2次元複素数多重解像度解析およびその画像ノイズ除去への
応用に関する研究*戸田 浩^{*1}, 章 忠^{*2}, 川畑 洋昭^{*1}Study on 2-Dimensional Complex Multi-Resolution Analysis and
Its Application for Image DenoisingHiroshi TODA^{*3}, Zhong ZHANG and Hiroaki KAWABATA^{*3} Okayama Prefectural University,
111 Kuboki, Soja-shi, Okayama, 719-1197 Japan

We have already proposed a Complex Multi Resolution Analysis (CMRA), which can provide shift invariance approximately. And in this study, we propose a 2-Dimensional Complex Multi Resolution Analysis (2-D CMRA), which can provide 2-dimensional shift invariance approximately, and applied it to image denoising. The main results obtained can be summarized as follows: 1) Poor 2-dimensional shift invariance in which occurred by the discrete wavelet transform in the case of using real mother wavelet has been improved by using 2-D CMRA. 2) The discrete wavelet transform corresponding to 2-D CMRA has been applied to image denoising, and obtained very encouraging results.

Key Words: Wavelet Transform, Multi Resolution Analysis, Image Processing, Noise

1. はじめに

時間と周波数の同時解析を可能にするウェーブレット変換は、さまざまな分野での信号処理に応用されている。画像においては2次元に拡張されたウェーブレット変換により、画像の位置と周波数の同時解析を可能にしている。Mallat^①は、離散ウェーブレット変換(Discrete Wavelet Transform, DWT)における多重解像度解析(Multi Resolution Analyze, MRA)の高速アルゴリズムを提案したが、これは2次元に拡張され、2次元多重解像度解析(以後2次元MRAと表記)として実用化されている。

しかしながらMRAの本質的な弱点として、シフト不変性の欠如が指摘されている^②。すなわちMRAでは、解析信号はオクターブバンドに分割された各レベルの各ウェーブレットに分解されるが、周波数が低くなるにつれ(すなわちレベルが低くなるにつれ)バンド幅は狭くなり、周波数分解能は高くなる。それに対応し時間分解能は逆に低くなるのがウェーブレット変換の特徴であるが、MRAでは、さらに低域にいくほどウェーブレットの時間の間隔も広く配置される。そのため解析信号の、パルスやエッジ成分といった、

エネルギーの集中する信号の重要な部分を、各レベルのウェーブレットの中心が、必ずしも的確に捉えているとは限らず、解析信号のわずかなシフトに対して、各レベルにおけるこれらのエネルギーが大きく変動する。

以上のような弱点に対し、Magarey^{ら③}と筆者ら^④は、単一の実数型ウェーブレットの位相がシフト変動の原因になることに着目し、実数部に対称性、虚数部に反対称性のウェーブレットを配置した複素数型ウェーブレットを提案した。さらにMagarey^{らは}、複数のフィルタを組み合わせることにより複素数型MRAを実現したが、解析信号の全周波数領域を複素数ウェーブレットで解析するには到らなかった。すなわち対称、反対称の中心を完全に一致させることにより、シフト不変性が実現できるのであるが、Magarey^{らは}レベル1の処理を、中心を合わせるための位相補正に充てた。この作業は単一フィルタにより行われ、情報のかなりの部分(1次元の場合は全情報の半分)の複素数ウェーブレット解析をあきらめなければいけなかった。またこの他にもDaubechies^⑤ウェーブレットにおいて、いくつかの複素数型直交ウェーブレットが考案されているが^{⑥⑦}、これらの実数部、虚数部は同じ対称性を持ち、シフト不変性の改善には寄与しない。そこで筆者らは実数部に対称性、虚数部に反対称性のSplineウェーブレットを配置した複素数型RI-Splineウェーブレットを提案し^⑧、さらに全レベルで複素数

* 原稿受付 2003年4月10日。

^{*1} 岡山県立大学情報工学部(☎719-1197 総社市窪木111)。^{*2} 正員、岡山県工業技術センター(☎701-1296 岡山市芳賀5301)。

E-mail: pxt00134@nifty.com

ウェーブレット解析を可能にし、シフト不変性を実現する複素数多重解像度解析(Complex Multi Resolution Analyze, CMRA)のアルゴリズムを提案した^④。

