圧電素子を用いたパッシブ制振におけるロバスト性能指標に基づく シャント回路素子値の最適化*

高木 賢太郎^{*1}, 長瀬 賢二^{*1}, 大嶋 和彦^{*2}
早川 義一^{*1}, 市川 浩幸^{*3}

Optimization of Passive Piezoelectric Shunt Damping Based on the Robust Performance Index

Kentaro TAKAGI^{*4}, Kenji NAGASE, Kazuhiko OSHIMA,
Yoshikazu HAYAKAWA and Hiroyuki ICHIKAWA

^{*4} Electronic-Mechanical Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

Passive piezoelectric shunt damping is a vibration suppression method using a piezoelectric element which is electrically shunted by a passive electrical circuit. This paper shows a method of optimizing the values of the elements of the shunt circuits based on the robust performance index against the model uncertainties. For the optimization, the worst-case peak gain of the transfer function is selected as a cost function. From the results of the optimization for the LR shunt circuit, we investigate some required properties for the robustness of shunt circuits. As an example of the robust shunt circuits, the optimization for the LR-LRC shunt circuit is also presented. The experimental results demonstrate the efficiency of the proposed method.

Key Words: Piezoelectric Element, Shunt Damping, Robust Performance, Passive Vibration Control

1. 結 言

近年, 圧電素子を用いて振動のエネルギーを電気エネルギーに変換し, 圧電素子に接続された外部電気回路(シャント回路)で電気エネルギーを散逸させて機械的ダンピングを得る, パッシブ制振の手法が注目されている^{(1)~(5)}. この手法において, シャント回路の選定と回路素子値のチューニング方法は重要な研究課題である. これに関する従来の研究としては, 動吸振器との類推からシャント回路にLR回路を用い, 定点理論⁽⁶⁾により回路素子値のチューニングをする研究⁽¹⁾や, 複数のモードの制振のための, 回路の選定やチューニング方法に関する研究^{(2)~(4)}がある. しかしながら, これらの手法はモデル化誤差のない状況では高い性能が期待できる一方で, 制振対象, 圧電素子, ならびにシャント回路にモデル化誤差が存在すると, 性能が大きく

劣化する可能性がある. 本手法のようなパッシブ制振法では, 動吸振器を用いた場合から類推されるように, 特にこの問題が顕著に現れることが予想される.

本研究では上記の問題に対処するため, ロバスト性能を指標としたシャント回路素子値のチューニング方法を提案する. ロバスト性能指標としては, 許容されるすべての不確かさに対する閉ループ伝達関数のピークゲインの最大値を考え, 構造化特異値^{(7)~(9)}を用いた計算アルゴリズムを示す. 次に, 従来広く用いられているLR回路に対し, 定点理論と提案手法によるチューニング結果を示す. さらに両者の比較からロバスト性能の向上に必要な回路特性を考察し, 回路の一構成法として, 複数のモードの制振に用いられてきたLR-LRC回路を単一のモードの制振に用いた結果を示す. 最後に提案手法の有効性を実験により確認する.

本論文の構成は以下の通りである. まず, 制振対象である平板, 圧電素子ならびにシャント回路のモデル化を第2章に示す. 次に, 提案するロバスト性能の指標ならびにその計算アルゴリズムを第3章に示す. 第4章では, 数値例としてLR回路を用いた場合のチューニング結果を示し, ロバスト性能の向上に必要な回路

* 原稿受付 2003年2月20日.

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋千種区不老町).

^{*2} 正員, 大同工業大学情報機械システム工学科(☎457-8530 名古屋市南区滝春町10-3).

^{*3} 東海ゴム工業(株)(☎485-8550 小牧市東3-1).

