれ P_{in} , $P(-l/2)$, $P(l/2)$, P_{out} であると記す. 連続の式と Navier-Stokes 方程式から, 以下のようなすきま流れの連続の式と運動方程式を導出できる⁽⁷⁾.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \cdots \cdots (8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{h} \right) = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\lambda}{4} \frac{Q^2}{h^2} \quad \cdots \cdots (9)$$

ただし, λ は壁面摩擦係数で, レイノルズ数 $Re = |Q|/\nu$ の関数となる. 層流の場合には $\lambda = 48/Re$, 乱流の場合には, $\lambda = 0.28/Re^{1/4}$ である.

また, 流路の入口と出口の境界条件は次式で与えられる.

$$P(-l/2) = P_{in} - \xi_{in} \frac{\rho}{2} \frac{Q^2(-l/2)}{h^2(-l/2)} \quad \cdots \cdots (10)$$

Fig. 3 Geometry of leakage flow

Fig. 4 Motion of an element

$$P(l/2) = P_{ex} - \xi_{ex} \frac{\rho}{2} \frac{Q^2(l/2)}{h^2(l/2)} \quad \cdots \cdots (11)$$

ただし, ξ_{in} と ξ_{ex} の値は入口と出口の形状によって決まるが, 本計算では, 入口と出口の段付が滑らかに変化すると仮定し, $\xi_{in} = 1$ (動圧損失を含む), $\xi_{ex} = 0$ として計算する.

4.2 下側流路から要素に作用する流体力 図4に示すような i 番め要素の下側流路内の流れを解析対象とする. すきま流路の中心線から右向き方向を x 軸の正方向とし, 要素中心点 c を通る上向き方向を z 軸の正方向とする. 下側流路のすきま幅は, 中心点 c から下壁面までの距離 h_c と要素の傾き角度 ϕ_i を用いて次式のように表すことができる.

$$h_i^L(x, t) = h_{ci}(t) + x \tan \phi_i(t) \quad \cdots \cdots (12)$$

ここで, 上付添字 L と下付添字 i はそれぞれ下側流路と i 番め要素を表す.

次に, 式(8), (9)を i 番め要素の下側流路に適用する. 式(12)を式(8)に代入して x に関して積分すると, 下側流路の流量は次のようになる.

$$Q_i^L(x, t) = -\dot{h}_{ci}x - \frac{x^2}{2} \dot{\phi}_i \sec^2 \phi_i + C_{\dot{h}_i}^L(t), \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad \cdots \cdots (13)$$

ただし, $C_{\dot{h}_i}^L(t)$ は積分定数であり, 時間の関数である.

式(12), (13)を式(9)に代入して計算すると, 流れの圧力こう配は次のようになる.

$$\frac{\partial P_i^L(x, t)}{\partial x} = W_i^L(x, t) - \frac{\rho}{h_i^L} \dot{C}_{\dot{h}_i}^L(t), \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad \cdots \cdots (14)$$

ただし,

$$W_i^L(x, t) = \frac{\rho \ddot{h}_{ci}}{h_i^L} x + \frac{\rho}{2 h_i^L} x^2 \ddot{\phi}_i \sec^2 \phi_i + \frac{\rho}{h_i^L} x^2 \dot{\phi}_i^2 \tan \phi_i \sec^2 \phi_i + \frac{2 \rho Q_i^L \dot{h}_{ci}}{h_i^{L^2}} + \frac{2 \rho Q_i^L}{h_i^{L^2}} \times x \dot{\phi}_i \sec^2 \phi_i + \frac{\rho Q_i^{L^2}}{h_i^{L^3}} \tan \phi_i - \frac{\lambda \rho}{4 h_i^{L^3}} Q_i^L |Q_i^L| \quad \cdots \cdots (15)$$

である.

以上のことから, x 方向圧力こう配は中心点 c の並進方向の加速度, 速度, 変位および要素の回転方向の角加速度, 角速度, 角変位, 流量からなる非線形関数で記述されることがわかった.

