傾いた振り子式動吸振器系の応答*
(第1報, 単振り子の場合)宋 義 林^{*1}, 佐 藤 秀 紀^{*1}
岩 田 佳 雄^{*1}, 小松崎 俊彦^{*1}The Response of Tilted Vibration System with a Pendulum Type
Dynamic Vibration Absorber
(1st Report, Single Pendulum)Yilin SONG, Hidenori SATO^{*2},
Yoshio IWATA and Toshihiko KOMATSUZAKI^{*2} Department of Human & Mechanical System Engineering, Kanazawa University,
2-40-20 Kodatsuno, Kanazawa-shi, Ishikawa, 920-8667 Japan

The response of a tilted dynamic vibration absorber system with a parametrically excited pendulum or with a dynamically resonated pendulum is numerically investigated. It is found that each dynamic vibration absorber is useful for suppressing vibration of the main system under some tilted angle, but not under all the tilted angle from 0 to 90 degree. And their vibration absorbing characteristics are dependent on the parameters of pendulum such as ratio of mass and damping ratio. In this paper, the vibration absorbing characteristic of the system is clarified, and the optimum parameters of each dynamic vibration absorber, which make the response of the main system minimum in some range close to the resonance frequency under tilted angles, are obtained. It is shown that the better results of suppressing vibration can be attained using optimum parameters.

Key Words: Tilted Vibration System, Pendulum, Dynamic Vibration Absorber

1. 初めに

重力軸方向に振動する振動系に対し, パラメトリック励振を利用した振り子を付加することにより制振を行なう手法(以下, パラメトリック励振型とよぶ)については, 著者らの研究を含めてこれまで多くの報告がある^[1-8]. 一方, 重力軸方向に直角に振動する振動系に対し, 共振を利用した振り子を付加することにより制振を行なう手法(以下, 共振型とよぶ)は通常の動吸振器に対応する. しかし, 系が傾斜した場合に制振特性はどのように変化するか, あるいは, その最適化等についてはこれまで研究がされていない. そこで, 本研究では傾いた振り子式動吸振器系の応答に関する研究の第1報として, 単振り子の場合について, パラメトリック励振型または共振型の振り子を利用した振り子式動吸振器システムの制振特性をそれぞれ解析すると共に, 各傾斜角における系の最適パラメータを求めた.

2. 傾斜した系に対する単振り子式動吸振器系の応答

2.1 運動方程式

図1には傾いた1自由度ばね-質量系に振り子を付加した単振り子式動吸振器系を示す. m, k, c は主系の質量, ばね定数, 粘性減衰係数, m_p, c_θ, J, l は振り子系の質量, 減衰係数, 支点に対する慣性モーメント, 支点から重心Gまでの距離であり, α は主系の運動方向と垂直方向との角度である.

Fig. 1 Tilted vibration system with a pendulum type dynamic vibration absorber

系の運動方程式は

* 原稿受付 2003年4月7日.

*1 正員, 金沢大学工学部(〒920-8667 金沢市小立野 2-40-20).
E-mail: sato@t.kanazawa-u.ac.jp

$$(m + m_p)\ddot{x} + c\dot{x} + kx + m_p l \ddot{\theta} \sin(\theta + \alpha) + m_p l \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \alpha) = F \cos \omega t \quad (1)$$

$$J\ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} + m_p l g \sin \theta + m_p l \ddot{x} \sin(\theta + \alpha) = 0 \quad (2)$$

ここで、 x は主系の変位、 θ は振り子の角変位である。方程式(1)、(2)は無次元化すると次式になる。

$$u'' + \frac{2\zeta}{1+\lambda} u' + \frac{1}{1+\lambda} u + \frac{\lambda}{q(1+\lambda)} (\theta'' \sin(\theta + \alpha) + \theta'^2 \cos(\theta + \alpha)) = \frac{1}{(1+\lambda)} \cos z\tau \quad (3)$$

$$\theta'' + 2\zeta_p p \theta' + p^2 \sin \theta + \mu q u'' \sin(\theta + \alpha) = 0 \quad (4)$$