E-mail: k_takagi@nuem.nagoya-u.ac.jp

特性を考察する。またロバストなシャント回路の一つの実現例として LR-LRC 回路を考え、そのチューニング結果を示す。実験結果を第 5 章に、まとめと今後の課題を第 6 章に示す。

2. モデル化

Fig. 1 Illustration of the piezoelectric shunt damping system

図 1 に示すように、シャント回路 Y_{su} を接続した圧電素子を貼付けた平板を考える。図中 $w(x, y, t)$ は板の z 方向への変位、 $f(t)$ は位置 (x_f, y_f) に作用する集中外力である。また $i_{su}(t)$ はシャント回路に流れる電流、 $v_a(t)$ は圧電素子端子間に加わる電圧を表す。本研究では、 $w(x, y, t)$ はモード展開

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_m} \phi_m(x, y) \eta_m(t) \quad (1)$$

により表現できるものとする。ここで、 $m = 1, 2, \dots$ はモード次数を表し、 $\phi_m(x, y)$ と $\eta_m(t)$ はそれぞれ m 次モードのモード形状関数とモード振幅を表す。また k_m は、平板と圧電素子の物性や、貼付け位置によって定まる定数で、

$$k_m = \sqrt{\int_A (\rho L_z + \rho_p L_{pz} H_p(x, y)) \phi_m(x, y)^2 dA} \quad (2)$$

である。なお、 $H_p(x, y)$ は圧電素子の存在領域で 1 それ以外で 0 となる窓関数であり、 A は板の存在領域を表す。 ρ, ρ_p は板と圧電素子の質量密度、 L_z, L_{pz} は板と圧電素子の厚さを表す。

式 (1) のモード展開を用いて、平板の微小曲げ振動の運動方程式は次式で与えられる^{(1) (10) (11)}。

$$\ddot{\eta}_m(t) + 2\zeta_m \omega_m \dot{\eta}_m(t) + \omega_m^2 \eta_m(t) = -f_m^p(t) + \phi_m^f f(t) \quad (3)$$

ここで、 ζ_m, ω_m はそれぞれ m 次モードの減衰率と固有角振動数を表し、

$$f_m^p(t) = \psi_m v_a(t) \quad (4)$$

である。ここで、 ψ_m と ϕ_m^f は、平板と圧電素子の物性や貼付け位置、外力の作用する位置 (x_f, y_f) などで定

まる定数で、

$$\psi_m = \frac{1}{k_m} \int_A k_p H_p(x, y) \nabla^2 \phi_m(x, y) dA \quad (5)$$

$$k_p = \frac{Y_p}{1 - \nu_p} d_{31} \frac{L_z + L_{pz}}{2} \quad (6)$$

$$\phi_m^f = \frac{1}{k_m} \phi_m(x_f, y_f) \quad (7)$$

であり、 Y_p, ν_p, d_{31} は、それぞれ、圧電素子のヤング率、ポアソン比、圧電定数を表す。なお、圧電セラミクスを想定し $d_{32} = d_{31}$ とした。式 (3) の右辺第一項 $f_m^p(t)$ は、圧電素子発生力の m 次モードへの寄与分であり、次に述べる電気回路系と $v_a(t)$ によって関係づけられている。

次に、圧電素子とシャント回路からなる電気回路系の回路方程式を示す。圧電素子が平板に貼付されていることに注意すると、回路方程式は C_p^S を圧電素子の拘束静電容量として、次式で与えられる^{(1) (10) (11)}。

$$v_a(t) = \frac{1}{C_p^S} \int (i_p(t) - i_{su}(t)) dt \quad (8)$$

ここで、

$$i_p(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \dot{\eta}_m(t) \quad (9)$$

$$i_{su}(s) = Y_{su}(s) v_a(s) \quad (10)$$

である。ここで、 $i_p(t)$ は板の変形によって圧電素子が発生する電流であり、 $i_{su}(t)$ は前述したようにシャント回路に流れる電流である。なお式 (10) は、シャント回路のアドミタンス $Y_{su}(s)$ を用いて、ラプラス変換により表現している。