本研究では、筆者らが提案する複素数型 RI-Spline ウェーブレットによる CMRA を 2 次元に拡張し、2 次元 CMRA を提案する。そして 2 次元 CMRA を用いて、画像における全レベルのシフト不変性の実現を試みる。さらに、それを画像ノイズ除去に応用し、本手法の有効性を明らかにする。

2. RI-Spline ウェーブレットによる CMRA

まず筆者らの提案する RI-Spline ウェーブレットは、対称である偶数 me 階 Spline ウェーブレット(偶関数)を実数部に、また反対称である奇数 mo 階 Spline ウェーブレット(奇関数)を虚数部とする複素数ウェーブレットである^④。図 1 に示すのは本研究に用いた $me=4$, $mo=3$ の RI-Spline ウェーブレット (以後 $m=4,3$ RI-Spline ウェーブレットと表記)のマザー・ウェーブレット (Mother Wavelet, MW) の例である。

次に筆者らが提案する CMRA であるが、これは実数部および虚数部のウェーブレットにより、解析信号に対して MRA を並列して実行するものである^④。個々の MRA は従来の実数型ウェーブレットによる MRA と何ら変わらないもので、Mallat の高速アルゴリズム (分解アルゴリズム, 再構成アルゴリズム) が適応できる。すなわち実際の計算は、複素数計算のルールに従ったものではないが、その計算結果は複素数として扱えるものである。そこで RI-Spline ウェーブレットの実数部、虚数部により並列して行われる MRA の各部を、実数部、虚数部と呼ぶことにする。なお解析結果は、同一レベルの同一座標に位置し、局所的に直交するペアのウェーブレットの集合により表される (この局所的な直交が、複素数としての扱いを可能にしている)。

なお実際の計算にあたっては、実数部と虚数部のエネルギーを統一するための規格化や、対称の中心を一致

させるために、実数部、虚数部のスケーリング関数を合成した合成補間関数を用いる等の作業が必要である。その詳細は文献(8)に記してあるが、ここで RI-Spline ウェーブレットによる、その概要を説明する。

オリジナルの Spline ウェーブレットの求め方に関しては文献(9)に記載されているが、 m 階 Spline ウェーブレットの MW の対称の中心は $(2m-1)/2$ 、スケーリング関数の対称の中心は $m/2$ である。また MW の位相やエネルギーも m の値により異なる。そこで RI-Spline ウェーブレットでは、次のような規格化を施す。すなわち me 階、 mo 階の、オリジナルの Spline ウェーブレットを $\psi_{me}(t)$, $\psi_{mo}(t)$ 、それに対応するスケーリング関数を $N_{me}(t)$, $N_{mo}(t)$ として、RI-Spline ウェーブレットの実数部と虚数部 $\psi_R(t)$, $\psi_I(t)$ およびスケーリング関数 $N_R(t)$, $N_I(t)$ を以下のように規格化する。

$$\begin{aligned}\psi_R(t) &= (-1)^{\frac{me-2}{2}} \|\psi_{me}\|^{-1} \psi_{me}(t+me-1) \\ \psi_I(t) &= (-1)^{\frac{mo+1}{2}} \|\psi_{mo}\|^{-1} \psi_{mo}(t+mo-1) \\ N_R(t) &= N_{me}(t+me/2) \\ N_I(t) &= N_{mo}(t+(mo-1)/2)\end{aligned} \quad (1)$$

ただし $\|f\|$ は関数 $f(t)$ のノルム $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ であり、また内積 $\langle f, g \rangle$ は $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt$ で定義される。以上の規格化により次の関係が成立する。

$$\begin{aligned}\langle \psi_R, \psi_I \rangle &= 0 \\ \|\psi_R\| &= \|\psi_I\| = 1\end{aligned} \quad (2)$$