4.3 境界条件 図5のように, i 番め要素と $i-1$ 番め要素の隣接部分では, 流体圧力と流量が連続しなければならないので, 次の式が成り立つ.

$$P_{i-1}^L(l/2, t) = P_i^L(-l/2, t), \quad (i=2, 3, \cdots, n) \quad \cdots \cdots (16)$$

$$Q_{i-1}^L(l/2, t) = Q_i^L(-l/2, t), \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (17)$$

また、図1に示すような下側流路の左端と右端の境界条件は、式(10)、(11)と同様に、次のように書くことができる。

$$P_1^L\left(-\frac{l}{2}\right) = P_a - \xi_a^L \frac{\rho}{2} \frac{Q_1^L\left(-\frac{l}{2}, t\right)^2}{h_1^L\left(-\frac{l}{2}, t\right)^2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$P_n^L\left(\frac{l}{2}\right) = P_b - \xi_b^L \frac{\rho}{2} \frac{Q_n^L\left(\frac{l}{2}, t\right)^2}{h_n^L\left(\frac{l}{2}, t\right)^2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 ξ_a^L, ξ_b^L はそれぞれ図1のAとBでの圧力損失係数である。計算上では、Aでの圧力がBでの圧力より高いと仮定しているが、シートが大変形するときには逆流が生じる可能性があるので、 ξ_a^L と ξ_b^L の値は次のように、流れの方向によって決まる。

$$\begin{cases} Q_1^L\left(-\frac{l}{2}\right) < 0 & (\text{Aが出口のとき}) & \xi_a^L = \xi_{\text{ex}} \\ Q_1^L\left(-\frac{l}{2}\right) \geq 0 & (\text{Aが入口のとき}) & \xi_a^L = \xi_{\text{in}} \\ Q_n^L\left(\frac{l}{2}\right) \leq 0 & (\text{Bが入口のとき}) & \xi_b^L = \xi_{\text{in}} \\ Q_n^L\left(\frac{l}{2}\right) > 0 & (\text{Bが出口のとき}) & \xi_b^L = \xi_{\text{ex}} \end{cases}$$

4・4 積分定数の求め方 式(13)に現れる積分定数 $C_{bi}^L(t)$ は未知の値であり、境界条件を利用して決定することができる。

圧力の連続の条件式(16)より、流路全体については、出口直前の圧力 $P_n^L(l/2, t)$ と入口直後の圧力 $P_1^L(-l/2, t)$ の差は、各流路要素での圧力降下の総和であることから、

$$\sum_{i=1}^n \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial P_i^L(x, t)}{\partial x} dx = P_n^L\left(\frac{l}{2}, t\right) - P_1^L\left(-\frac{l}{2}, t\right) \quad \dots\dots\dots (20)$$

である。式(14)を式(20)に代入すると、

$$\sum_{i=1}^n \left(\dot{C}_{bi}^L(t) \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\rho}{h_i} dx \right) = \sum_{i=1}^n \left(\int_{-l/2}^{l/2} W_i^L(x, t) dx \right)$$

Fig. 5 Continuity conditions between two elements

$$+ P_1^L\left(-\frac{l}{2}\right) - P_n^L\left(\frac{l}{2}\right) \quad \dots\dots\dots (21)$$

が得られる。

また、式(13)と式(17)をそれぞれ時間に関して微分すると、

$$\frac{\partial Q_i^L(x, t)}{\partial t} = U_i^L(x, t) + \dot{C}_{bi}^L(t) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{\partial Q_{i-1}^L(l/2, t)}{\partial t} = \frac{\partial Q_i^L(-l/2, t)}{\partial t}, \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (23)$$

が得られる。ただし、

$$U_i^L(x, t) = -\ddot{h}_{ci}x - \frac{x^2}{2} \ddot{\phi}_i \sec^2 \phi_i - x^2 \dot{\phi}_i^2 \sec^2 \phi_i \tan \phi_i$$

である。式(22)を式(23)に代入すれば、次式を得る。

$$U_{i-1}^L\left(\frac{l}{2}, t\right) + \dot{C}_{bi-1}^L(t) = U_i^L\left(-\frac{l}{2}, t\right) + \dot{C}_{bi}^L(t), \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (24)$$

式(21)と式(24)を連立させ、行列の形で表すと、次のようになる。

$$[A_1] \{\dot{C}_{bi}^L(t)\} = \{A_2\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし、 $[A_1]$ は $n \times n$ の行列、 $\{A_2\}$ は $1 \times n$ のベクトルで(付録参照)。

$$\{\dot{C}_{bi}^L(t)\} = \{\dot{C}_{b1}^L(t) \quad \dot{C}_{b2}^L(t) \quad \dots \quad \dot{C}_{bn}^L(t)\}^T$$