式 (3), (4) ならびに式 (8), (9), (10) で表される、機械系と電気系の結合関係をまとめると図 2 となる。図左側が機械系の振動モードを表し、右側が圧電素子とシャント回路からなる電気系を表す。両者は、圧電効果により、 $\dot{\eta}_m(t)$ と $v_a(t)$ で結びついている。また、この関係をブロック線図で表すと図 3 となる。図中の信号は、 $\eta(t) = [\eta_1(t) \cdots \eta_m(t) \cdots]^T$, $f_p(t) = [f_1^p(t) \cdots f_m^p(t) \cdots]^T$, $\phi^f = [\phi_1^f \cdots \phi_m^f \cdots]^T$, $\psi = [\psi_1 \cdots \psi_m \cdots]^T$ であり、モードをまとめてベクトルで表現してある。 $G_{me}(s)$ は、式 (3) から得られる、 $-f_p(s) + \phi^f f(s)$ から $[\eta(s)^T \dot{\eta}(s)^T]^T$ までの伝達関数である。また、 $Z_{el}(s)$ は C_p^S と $Y_{su}(s)$ からなる電気回路のインピーダンスであり (図 2 右参照)、次式で与えられる。

$$Z_{el}(s) = \frac{1}{C_p^S s + Y_{su}(s)} \quad (11)$$

図 3 より、システムがコントローラ $f_p(s) = \psi Z_{el}(s) \psi^T \dot{\eta}(s)$ による速度フィードバックとして解釈できる事がわかる。

Fig. 2 Interaction between mechanical and electrical systems

Fig. 3 Feedback interconnection of mechanical and electrical systems

3. ロバスト性能指標に基づくシャント回路素子値のチューニング

3.1 システムの表現ならびに評価関数

以降では m 次モードのみを制振対象とし、その他のモードの影響は考慮しないものとする。図 3 から m 次モードのみを取り出し、システム内部の表現を詳細に表すと図 4 となる。図 4 において上段は平板、中段は圧電素子、下段はシャント回路を表す。なお図中の $Y_{su}(s; p)$ は前述のシャント回路のアドミタンスと同じものであるが、回路素子値をパラメータとして並べたベクトル p の関数であることを陽に示してある。モデルの不確かさとして物理パラメータの変動を考え、例えば、 $1/C_p^S$ がノミナル値 $1/\hat{C}_p^S$ に対して加法的な不確かさを有するとすると、 $1/C_p^S$ は

$$\frac{1}{C_p^S} = \frac{1}{\hat{C}_p^S} + W_{cp}\delta_{cp}, \quad |\delta_{cp}| \leq 1 \quad (12)$$

と表現できる (図 4 参照)。ここで W_{cp} は不確かさの幅を表す重みであり、 δ_{cp} は $|\delta_{cp}| \leq 1$ を満たす任意の実定数である。

図 4 におけるシステムの不確かさの表現を決め、不確かさを表すブロックを引き出してまとめると、図 5 の拡大系が得られる。図中、 $G_{aug}(s; p)$ はノミナルモデルと重み行列を含む拡大系であり、 $\Delta_p(s) \in RH_\infty$ は $\bar{\sigma}(\Delta_p(j\omega)) \leq 1$ を満たす不確かさの構造を表すブロック対角行列である。ただし、 RH_∞ は安定な伝達

Fig. 4 Block diagram with parametric uncertainty

Fig. 5 Augmented plant

関数の集合を意味し、 $\bar{\sigma}(\cdot)$ は最大特異値を表す。

図 5 の表現を用いて、ロバスト性能を表す指標として次式を考える。

$$J(p) = \max_{\omega} \max_{\bar{\sigma}(\Delta_p(j\omega)) \leq 1} |F_l(G_{aug}(j\omega; p), \Delta_p(j\omega))| \quad (13)$$

ここで $F_l(G_{aug}(j\omega; p), \Delta_p(j\omega))$ は、 $G_{aug}(j\omega; p)$ を係数行列とする $\Delta_p(j\omega)$ に関する線形分数変換であり、 f から η_m までの伝達関数を表す。 $J(p)$ は、不確かさを許容される範囲 $\bar{\sigma}(\Delta_p(j\omega)) \leq 1$ で変動させたときの f から η_m までのゲインの最大値を表している。式 (13)