なお $\langle \psi_R, \psi_I \rangle = 0$ は $\psi_R(t)$, $\psi_I(t)$ が直交する定義である。また MW の実数部と虚数部の対称の中心は $1/2$ に統一され、スケーリング関数の実数部 $N_{me}(t)$ の対称の中心は原点に、虚数部 $N_{mo}(t)$ の対称の中心は $1/2$ に設定される。以上の規格化のもとに、次のような合成補間関数 $N_s(t)$ を定義する。

$$N_s(t) = \sum_k K_k^R N_R(t-k) + \sum_k K_k^I N_I(t-k) \quad (3)$$

この式における定数 K_k^R, K_k^I は、 $N_s(t)$ が原点を中心に左右対称になるよう、また実数部と虚数部に解析信号がバランスよく分配されるよう設定する (このような条件を満たす K_k^R, K_k^I の求め方は文献(8)に記しておいた)。実際の補間は次のような手順で行う。まず β_k^s を、基本ガウディナルスプライン関数 $L_s(t)$ の係数として次のように求める。

$$\begin{aligned}L_s(t) &= \sum_k \beta_k^s N_s(t-k) \\ L_s(t) &= \delta_{k,0} \quad l \in \mathbb{Z}\end{aligned} \quad (4)$$

Fig.1 The $m=4,3$ RI-Spline mother wavelet

ただし、 Z は整数の集合であり、 $t = l\nabla\tau$ 、 $\nabla\tau$ はサンプリング間隔である。また、次式にしたがって $N_S(t)$ による補間を実行する。

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_l c_l^0 N_S(t-l) \\ c_k^0 &= \sum_l f(l) \beta_{k-l}^S \end{aligned} \quad (5)$$

次式により実数部 $c_{R,k}^0$ 、虚数部 $c_{I,k}^0$ を求める。

$$\begin{aligned} c_{R,k}^0 &= \sum_l c_l^0 K_{k-l}^R \\ c_{I,k}^0 &= \sum_l c_l^0 K_{k-l}^I \end{aligned} \quad (6)$$

以上により解析信号 $f(t)$ は次のように補間される。

$$f(t) = \sum_k c_{R,k}^0 N_R(t-k) + \sum_k c_{I,k}^0 N_I(t-k) \quad (7)$$

次に実数部 $c_{R,k}^0$ 、虚数部 $c_{I,k}^0$ のそれぞれに対して MRA を実行するが、分解アルゴリズム、再構成アルゴリズムにおける、分解数列、再構成数列に関しては、式(1)で行った規格化に適応したものを用意しなければいけない。すなわち me 階、 mo 階のオリジナル Spline ウェーブレットの分解数列をそれぞれ a_k^{me} , b_k^{me} と a_k^{mo} , b_k^{mo} とすると、RI-Spline ウェーブレットの分解数列の実数部 a_k^R , b_k^R 、虚数部 a_k^I , b_k^I は、それぞれ

$$\begin{aligned} a_k^R &= \sqrt{2} a_{k+\frac{1}{2}me}^{me} \\ b_k^R &= (-1)^{\frac{1}{2}me+1} \|\psi_{me}\| \sqrt{2} b_{k+\frac{3}{2}me-2}^{me} \\ a_k^I &= \sqrt{2} a_{k+\frac{1}{2}(mo-1)}^{mo} \\ b_k^I &= (-1)^{\frac{1}{2}(mo+1)} \|\psi_{mo}\| \sqrt{2} b_{k+\frac{3}{2}(mo-1)}^{mo} \end{aligned} \quad (8)$$

と表される。またオリジナル Spline ウェーブレットの再構成数列を p_k^{me} , q_k^{me} と p_k^{mo} , q_k^{mo} とすると、RI-Spline ウェーブレットの再構成数列の実数部 p_k^R , q_k^R 、虚数部 p_k^I , q_k^I は、次のように表される。

$$\begin{aligned} p_k^R &= \frac{1}{\sqrt{2}} a_{k+\frac{1}{2}me}^{me} \\ q_k^R &= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}me+1}}{\|\psi_{me}\| \sqrt{2}} q_{k+\frac{3}{2}me-2}^{me} \\ p_k^I &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_{k+\frac{1}{2}(mo-1)}^{mo} \\ q_k^I &= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(mo+1)}}{\|\psi_{mo}\| \sqrt{2}} q_{k+\frac{3}{2}(mo-1)}^{mo} \end{aligned} \quad (9)$$