ここに

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= c/m, & \omega_n^2 &= k/m, & \lambda &= m_p/m \\ \omega_p^2 &= m_p g l / J, & \mu &= m_p l^2 / J, & 2\varepsilon_p &= c_\theta / J \\ x_{st} &= F/k, & u &= x/x_{st}, & p &= \omega_p / \omega_n \\ z &= \omega / \omega_n, & q &= x_{st} / l, & \zeta &= \varepsilon / \omega_n \\ \zeta_p &= \varepsilon_p / \omega_p, & \tau &= \omega_n t \end{aligned}$$

また、式(3)、式(4)における(')は τ による微分を表す。

式(4)において、 $\sin(\theta + \alpha)$ を展開すると式(5)が得られる。

$$\begin{aligned} \theta'' + 2\zeta_p p \theta' + p^2 \sin \theta + \mu q u'' \sin \theta \cos \alpha \\ + \mu q u'' \cos \theta \sin \alpha = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

振り子が小角度で振動する時、 $\sin \theta \approx \theta$ 、 $\cos \theta \approx 1$ と見なし、また、主系の定常振動の調和解が外力と同じ周波数で振動することを仮定すれば、

$$u = A \cos(z\tau + \phi) \quad (6)$$

式(5)は式(7)になる。

$$\begin{aligned} \theta'' + 2\zeta_p p \theta' + [p^2 - \mu q A z^2 \cos(z\tau + \phi) \cos \alpha] \theta \\ = \mu q A z^2 \cos(z\tau + \phi) \sin \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)において、 $\alpha = 0$ ときに方程式の右側はゼロになるため、Mathieu 理論により、振り子の振動はパラメトリック励振となり、主系の振動周波数が振り子の固有振動数の2倍付近になると振り子は大きく振れる。しかし、系がある程度傾斜すると、方程式の右側はゼロとはなくなり、この項は振り子に対して主系と同じ周波数の外力と見なされるようになる。したがって、パラメトリック励振と強制外力が併存する形となり、振り子の振動は少なくとも二つの周波数成分

を含むことが予想できる。本論文では、傾斜角の変化に対して、主系の固有振動数の1/2および主系と同じ固有振動数を持つ2種類の振り子を主系に別々に付加した単振り子系の制振特性を数値的に調べた。

計算では、式(3)、式(4)を用いて、RKG法により数値的に応答を求めた。応答の最初の3000周期をカットした後の300周期に対して、 u, θ の実効値 $\bar{u}, \bar{\theta}$ を求め表示した。また、主系と振り子の固有振動数の比 p は前述のように0.5と1.0の場合を計算した。

2.2 角度 α の変動における系の応答

図2と図3に、弱い減衰の場合($\zeta_p = 0.01$)について、 $p = 0.5$ と $p = 1.0$ の傾斜角 α を変えたときの応答結果を示す。ここで、主系の初期変位と初期速度はゼロ、振り子の初期角変位は0から3.0まで0.2ずつ変化させて、初期条件の影響も調べた。なお、図の(a)、(b)はそれぞれ主系と振り子の応答を表し、振り子が動かないとき、すなわち主系に振り子の質量を加えて1自由度系としたときの周波数応答を2点鎖線で表す。

Fig. 2 Response of main and pendulum systems with different tilted angle α in the case of $p = 0.5$, $\zeta_p = 0.01$ ($\mu = 0.5, q = 0.01, \lambda = 0.1, \zeta = 0.01$)

図2より、振り子の減衰が小さいとき、 α が小さいときには振り子のパラメトリック励振により、ある

周波数の領域に一定程度の制振効果があるが、主系と振り子ともに不安定運動が起こる。ここで、不安定運動とは回転やカオスを含む非周期運動である。また、振り子が回転する場合の実効値は、回転しない場合と同様に外力 1 周期を 25 分割して振り子の回転角度を取って求める。ただし、振り子の角度は 2π を超えて連続するものとした。以下では、不安定運動の応答を図に黒い印で表す。周波数の比 z が 1.0 に近づくと、応答曲線に急に高いピークが出てくる。また、 α の増大に従い、制振領域が狭くなり、ピークが高くなるのがわかる。計算結果によると、 $\alpha \leq 60^\circ$ 場合は振り子の振動によって主系の振動を抑える効果が多少あるが、 $\alpha \geq 75^\circ$ 場合は振り子があまり振動しなく、パラメトリック励振の特性は失われて、吸振器としての制振効果がまったくなくなることがわかる。