の $J(p)$ を用いると回路素子値 p は

$$p_{opt} = \arg \min_p J(p) \quad (14)$$

として決定することができる。ここで $\arg \min_p J(p)$ は、関数 $J(p)$ が最小となる p の集合を表す。

3.2 評価関数の計算アルゴリズム 本節では式 (13) で定義される $J(p)$ の計算アルゴリズムを与える。 $J(p)$ は以下に示すように構造化特異値を利用して計算できる。以降では、特に必要のない限り引数 $j\omega, p$ は省略する。

Fig. 6 Scaled augmented plant

$J(p)$ の計算のために、図 5 に対応した図 6 の拡大系を考える。ここで α はスケーリングのための実定数であり、

$$G_{aug}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} G_{aug} \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_F & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix} \quad (16)$$

である。 $\Delta_F(s) \in RH_{\infty}$ は $\bar{\sigma}(\Delta_F(j\omega)) \leq 1$ を満たす任意の伝達関数である。 G_{aug}^{α} に対する構造化特異値は

$$\mu_{\Delta}(G_{aug}^{\alpha}) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - G_{aug}^{\alpha}\Delta) = 0\}} \quad (17)$$

で定義される。式 (17) の $\mu_{\Delta}(G_{aug}^{\alpha})$ は、 α, ω を固定すれば MATLAB⁽⁸⁾ などを用いて容易に計算できる。なお、 $\alpha = 0$ のときの G_{aug}^{α} の構造化特異値が 1 以上であること、すなわち $\mu_{\Delta}(G_{aug}^0) \geq 1$ は、ロバスト安定性が成立しないことを意味するので、以降では

$$\max_{\omega} \mu_{\Delta}(j\omega)(G_{aug}^0(j\omega; p)) < 1 \quad (18)$$

であると仮定する。 $J(p)$ は、式 (17) の $\mu_{\Delta}(G_{aug}^{\alpha})$ を用いると、 α を 0 から増加させていったときに

$$\max_{\omega} \mu_{\Delta}(j\omega)(G_{aug}^{\alpha}(j\omega; p)) = 1 \quad (19)$$

となる最小の $\alpha(=\alpha_{min})$ を用いて、

$$J(p) = \frac{1}{\alpha_{min}} \quad (20)$$

と計算される (詳細は付録 A 参照)。

式 (13) の p_{opt} は、式 (19), (20) により計算される $J(p)$ の値を用いて、直接探索法などの数値最適化法を利用して求められる。

4. ロバスト性能向上のための回路構成の考察

4.1 LR シャント回路にみるロバスト性能指標に基づく回路素子値チューニング

本節では、図 7 に示す LR シャント回路を用いた場合の、回路素子値のチューニング結果を示す。平板と圧電素子の物理パラメータおよびモードパラメータを付録 B に示す。なお、制振対象は第 1 次モードとする。モデルの不確かさとしては、製品のばらつきや使用環境の変化 (温度変化など) を考慮して、モードパラメータと圧電素子のキャパシタンス、 $\omega_1^2, 2\zeta_1\omega_1, 1/C_p^S$ に、それぞれ $\pm 20\%$, $\pm 50\%$, $\pm 10\%$ の不確かさが加法的に存在するとした。比較のために、従来広く用いられている定点理論 (付録 C 参照) によるチューニング結果も示す。

Fig. 7 LR shunt circuit

得られた素子値を用いた場合の、外力からモード振幅まで ($f \mapsto \eta_1$) のゲイン線図を、図 8 (定点理論)、図 9 (ロバスト性能指標に基づくチューニング) に示す。なお、得られた素子値は図中左上に示してある。破線と実線はそれぞれ、誤差を 0 とした場合の開ループ系と閉ループ系のゲイン線図である。一点鎖線は誤差がある場合の閉ループ系のゲイン線図であり、誤差の組み合わせの中で最悪値を与えるものを代表として示してある ($\omega_1^2, 2\zeta_1\omega_1, 1/C_p^S$ にそれぞれ $+20\%$, $+50\%$, -10% の誤差が生じた場合)。なお、図中に開ループピークゲインと閉ループピークゲインの比 [dB] を示してある。