以上のような分解数列と再構成数列を用意することにより、CMRAにおける分解アルゴリズムは

$$\begin{aligned} c_{R,k}^{j-1} &= \sum_l a_{l-2k}^R c_{R,l}^j \\ d_{R,k}^{j-1} &= \sum_l b_{l-2k}^R c_{R,l}^j \end{aligned} \quad (\text{実数部}) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} c_{I,k}^{j-1} &= \sum_l a_{l-2k}^I c_{I,l}^j \\ d_{I,k}^{j-1} &= \sum_l b_{l-2k}^I c_{I,l}^j \end{aligned} \quad (\text{虚数部})$$

また逆変換における再構成アルゴリズムは

$$\begin{aligned} c_{R,k}^j &= \sum_l (p_{k-2l}^R c_{R,l}^{j-1} + q_{k-2l}^R d_{R,l}^{j-1}) \quad (\text{実数部}) \\ c_{I,k}^j &= \sum_l (p_{k-2l}^I c_{I,l}^{j-1} + q_{k-2l}^I d_{I,l}^{j-1}) \quad (\text{虚数部}) \end{aligned} \quad (11)$$

というふうに、実数部と虚数部は並列して実行される。なお me 階、 mo 階のオリジナル Spline ウェーブレットの分解数列と再構成数列の求め方は、文献(9)に記載されている。以上によりレベル J までの CMRA における解析信号 $f(t)$ は次のように表せる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j,k} (d_{R,k}^j \psi_{R,k}^j(t) + d_{I,k}^j \psi_{I,k}^j(t)) + low(t) \\ \psi_{R,k}^j(t) &= \sqrt{2}^j \psi_R(2^j t - k) \\ \psi_{I,k}^j(t) &= \sqrt{2}^j \psi_I(2^j t - k) \\ low(t) &= \sum_k (c_{R,k}^J N_R(2^j t - k) + c_{I,k}^J N_I(2^j t - k)) \end{aligned} \quad (12)$$

ところで式(2)、(12)より

$$\begin{aligned} \langle \psi_{R,k}^j, \psi_{I,k}^j \rangle &= 0 \\ \|\psi_{R,k}^j\| &= \|\psi_{I,k}^j\| = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

が成立する。したがってレベル j の k 番目における $\psi_{R,k}^j$ と $\psi_{I,k}^j$ の合成ウェーブレットのノルムは

$$\|d_{R,k}^j \psi_{R,k}^j + d_{I,k}^j \psi_{I,k}^j\| = \sqrt{(d_{R,k}^j)^2 + (d_{I,k}^j)^2} \quad (14)$$

と計算できる。なお $\psi_{R,k}^j, \psi_{I,k}^j$ は互いに直交しノルムが 1 であるため、その係数 $d_{R,k}^j, d_{I,k}^j$ は、複素数の実数部、虚数部として扱うことも可能である。

3. RI-Spline ウェーブレットによる2次元 CMRA

1次元の CMRA を 2次元に拡張するにあたって、式(14)のようなノルムの計算が、各レベルにおける 2次元の各点においても、実行できるようにしておくことが重要である。すなわち 2次元上の規格化された直交するウェーブレット群により、各点の合成ウェーブ

レットが表されなければいけない。そこで横軸の座標を x 、縦軸の座標を y とし、式(12)の $\psi_{R,k}^j, \psi_{I,k}^j$ をもとに次のような4つの2次元ウェーブレットを考える。

$$\begin{aligned}\psi_{RR,kx,ky}^j(x,y) &= \psi_{R,kx}^j(x) \cdot \psi_{R,ky}^j(y) \\ \psi_{RI,kx,ky}^j(x,y) &= \psi_{R,kx}^j(x) \cdot \psi_{I,ky}^j(y) \\ \psi_{IR,kx,ky}^j(x,y) &= \psi_{I,kx}^j(x) \cdot \psi_{R,ky}^j(y) \\ \psi_{II,kx,ky}^j(x,y) &= \psi_{I,kx}^j(x) \cdot \psi_{I,ky}^j(y)\end{aligned}\quad (15)$$