である。なお、付録の中の行列 $[A_1], \{A_2\}$ に現れる積分は、数値積分によって求められる。

式(25)に含まれた入口直後の圧力 $P_1^L(-l/2)$ と出口直前の圧力 $P_n^L(l/2)$ は式(18)と式(19)によって求められる。式(25)から、

$$\{\dot{C}_{bi}^L(t)\} = [A_1]^{-1} \cdot \{A_2\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

が得られる。

4・5 流体力の計算 圧力の連続の条件より、下側流路から i 番め要素に作用する圧力の分布は、入口直後の圧力、1番め要素から $i-1$ 番め要素までの圧力差、と i 番め要素入口から x までの圧力差の総和である。つまり、

$$P_i^L(x, t) = P_1^L\left(-\frac{l}{2}, t\right) + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial P_j^L(x, t)}{\partial x} dx + \int_{-l/2}^x \frac{\partial P_i^L(x, t)}{\partial x} dx \quad \dots\dots\dots (27)$$

である。これを行列の形で書くと、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} P_1^L(x, t) \\ P_2^L(x, t) \\ \vdots \\ P_n^L(x, t) \end{Bmatrix} = [A_3] \begin{Bmatrix} P_1^L\left(-\frac{l}{2}, t\right) \\ \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial P_1^L(x, t)}{\partial x} dx \\ \vdots \\ \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial P_{n-1}^L(x, t)}{\partial x} dx \end{Bmatrix}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{c} \int_{-l/2}^x \frac{\partial P_1^L(x, t)}{\partial x} dx \\ \int_{-l/2}^x \frac{\partial P_2^L(x, t)}{\partial x} dx \\ \vdots \\ \int_{-l/2}^x \frac{\partial P_n^L(x, t)}{\partial x} dx \end{array} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここで $[A_3]$ は $n \times n$ の行列である (付録参照)。

以下では流体圧力から流体力を計算する。図 6 に示すように、下端流路の流れから第 i 番め要素に作用する圧力 $P_i^L(x, t)$ の総和は、要素両端に作用する力 f_{i-} と f_{i+} を発生させ、これらは要素に作用するモーメントの釣合いから求められる。集中質量 m_i に作用する流体力 F_i^L は、 i 番め要素に作用する圧力によって発生した力 f_{i+} と、 $i+1$ 番め要素に作用する圧力によって発生した力 $f_{(i+1)-}$ の重ね合わせ結果である。各集中質量に作用する流体力を求めれば、

$$\{F^L\} = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \{P^L(x, t)\} \left(\frac{l}{2} + x \right) dx + \frac{1}{l} [A_4] \int_{-l/2}^{l/2} \{P^L(x, t)\} \left(\frac{l}{2} - x \right) dx \dots\dots (29)$$

が得られる。ただし、 $[A_4]$ は $n \times n$ の行列であり (付録参照)。

$$\{F^L\} = \{F_1^L \ F_2^L \ \dots \ F_n^L\}^T$$

$$\{P^L(x, t)\} = \{P_1^L(x, t) \ P_2^L(x, t) \ \dots \ P_n^L(x, t)\}^T$$

である。

上述と同じような手続きによって、上側流路の流れからシートに作用する流体力ベクトル $\{F^U\} = \{F_1^U \ F_2^U \ \dots \ F_n^U\}^T$ を求めることができる。Lagrange 方程式の一般化外力

$$Q_j = \sum_i F_i \cdot \frac{\partial z_i}{\partial \phi_j}$$

から、式 (7) に現れた一般化外力 $\{Q_z\}$ は次のように計算することができる。

$$\{Q_z\} = [A_5] (\{F^L\} + \{F^U\}) \dots\dots\dots (30)$$

ただし $[A_5]$ は $n \times n$ の行列である (付録参照)。

4.6 計算手順

以上に述べた式 (7)、(13)、(14)、(18)、(19)、(26)、(28)～(30) を連成させることにより、時刻 $t=t_0$ の系の状態がわかれば、時刻 $t=t_0 + \Delta t$ のときの系の状態を求めることができる。こ