図 8, 9 より、定点理論による結果は、ノミナルモデルに対する性能に優れるものの誤差により性能が大きく劣化しているのに対し、ロバスト性能指標による結果は、ノミナルモデルに対する性能は定点理論の場合と比べて劣るものの誤差による性能劣化が小さく抑えられている。このことは、定点理論の場合では $J(p) = 7.51 \times 10^{-5}$ 、ロバスト性能指標による場合では $J(p) = 5.25 \times 10^{-5}$ であることから確認できる。

4.2 周波数特性からみたロバスト性能向上のための回路構成

本節では前節の LR 回路におけるパラ

Fig. 8 LR shunt: Fixed point

Fig. 9 LR shunt: Robust performance

メータのチューニング結果をもとに、ロバスト性能向上のための回路構成の指針を考える。議論を明確にするため、制振対象は第1次モードとして以降の説明を行う。第2章で述べたように、システムはコントローラ $f_p = \psi_1 Z_{el}(s) \psi_1 \dot{\eta}_1$ による速度フィードバックとして解釈できるので、ここでは $Z_{el}(s)$ の特性からロバスト性能向上の理由を考察する。前節の LR 回路において、定点理論とロバスト性能指標によりチューニングされた L, R 値を用いた場合の $Z_{el}(s)$ のボード線図を図10に示す。破線と実線は、それぞれ定点理論とロバスト性能指標を用いた場合を表し、一点鎖線で一次モードの固有角振動数 ω_1 を示してある。図からわかるように、定点理論、ロバスト性能指標を用いた場合ともに、 $Z_{el}(s)$ は周波数 ω_1 付近でゲインが最大、位相が $0[\text{deg}]$ となっている。このことから、この周波数で $f_p = \psi_1 Z_{el}(s) \psi_1 \dot{\eta}_1$ が純粋な速度フィードバックとして効果的に働くことがわかる。 $Z_{el}(s)$ について、定点理論の場合とロバスト性能指標の場合で比較すると、 ω_1 付近のゲインは定点理論を用いた場合の方が大き

いため、モデル化誤差がない場合には大きな制振効果が期待できる。一方、 ω_1 近傍の位相の傾きは、ロバスト性能指標を用いた場合の方が小さく抑えられている。このことにより、ロバスト性能指標を用いた場合は、 $Z_{el}(s)$ の位相が ω_1 近傍のより広い帯域で $0[\text{deg}]$ 付近にとどまるため、ロバスト性能の向上がなされたと解釈できる。

Fig. 10 $Z_{el}(s)$: LR shunt circuit

上記のような観点からロバスト性能の向上が期待できるパッシブシャント回路の一つとして、図11に示す LR-LRC 回路が考えられる。LR-LRC 回路は、従来複数のモードの制振に用いられている回路であり、LR 回路に対し LRC 回路が並列に接続されたものである。第1次、第2次モードを制振対象としてチューニングされた LR-LRC 回路を用いた場合の、 $Z_{el}(s)$ のボード線図を図12に示す。図12からわかるように、 $Z_{el}(s)$ は位相 $0[\text{deg}]$ の2つのピークをもっており、ピークの周波数を制振対象のモードの固有振動数 ω_1, ω_2 に合わせることで、複数モードの制振を行うことができる。前述したように、ロバスト性能向上のために $Z_{el}(s)$ が持つべき特性は、制振対象の固有振動数付近でゲインが大きく、位相が $0[\text{deg}]$ の帯域が広く確保されていることである。そこで、LR-LRC 回路を用いた場合の $Z_{el}(s)$ の特性に着目すると、2つのピークを適切に近付ければ、ロバスト性能の向上がなされると考えられる。