Fig. 3 Response of main and pendulum systems with different tilted angle α in the case of $p = 1.0$, $\zeta_p = 0.01$ ($\mu = 0.5, q = 0.04, \lambda = 0.1, \zeta = 0.01$)

図 3 に他の条件は図 2 と同じであり、固有振動数の比 $p = 1.0$ 、励振力の大きさを反映するパラメータ $q = 0.04$ ときの系の応答を示す。ここで、 $q = 0.04$ を設定するのは、 $p = 0.5$ 場合と $\mu, F/m$ を同一とし

た場合、無次元量の関係より q は p^2 に比例することになるので、 $p = 0.5$ の場合の値の 4 倍の値とした。図 3 を見ると、 $p = 0.5$ の場合と逆で、 $\alpha = 0^\circ$ の場合は当然であるが効果がなく、 $\alpha = 90^\circ$ では抑制領域があるが、 $z = 1.0$ 付近で大振幅となり、中間の α では概略 $\alpha = 90^\circ$ に近い応答を示す。また、 $\alpha = 60^\circ$ 時の振り子の応答の実効値は他の傾斜角に比べて大きくなることが見られた。これは、カット周期 3000 周期の間に、回転運動が多数起ったことを意味する。すなわち、実効値を計算するとき、カット周期の間の回転角度をそのまま含めて計算するので、回転が起ると、実効値は大きくなる。このことから、振り子の回転運動の状況がわかる。ただし、その回転はある回数だけ回転すると、再び安定に振れる振動に戻る。これは主系の応答の実効値が単一値であることからわかる。また、その回転の回数は初期条件などに依存する。

Fig. 4 Response of main and pendulum systems with different tilted angle α in the case of $p = 0.5$, $\zeta_p = 0.05$ ($\mu = 0.5, q = 0.01, \lambda = 0.1, \zeta = 0.01$)

図 4 と図 5 に強い減衰の場合 ($\zeta_p = 0.05$) における $p = 0.5$ と $p = 1.0$ の場合について傾斜角 α を変えたときの応答結果を示す。ここで、他のパラメータは図

2と図3と同じである。 $p=0.5$ のときの図4と図2を比べると、主系の応答に同じ傾向が見られるが、減衰の影響で、傾斜角 $\alpha=90^\circ$ の場合を除き、 $\zeta_p=0.05$ での制振効果は全般的に向上することが明らかである。図5は $p=1.0$ 場合の系の応答を示す。図5より、 $\zeta_p=0.05$ の場合は $\alpha=0^\circ$ ときを除いて、共振周波数付近の広い範囲で良い制振効果が得られている。

Fig. 5 Response of main and pendulum system with different tilted angle α in the case of $p=1.0$, $\zeta_p=0.05$ ($\mu=0.5, q=0.04, \lambda=0.1, \zeta=0.01$)

$p=0.5$ では $\alpha=0\sim60^\circ$ 、 $p=1.0$ では $\alpha=90\sim30^\circ$ の範囲で、制振効果があることがわかる。しかし、振り子の減衰量によりかなりその程度には変化があり、最適値が存在すると思われる。また、振り子系の非線形性により、外力の大きさにも依存すると思われるので、以下ではこれらを考慮した最適パラメータについて検討する。

3. 単振り子式動吸振器系の最適パラメータ

以上の分析を踏まえて、振り子の減衰の最適化のために、主系の定常振動の応答振幅 U を、共振前

後の外力周波数幅に渡って二乗平均したもの($\bar{U}$)を最小にすることを考えた。すなわち、

$$\bar{U}(\zeta_p, \lambda, q, z) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i U_i^2} \rightarrow \min \quad (8)$$