このように定義された2次元ウェーブレットの、個々のノルムは1であり、たがいに直交する（簡単な証明は第5章で行う）。すなわち各レベルの各点が、このような2次元ウェーブレットで合成される、2次元CMRAを構築すれば、1次元と同じように、各点の合成ウェーブレットのノルムの計算が可能である。

次に具体的な計算手順であるが、これは一般的な2次元MRAに準じる。すなわち横方向、縦方向の順にレベル-1までの分解を実行して得られた LL, LH, HH, HL のうち、さらに LL に対して同じように分解を続ける（ LL, LH, HH, HL に関しては、次に説明

する図2を参照）。従来の2次元MRAに従いながらも、横→縦の順に、実数→実数、実数→虚数、虚数→実数、虚数→虚数の4種類の分解を並列して行えば、式(15)のウェーブレットによる分解が実現可能である。次に、その具体的な手順を示す。

1) 最初の分解では、合成補間関数を用いた補間を実行する必要がある。そこで図2のように、入力信号を実数と虚数のレベル-1に振り分けるRIモジュールを組み合わせて、4種類の出力 RR, RI, IR, II を得る。なおRIモジュール中のInterは合成補間関数による式(3)~(7)の補間であり、RMRA、LMRAの部分は式(10)の分解アルゴリズムに相当する。また $R.Inv.Inter$, $I.Inv.Inter$ は、次のような変換である。

$$\begin{aligned}c_{CR}^j(k) &= \sum_l c_{R,l}^j N_R^C(k-l) \quad (R.Inv.Inter) \\ c_{CI}^j(k) &= \sum_l c_{I,l}^j N_I^C(k-l) \quad (I.Inv.Inter)\end{aligned}\quad (16)$$

$$N_R^C(t) = N_{me}(t + me/2)$$

$$N_I^C(t) = N_{mo}(t + mo/2)$$

(a) Block diagram

(b) RI Module

Fig.2 The 2-D CMRA implementation on level -1 and module's definition

Fig.3 The 2-D CMRA implementation from level j to level $j-1$ and modules definition

すなわちこの変換は補間の逆の作業である。つまり式 (12) の $low(t)$ において ($t = IV\tau$)、スケーリング関数の係数 $c_{R,k}^j, c_{I,k}^j$ で表される低域成分の実数部、虚数部を、それぞれ l を 2^j にダウンサンプリングした k による関数の値で表すことと同値である。ただしこの作業により位相を変動させてしまうと、以後の位相も狂うので、ここではスケーリング関数の対称の中心を、どちらも原点に移動させた N_R^C, N_I^C を用いる。この作業はエネルギーを統一するために必要なもので、省略すると、スケーリング関数が規格化されていないため、実数部と虚数部のエネルギーのバランスが狂う（なおスケーリング関数を規格化するより、こちらのほうが正確に補正できるため、こちらの補正を採用した）。

2) レベル-2以降は、レベル-1で得られた4種類の RR, RL, LR, LL を個別に処理していく。すなわち図3のようにRモジュール、Iモジュールを組み合わせたことにより、個々の処理を実行する。図3では RL を一例として示したが、この場合は横方向にRモジュールを、また縦方向にIモジュールの処理をする。その他の場合も、モジュールの組み合わせを変え、同じように処理をする。なお図3の各モジュールにおける $RInter, LInter$ は、 N_R^C, N_I^C による補間の処理で、式(4)、(5)で説明した補間の作業とまったく同じことを、 N_R^C, N_I^C において実行すればよい。その他の部品は1)で説明したものと同一である。