Fig. 11 LR-LRC shunt circuit

第1次モードを対象に、LR-LRC シャント回路をロ

Fig. 12 $Z_{el}(s)$: LR-LRC shunt circuit (for 2-mode control) Fig. 14 $Z_{el}(s)$: LR-LRC shunt circuit (for robust control)

Fig. 13 LR-LRC shunt: Robust performance

バスト性能指標によりチューニングした場合の $f \rightarrow \eta_1$ のゲイン線図を図 13 に示す。破線と実線は、それぞれノミナルモデルに対する開ループと閉ループゲイン線図であり、一点鎖線は誤差 (図 8, 9 の場合と同様) があるときの閉ループゲイン線図である。また、この場合 $J(p) = 3.47 \times 10^{-5}$ である。

図 13 より、図 8, 9 の LR 回路の場合と比較して、LR-LRC 回路によりロバスト性能の向上が確認できる。またこのときの $Z_{el}(s)$ のボード線図を図 14 に示す。チューニングされた結果は、予想されたように 2 つのピークが近づき、ゲインが大きく位相が 0[deg] 付近の帯域が広く確保されている。

5. 実験

図 15 に示す鋼製の平板を用いて実験を行った。圧電素子 (富士セラミックス製 C-6) は、図に示すように平板の中央にエポキシ系の接着剤で貼付けた。実験に用

Fig. 15 Experimental setup

いた平板と圧電素子の諸元は付録 B に示してある。実験は、図 15 の EP 点 (100[mm], 80[mm]) をインパルスハンマで打撃し、MP 点 (275[mm], 180[mm]) の変位をレーザセンサで計測して周波数応答を求めた。第 1 次モードを制振対象とし、シャント回路は前章の 3 種類 (LR: 定点理論, LR: ロバスト性能指標, LR-LRC: ロバスト性能指標) を用いてチューニングを行った。なお、シャント回路のインダクタは、インダクタンス値が非常に大きいということとチューニングの利便性を考えて、電子インダクタ (synthetic inductor)⁽²⁾ を用いた。

はじめに、ノミナル性能を調べる。図 16 に、表 2 に示すノミナル値を用いてチューニングしたシャント回路を用いたときの、EP 点から MP 点の変位までのゲイン線図を示す。図中、破線は開ループのものであり、点線、一点鎖線、実線は、それぞれ、定点理論を用いた LR シャント回路、ロバスト性能指標を用いた LR 回路、ロバスト性能指標を用いた LR-LRC 回路を用いた場合の閉ループゲイン線図である。また図中に開ループゲインと閉ループゲインの比 [dB] が示してある。

Fig. 16 Experimental results (tuned by using nominal parameters)

Fig. 17 Experimental results (tuned by using perturbed parameters)

次に、ロバスト性能の確認を行う。実験では、実験装置の物理パラメータを指定通りに変動させることが困難であるため、設計時のノミナル値を表2の値から意図的に変動 (ω_1^2 , $2\zeta_1\omega_1$, $1/C_p^S$ を、それぞれ +20%, +50%, -10%) させてシャント回路のチューニングを行い、それを実対象に適用することでロバスト性能の確認とした。なお上記の変動は、 ω_1^2 , $2\zeta_1\omega_1$, $1/C_p^S$ が、設計で用いたノミナル値に対して、それぞれおよそ -20%, -50%, +10% 変動した場合に相当する。結果を図17に示す。図中の破線、点線、一点鎖線、実線は図16と同様である。

図16, 17より、定点理論による結果は、モデルに誤差がない場合(図16)の性能は優れているが、モデルに誤差がある場合(図17)には性能劣化が大きい。これに対してロバスト性能指標を用いた場合には、誤差