Fig. 6 Fluid force acting on each particle

では Newmark- β 法を利用して計算を行った。また、式 (26)、(28) と式 (29) に現れた数値積分は、台形公式を利用した。

5. 非線形解析と線形解析の比較

著者らの以前の研究⁽⁴⁾ では、図 1 のモデルに基づいてシートが微小振動しているときの安定性解析を行った。この線形解析手法は、すきま流の基礎式および境界条件から線形項のみを採用し、構造系の運動方程式と連成させることで、固有値問題に帰着するものであった。一方、本非線形解析手法は、シートを離散化することにより、すきま流の基礎式を常微分方程式の組に転換し、Newmark- β 法を適用して系の時刻歴の応答を求めるものである。例として、図 3 に示す上壁面が並進および回転強制運動を同時に行うときに、振動振幅を変化させて、線形計算手法と非線形計算手法で求めた上壁面に作用する流体力とモーメントを比較する。なお、回転振動の位相は並進運動の位相より 60° 遅れると仮定した。

図 7 に、振動振幅が小さいときの線形計算結果と非線形計算結果を示す。二つの手法で得られた結果はよく一致し、小振幅時には、線形近似で十分表現可能なことがわかった。一方、図 8 に示すような大振幅の場合では、液体圧力の非線形性が顕在化し、実際の流体力およびモーメントが線形計算結果からずれ、非線形項の影響が顕著になる。ここで現れた非線形項は、後の 6 章で述べるリミットサイクル振動の主要因と考えられる。

6. 計算例

図 1 に示すすきま流路に置かれた片持シートの空力

Fig. 7 Comparison with forces and moments obtained by linear and nonlinear method in forced vibration (small amplitude)

安定性について解析する。シートの物性値および流路の寸法を表1に示す。すきま流路を流れる空気の流れを変え、シートの時間的な応答を求めた。なお、計算上ではシートの分割数を10とした。

図9に計算結果の一例を示す。この計算は、ある流速のもとでシートに微小な外乱を与え、その後のシートの時刻歴挙動を計算した結果である。図9(a)は流速が小さい場合で、初期変位に対してシートの振動がだんだん小さくなり、安定状態に戻ってゆくようすを示している。本計算では構造減衰を零としているので、流体による減衰が正であることがわかる。図9(b)のように平均流速が11.4 m/s(以下で安定領域とリミットサイクル領域を分ける流速を臨界流速と呼ぶ)に等しいときには、シートは振幅を一定値に保ったまま振動しており、振幅は初期条件によって決定する。図9(c)のように流速が臨界流速を超えると、シート振動の振幅は時間とともに増加し、ある振幅に達すると、流体力の非線形項が顕在化し、振動がリミットサイクルに入る。このとき、シートの振動振幅はすきま幅と同じオーダーの値であり、シートに作用する流体力は正弦波ではなくなる。さらに流速を17.8 m/s

(以下でリミットサイクル領域と不安定領域を分ける流速を不安定流速と呼ぶ)に上げると、図9(d)のようにシート振動の振幅は一定値に収まることができず、最後にシートが壁面と衝突することによって系が不安定になり、計算が続けられなくなる。図9には n 番め要素の回転運動の時刻歴のみ示したが、ほかの要素も類似した挙動を現した。

上述の結果を安定線図にまとめると、図10のようになる。すなわち、流速によって系は安定領域、リミットサイクル領域または不安定領域に分けられる。また、図10中にリミットサイクル時の1番め要素と n 番め要素の角振動振幅を描いた。図10より、流速の増加とともに、振動振幅が増加することがわかった。

図11には、リミットサイクル領域において、各流速に対応するシート振動の形状を示す。いずれの波形は進行波であることがわかった。また、流速の増加に伴い、高次モードが混入するため、シートの挙動はより複雑になる。

n 番めシートの振動波形のFFT処理を行い周波数データに変換すれば、図12が得られる。図12(a)は平均流速 $V_{\text{air}}=11.4$ m/s(臨界流速)の場合で、このときシートは単一周波数で振動する。流速を増加させる

Table 1 Test conditions

Material	Bronze sheet
Thickness t_s (m)	1.5×10^{-4}
Young's modulus E (Pa)	1.10×10^{11}
Density of sheet ρ (kg/m^3)	8.78×10^3
Structural damping c_0 ($\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$)	0
Length of passage L (m)	0.20
Width of passage b (m)	0.10
Height of passage h_0 (m)	2.0×10^{-3}

Fig. 8 Comparison with forces and moments obtained by linear and nonlinear method in forced vibration (large amplitude)