4. 2次元 CMRA のシフト不変性の検証

実際の2次元CMRAの様子は、次の章で説明する図8のようになるが、ここでは実数型4階Splineウェーブレットによる2次元MRAと、 $m=4,3$ RI-Splineウェーブレットによる2次元CMRAにより、インパルスシフトさせたときのインパルス応答を比較する。まず図4が実数型4階Splineウェーブレットによるインパルス応答で、これは横方向にインパルスを1つずつ移動させたときの、レベル-2の HH におけるインパルス応答を横1列に並べたものである。すなわち2次元インパルス（ある1点のみの値が1、その他はすべて0である2次元の信号）を、横方向に1つずつ移動させながら2次元MRAして、変換後にレベル-2の HH のウェーブレット係数のみを残し、その他の係数をすべて0にして逆変換した2次元波形の形状である。これらのインパルス応答を見てもわかるように、実数型4階Splineウェーブレットによる2次元MRAでは、その形状が大きく変動している。

一方、同じ条件でインパルス応答を、 $m=4,3$ RI-Splineウェーブレットによる2次元CMRAにより観測したものが図5であるが、こちらは形状も安定しており、その大きさも揃っている。

次に、このようにして観測したレベル-2の HH におけるインパルス応答のエネルギーを示したものが、図6、図7である。図示のように、図6の実数型4階

Spline ウェーブレットによる2次元 MRA と比べて、図7の $m=4.3$ RI-Spline ウェーブレットによる2次元 CMRA では安定したシフト不変性が実現されている。また LH 、 HL においても同様の結果が得られた。

5. 画像のノイズ除去による検証

ここでは画像のノイズ除去により2次元 CMRA の有効性を検証するが、最初に2次元 CMRA の各点の合成ウェーブレットのノルムについて考察する。2次元関数 $f(x, y)$ のノルムは次式のように計算される。

Fig.4 Impulse response of $m=4$ Spline wavelet on level-2

Fig.5 Impulse response of $m=4.3$ RI-Spline wavelet on level-2

Fig.6 Impulse response energy obtained by $m=4$ Spline wavelet on level-2

Fig.7 Impulse response energy obtained by $m=4.3$ RI-Spline wavelet on level-2

$$\|f(x, y)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy} \quad (17)$$

また HH では、式(15)の4つの2次元ウェーブレット係数として各点の RR 、 RL 、 IR 、 IL の値が得られるが、これらを $d_{RR,kx,ky}^j, d_{RL,kx,ky}^j, d_{IR,kx,ky}^j, d_{IL,kx,ky}^j$ とおく。次に式(15)の2次元ウェーブレットのノルムがすべて1であることを証明する。たとえば $\psi_{RR,kx,ky}^j$ は式(13)、(15)より

$$\begin{aligned} \|\psi_{RR,kx,ky}^j(x, y)\|^2 &= \|\psi_{R,kx}^j(x) \cdot \psi_{R,ky}^j(y)\|^2 \\ &= \|\psi_{R,kx}^j(x)\|^2 \|\psi_{R,ky}^j(y)\|^2 = 1 \end{aligned} \quad (18)$$

と証明される。その他のウェーブレットに関しても同じように証明される。次に式(15)の2次元ウェーブレットが互いに直交することを証明する。これは式(13)より $\langle \psi_{R,k}^j, \psi_{I,k}^j \rangle = 0$ となるので、式(15)の互いのウェーブレットの内積も0となり、証明される。以上のように式(15)の2次元ウェーブレットは直交し、ノルムが1となるので、 HH の各点における RR 、 RL 、 IR 、 IL の合成ウェーブレットのノルムは

$$\begin{aligned} d_{kx,ky}^j &= \sqrt{(d_{RR,kx,ky}^j)^2 + (d_{RL,kx,ky}^j)^2 + (d_{IR,kx,ky}^j)^2 + (d_{IL,kx,ky}^j)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

と計算できる。その他の HL 、 LH においても、同じように、合成ウェーブレットのノルムが計算できる。図8は、図9の原画像をレベル4まで2次元 CMRA し、ノルムを表示したものである。

以上のようにして得られた各点のノルムは、各点の局所的なウェーブレットの大きさを表すとみなせるので、2次元 CMRA では、得られた各点のノルムを1つのウェーブレット係数のように扱うことで、従来の画像処理の手法が適用できる。ここでは Donoho ら^{(10)~(12)}の提案した Wavelet Shrinkage (WS) によりノイズ除去を行う。Donoho らによれば、

$$\delta = \frac{\text{median}(\|d_k^{-1}\|) - \text{median}(\|d_k^{-1}\|)}{0.6745} \quad (20)$$