がない場合の性能は定点理論を用いた場合に比べて劣るものの、誤差による性能劣化は小さく抑えられている。また、ロバスト性能指標を用いた場合、LRシャント回路とLR-LRCシャント回路の結果を比較すると、ノミナルの場合、誤差がある場合ともにLR-LRC回路の方が優れており、回路構成の有効性が期待できる。

6. 結 言

本研究では、圧電素子を用いたパッシブ制振を考え、ロバスト性能の向上という観点からシャント回路素子のチューニング方法、ならびに回路構成方法に関する考察を行なった。はじめにロバスト性能の指標として、許容される全ての不確かさに対する閉ループ伝達関数のピークゲインの最大値を考え、その計算アルゴリズムを示した。次に、従来広く用いられているLR回路のチューニング結果を、定点理論と提案手法で比較する事により、ロバスト性能向上のための回路特性を考察した。さらに、その一つの実現例としてLR-LRC回路を提案した。最後に、提案手法の有効性を実験により確認した。

今後の課題は、ロバスト性能のさらなる向上のためのシャント回路構成法の考察や、本手法の複数モードの制振への拡張などである。

文 献

- (1) Hagood, N. W. and A. von Flotow, The Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks, *J. Sound Vib.*, **142**-6(1991), 243-268.
- (2) Hollkamp, J. J., Multimodal Passive Vibration Suppression with Piezoelectric Materials and Resonant Shunt, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **5**(1994), 49-57.
- (3) Wu, S. Y., Method for multiple mode shunt damping of structural vibration using a single PZT transducer, *Proc. SPIE Smart Struct. and Mater., Damping and Isolation*, **3327**(1998), 159-168.
- (4) Fleming, A. J., Behrens, S., Moheimani, S. O. R., Optimization and Implementation of Multimode Piezoelectric Shunt Damping Systems, *ASME/IEEE Trans. Mechatronics*, **7**-1(2002), 87-94.
- (5) 瀧上唯夫, 富岡隆弘, 鈴木康文, ピエゾ素子を用いたパッシブ制振による鉄道車両の弾性振動低減(角筒模型を用いた実現可能性の検討), *機論*, **66**-674, C(2002), 3029-3036.
- (6) 長松昭男, 背戸一登, ほか7名, ダイナミクスハンドブック, (1993), 353-355, 朝倉書店.
- (7) Packard, A. and Doyle, J., The Complex Structured Singular Value, *Automatica*, **29**-1(1993), 71-109.
- (8) Balas, G. J., Doyle, J. C., Glover, K., Packard, A., Smith, R., *μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide*, (1995), 4, The Math Works.

- (9) Tzou, K. and Doyle, J. C., *Essentials of Robust Control*, (1998), 183–206, Prentice Hall.
- (10) Lee, C. K., Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. Part I: Governing equations and reciprocal relationships, *J. Acoust. Soc. Am.*, **87**–3(1990), 1144–1158.
- (11) Tzou, H. S. and Fu, H. Q., A Study of Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators, Part I: Theoretical Analysis, *J. Sound Vib.*, **172**–2(1994), 247–259.

付録 A 構造化特異値による最大ピークゲインの計算

式 (18) より,

$$\max_{\omega} \mu_{\Delta_p(j\omega)} (G_{aug22}(j\omega)) < 1 \quad (21)$$

に注意する。ここで G_{aug22} は, G_{aug} を Δ のブロックに対応して分割したときの, (2, 2) ブロックの要素である。式 (21) に注意して, 式 (19) に主ループ定理^{(7)~(9)}を適用すると

$$\max_{\omega} \max_{\sigma(\Delta_p(j\omega)) \leq 1} \mu_{\Delta_F(j\omega)} (F_l(G_{aug}^{\alpha_{min}}(j\omega), \Delta_p(j\omega))) = 1 \quad (22)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} & \max_{\omega} \max_{\sigma(\Delta_p(j\omega)) \leq 1} \mu_{\Delta_F(j\omega)} (F_l(G_{aug}(j\omega), \Delta_p(j\omega))) \\ &= \frac{1}{\alpha_{min}} \end{aligned} \quad (23)$$