ここに、 n は共振周波数前後(共振点から ± 0.15)の計算周波数点の数である。

図6と図8はそれぞれパラメトリック励振型($p=0.5$)と共振型($p=1.0$)動吸振器の各角度における最適減衰比 ζ_p の計算結果を示す。具体的には、系の傾斜角 α において、 q, λ の値に対し、 ζ_p を少しずつ変化させて $\bar{U}$ が最小となる ζ_p を求めた。

図6より、パラメトリック励振型の場合、 $\alpha=0^\circ$ のとき、最適減衰比 ζ_p の質量比 λ による変化はそれほど大きくなく、外力を反映する係数 q が大きいほど ζ_p は大きくなることがわかる。 $\alpha=30^\circ$ のとき、 λ に対応する ζ_p は $\alpha=0^\circ$ のときと同じ傾向がある。ただし、主系からのパラメトリック励振力は $\alpha=0^\circ$ の場合より小さくなるため、 λ の変動に対して、 ζ_p は全般的に小さくなる。

Fig. 6 The optimum parameter (ζ_p vs λ) when pendulum is under parametrically excited vibration

Fig. 7 Frequency analysis of pendulum vibration
($p=0.5$, $\lambda=0.1$, $z=0.95$, $\theta_0=0.1\pi$)

Fig. 8 The optimum parameter (ζ_p vs λ) when
pendulum is under dynamic resonance

また、 $\alpha=60^\circ$ のとき、振り子のパラメトリック
励振の効果はさらに弱くなり、二自由度系としての

応答に近づく。このため、 ζ_p - λ 特性は $\alpha=0^\circ$ お
よび $\alpha=30^\circ$ の場合とは異なって、 λ が大きくなる
につれて ζ_p は小さくなり、 q の大きさによる違い
も明確になっていることがわかる。

図 7 に傾斜角の違いによる、最適減衰比における
 $z=0.95$ とときの振り子振動の周波数分析結果を示す。
ここに Ω_p は振り子振動の成分を表わす。図により、
 $\alpha=0^\circ$ 、 $\alpha=30^\circ$ では、振り子の支配する振動はパ
ラメトリック励振、 $\alpha=60^\circ$ では、振り子の支配す
る振動は共振であることがわかる。

図 8 より、共振型の場合、傾斜角 α が大きくなる
につれて、 $\lambda=0.1$ 付近で最適減衰比は最小となり、
外力 q の影響を受けにくくなるという特性を示すこ
とがわかる。

また、傾斜角が大きくなると、振り子は通常のダ
イナミックダンパとして働くようになり、基本的
にはばね-質量式動吸振器の制振原理と同じで、質量
比 λ における最適減衰比 ζ_p の変動に近い傾向を表
す。ただし、振り子式動吸振器系は非線形系である
ため、全く同一となるわけではない。

Fig. 9 Response of main system with a parametrically
excited pendulum under optimum parameters

Fig. 10 Response of main system with a dynamic resonated type pendulum under optimum parameters

図9と図10は式(8)に基づいて、質量比 λ とその最適減衰比 ζ_p を用いて、主系の応答振幅の二乗平均値($\bar{U}$)の最小値を計算した結果を示している。

図9より、 $p=0.5$ の場合は、 q —一定としたとき、各質量比 λ に対して、主系の応答振幅の最小値 $\bar{U}$ となる最適質量比 λ が存在することがわかる。その最適値は $\alpha=0^\circ$ 、 $\alpha=30^\circ$ では $\lambda=0.1$ であり、 $\alpha=60^\circ$ では振り子を支配する振動はパラメトリック励振ではなく、共振であるので、 λ の値はやや増えて0.1~0.2ぐらいである。また、図によって、 q が小さい場合は λ およびその最適減衰比 ζ_p に対応する $\bar{U}$ が大きい、 q が大きくなるに従い、 $\bar{U}$ は小さく制振効果が大きくなることわかる。