Fig. 9 Time history response of n -th element of sheet

Fig. 10 Stability chart in passage width $h_0=2$ mm

と、高周波数成分が現れ始め、その成分は流速とともに大きくなる。図 12(b)は $V_{\text{air}}=14.1$ m/s, 図 12(c)は $V_{\text{air}}=17.3$ m/s のときのものである。

図 13 に、シート振動の卓越周波数と流速の関係を示す。流速の増加につれて卓越周波数が上昇し、流体の影響で系の剛性が増加することがわかった。これは流速に比例して、シートに作用するせん断力が増加し、シートの固有振動数が上昇するからである。その理由は、著者がすでに発表した線形安定性解析に関する論文⁽⁴⁾の中の式(28)から説明することができる。

図 14 はすきま幅 $h_0=4$ mm のときの安定線図である。すきま幅 $h_0=2$ mm の場合と同じように、流速に

よって系の状態は安定領域、リミットサイクル領域と不安定領域に分けられる。すきま幅を変化させながら臨界流速と不安定流速を求めると、図 15 に示した結果になる。臨界流速(実線)の下部分は安定領域で、臨界流速曲線と不安定流速曲線(鎖線)の間の部分はリミットサイクル領域で、鎖線の上部分は不安定領域である。すきま幅が小さいとき、臨界流速と不安定流速はすきま幅の増加によって大幅に減少するが、 $h_0=2$ mm 以上では、臨界流速と不安定流速はほぼ一定となる。

7. 結 論

すきま流れの中に置かれたシートの非線形安定解析を行った。シートの大振幅振動の場合では、流体力が明らかに非線形であり、それに基づいた非線形解析が

(a) Average flow velocity $V_{\text{air}}=11.4$ m/s

(b) Average flow velocity $V_{\text{air}}=14.14$ m/s

(c) Average flow velocity $V_{\text{air}}=17.32$ m/s

Fig. 11 Shape envelope

Fig. 12 Frequency spectrum vibration of n -th element

Fig. 13 Average flow velocity vs. dominant vibration frequency

Fig. 14 Stability chart in passage width $h_0=4$ mm

Fig. 15 Average flow velocity vs. leakage passage height

必要となる。

空気流速の増加につれて系が安定領域からリミットサイクル領域に入り、さらに流速を上げると不安定領域に入る。また、流速の増加とともに高次周波数成分が現れるとともに系の剛性が増加するため、卓越振動数が上昇することがわかった。

すきま幅が増加するにつれて臨界流速と不安定流速が低下するとともに、両者の変化量がだんだん小さくなることが明らかになった。

付 録

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\rho}{h_1^L} dx & \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\rho}{h_2^L} dx & \cdots & \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\rho}{h_n^L} dx \end{bmatrix}$$

$$\{A_2\} = \left\{ \begin{array}{c} U_1^L\left(\frac{l}{2}, t\right) - U_2^L\left(-\frac{l}{2}, t\right) \\ U_2^L\left(\frac{l}{2}, t\right) - U_3^L\left(-\frac{l}{2}, t\right) \\ \vdots \\ U_{n-1}^L\left(\frac{l}{2}, t\right) - U_n^L\left(-\frac{l}{2}, t\right) \\ \sum_{i=1}^n \left(\int_{-l/2}^{l/2} W_i^L(x, t) dx \right) + P_1^L\left(-\frac{l}{2}\right) - P_n^L\left(\frac{l}{2}\right) \end{array} \right\}$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, [A_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_5] = l \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

文 献

- (1) Watanabe, Y., Suzuki, S., Sugihara, M. and Sueoka, Y., *J. Fluids Struct.*, **16**-4 (2002), 529-542.
- (2) Watanabe, Y., Isogai, K., Suzuki, S. and Sugihara, M., *J. Fluids Struct.*, **16**-4 (2002), 543-560.
- (3) 長倉博・金子成彦, 機論, **58**-546, C (1992), 352-259.
- (4) 金子成彦・呉小山, 機論, **68**-675, C (2002), 3314-3321.
- (5) 吉田和司, 機論, **63**-615, C (1997), 3926-3932.
- (6) Antunes, J., *Flow-Induced Vibrations in Engineering Practice*, ISBN 1-85312-644-6, (2002), 283-388.
- (7) 稲田文夫・葉山眞治, 機論, **53**-488, C (1987), 933-939.