を得る。また, Δ_F がフルブロック行列であることに注意すると,

$$\mu_{\Delta_F} (F_l(G_{aug}, \Delta_p)) = \bar{\sigma} (F_l(G_{aug}, \Delta_p)) \quad (24)$$

を得る。 $F_l(G_{aug}, \Delta_p)$ がスカラであることに注意すれば, 式 (13), (23), (24) より式 (20) を得る。

付録 B 平板と圧電素子の諸元

数値例ならびに実験で用いた平板と圧電素子の材料定数を表 1 に示す。また, モードパラメータおよび圧電素子の拘束静電容量を表 2 に示す。

Table 1 Material properties

Plate (steel)		
Mass density	ρ [kg/m ³]	7.86×10^3
Young's modulus	Y [GPa]	205
Poisson's ratio	ν	0.3
Piezoelectric ceramics		
Mass density	ρ_p [kg/m ³]	7.4×10^3
Young's modulus	Y_p [GPa]	58
Poisson's ratio	ν_p	0.35
Piezoelectric const.	d_{31} [pC/N, pm/V]	195
Permittivity	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	2000 ± 300

Table 2 Experimental parameters

Natural frequency	$\hat{\omega}_1$ [rad/s]	4.33×10^2
Modal damping ratio	$\hat{\zeta}_1$	4×10^{-3}
Capacitance	$\hat{C}_p^S$ [nF]	1.52×10^2
Coupling coefficient	ψ_1 [C/(√kg m)]	2.54×10^{-2}

付録 C 定点理論による LR シャント回路のチューニング

定点理論による L, R の最適値は以下のように与えられる。 m 次モードのみに着目すると, 式 (3), (4), および, 式 (8), (9), (10) より $f(s)$ から $\eta_m(s)$ までの伝達関数は

$$g_m(s; L, R) = \frac{\phi_m^f(LC_p^S s^2 + RC_p^S s + 1)}{(s^2 + \omega_m^2)(LC_p^S s^2 + RC_p^S s + 1) + \psi_m^2 s(Ls + R)} \quad (25)$$

で与えられる。なお, この伝達関数が素子値 L, R の関数であることを明示するため, $g_m(s; L, R)$ と表現している。 L, R の最適値は以下の手順⁽⁶⁾で求めることができる。

1. 定点 (P 点, Q 点とする) の角周波数 ω_P, ω_Q を次式の条件から求める。

$$|g_m(j\omega; L, 0)| = -|g_m(j\omega; L, \infty)| \quad (26)$$

2. 定点 P と定点 Q のゲインが等しくなるように, L の最適値 L_{opt} を次式の条件から求める。

$$|g_m(j\omega_P; L, \infty)| = -|g_m(j\omega_Q; L, \infty)| \quad (27)$$

3. P 点または Q 点でゲインを極大とする R の値 (それぞれ R_P, R_Q とする) を次式の条件から求める。

$$\left. \frac{d}{d\omega^2} |g_m(j\omega; L_{opt}, R)|^2 \right|_{\omega=\omega_P, \omega_Q} = 0 \quad (28)$$

4. R の最適値 R_{opt} は $R_{opt} = \frac{R_P + R_Q}{2}$ から求める。

式 (25) の $g_m(s; L, R)$ に対して上記の手順を適用すると, L, R の最適値は以下のように求まる。

$$L_{opt} = \frac{1}{\omega_m^2 C_p^S + \psi_m^2}, \quad R_{opt} = \frac{R_P + R_Q}{2} \quad (29)$$

ただし,

$$R_P, R_Q = \left[3\psi_m^2 / \left\{ C_p^S (\omega_m^2 C_p^S + \psi_m^2) \right. \right. \\ \left. \left. \left(2(\omega_m^2 C_p^S + \psi_m^2) \mp \sqrt{2\psi_m^2 (\omega_m^2 C_p^S + \psi_m^2)} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$