一方、図10より、 $p=1.0$ の場合は、質量比 λ が0.1程度で良好な制振効果が得られ、それ以上振り子質量を増加させても効果は少ないことがわかる。また、外力を反映する係数 q の変動に対する影響は少なく、特に $\alpha=60^\circ$ 、 $\alpha=90^\circ$ では q と関係なくほぼ一定となることわかる。

図11に $\lambda=0.1$ の場合の各外力 q と各傾斜角における主系応答の最小値 $\bar{U}$ を示す。ここで、 q の値はパラメトリック励振型振り子に対応するものである。

Fig. 11 The minimum value of response of main system at $\lambda=0.1$ under different angles

$\bar{U}$ の最小値を見ると、傾斜角が小さいときはパラメトリック励振型振り子が有効、大きいときは共振型振り子が有効であることがわかる。すなわち、傾いた振動系の傾斜角が垂直位置から 30° 以内であれば、パラメトリック励振型を選び、傾斜角が 30° を超えれば、共振型を選ぶことにより、傾いた振動系についての制振を向上させることが可能である。

Fig. 12 Response of main system with a parametrically excited pendulum under optimum parameters

図12と図13には、計算した最適パラメータを用いた、パラメトリック励振型および共振型の場合の主系の応答を示す。ここで、 $\lambda=0.1$ とし、パラメトリック励振型では $q=0.01$ 、共振型では $q=0.04$ とした。

図12、図13を図4、図5と比べると、それぞれ最適パラメータにより、主系の制振領域は広くなり、応答特性は全般的に改善されていることがわかる。

4. 結 言

以上、本研究で得られた結果を要約すると、

(1) 傾斜した振動系に対して、パラメトリック励振と共振を利用した単振り子式動吸振器システムの制振特性を、数値解析により、明らかにした。

(2) 振動系の傾斜角 α において、主系の応答振幅の二乗平均値を最小化する2種類の単振り子式動吸振器の最適パラメータを求めた。

(3) これらの結果より、傾斜角が小さいときにはパラメトリック励振型の振り子が有効、大きいときには共振型の振り子が有効であることがわかる。したがって、最適パラメータ(λ, ζ_p)を選ぶことによって、振り子式動吸振器の制振特性を向上させることが可能である。

しかし、傾斜角 $0\sim90^\circ$ の全領域で変動する振動系に対しては、パラメトリック励振型と共振型の二つの振り子を持つ二振り子動吸振器が有効と考えられる。これらについては次報で明らかにしたい。

文 献

- (1). Haxton, R. S. and Barr, A. D. S. The autoparametric vibration absorber, Trans. ASME, J. Eng. Ind. 94 (1972), 119-125.
- (2). Bajaj, A. K., Chang, S. I. and Johnson, J. M., Amplitude modulated dynamics of a resonantly excited autoparametric two degree-of-freedom system, Nonlinear Dynamics. 5 (1994), 433-457.
- (3). Hatwal, H., Mallik, A. K. and Ghosh, A., Forced nonlinear oscillations of an autoparametric system- Part1: Periodic responses, Trans. ASME, J. Appl. Mech. 50 (1983), 657-662.
- (4). Hatwal, H., Mallik, A. K. and Ghosh, A., Forced nonlinear oscillations of an autoparametric system- Part2: Chaotic responses, Trans. ASME, J. Appl. Mech. 50 (1983), 663-668.
- (5). Yabuno, H., Endo, Y. and Aoshima, N., Stabilization of 1/3-order subharmonic resonance using an autoparametric vibration absorber, Trans. ASME, J. Vib. Acoust. 121 (1999), 309-315.
- (6). Banerjee, B., Bajaj, A. K. and Davies, P., Resonant Dynamics of an Autoparametric System: A Study Using Higher-Order Averaging, Int. J. Non-Linear Mechanics 31(1996), 21-39.
- (7). 宋・佐藤・ほか2名, 機論(C編)67-661(2001), 2763-2769.
- (8). Song, Y., Sato, H., Iwata, Y. and Komatsuzaki, T., The response of a dynamic vibration absorber system with a parametrically excited pendulum, J. Sound vib. 259(2003), 747-759.

Fig. 13 Response of main system with a dynamic resonated type pendulum under optimum parameters