によりノイズの標準偏差 δ を推定し、しきい値 λ を次のように設定することができる。

$$\lambda = \delta \sqrt{2 \log_e N} \quad (21)$$

しかし画像の場合、一般的にデータ総数 N の値は大きくなりがちで、しきい値も最適値より大きくなる傾向にある。そこで式(21)のかわりに

$$\lambda = k\delta \quad (22)$$

として、最良の SNR (信号とノイズのエネルギーの比) となる k を求め、ノイズ除去の結果とした。実際の計算では各点のノルムを d として

$$d_i = \begin{cases} d - \lambda & d > \lambda \\ 0 & d \leq \lambda \end{cases} \quad (23)$$

を算出し、各ウェーブレット係数を d_i/d 倍することにより、Soft Thresholding を実行した。図 10 は図 9 の原画に SNR=6dB のガウス白色ノイズを混入したものである。これに対して、上記の処理による実数型 4 階 Spline ウェーブレットの 2 次元 MRA のノイズ除去

を施したものが図 11、また $m=4,3$ RI-Spline ウェーブレットの 2 次元 CMRA によるものが図 12 である。なお k とノイズ除去後の RMSE (ルート平均 2 乗誤差) の関係は図 13 のようになる。さらに混入するノイズの SNR を変えて、上記のノイズ除去を行った結果が図 14 である。ただし、式(22)における k は、図 13 より 3 の付近に最適値があるものと推定し、 $k=3$ を採用した。図 14 に示すように 2 次元 CMRA のほうが 1.4dB~1.7dB 程度、良好な画質が得られた。

次に医療用画像の画像処理を試みる。図 15 は閉塞部の腸管壁の細かい動脈の放射線画像であるが、この画像に実数型 4 階 Spline ウェーブレットの 2 次元

Fig.8 RI-Spline wavelet's 2-D CMRA from level -1 to level -4

Fig.9 256×256 Peppers Image

Fig.10 Image with white gaussian noise (SNR=6.0dB)

Fig.11 Denoised with $m=4$ Spline wavelet, SNR=11.86dB

Fig.12 Denoised with $m=4,3$ RI-Spline wavelet, SNR=13.49dB

Fig.13 RMSE obtained by $m=4$ Spline wavelet and $m=4,3$ RI Spline wavelet

Fig.14 SNR obtained by $m=4$ Spline wavelet and $m=4,3$ RI Spline wavelet

Fig.15 Example of SMA thrombosis

Fig.16 Shaped and denoised with
m=4 Spline wavelet Fig.17 Shaped and denoised with
m=4,3 RI-Spline wavelet

MRA を施し、まずレベル-1, -2 のウェーブレット係数を 4 倍にして鮮鋭化し、それにより増加したノイズを、上記の方法により除去したものが図 16 である。ただし式(22)における k は、図 13 より $k=3$ を採用した。また $m=4,3$ RI-Spline ウェーブレットの 2 次元 CMRA により、まったく同じ処理をしたものが図 17 である。図示のように 2 次元 CMRA のほうが、エッジ部分の歪みの少ない良好な画質が得られた。

6. ま と め

本研究では、CMRA を 2 次元に拡張した 2 次元 CMRA を提案し、2 次元 MRA におけるシフト不変性を実現した。そして RI-Spline ウェーブレットによる 2 次元 CMRA を、画像のノイズ除去に応用した。得られた結果は、次の通りである。

- 1) RI-Spline ウェーブレットによる 2 次元 CMRA を構築するためのアルゴリズムを確立した。また、それをモデル信号に適用し、その有効性を明らかにした。
- 2) 従来の実数型 2 次元 MRA のシフト変動は、2 次元 CMRA により改善されることが確認された。
- 3) 例として RI-Spline ウェーブレットによる 2 次元 CMRA を画像のノイズ除去に適用し、従来の実数型 2 次元 MRA より良好な結果が得られることを確認した。

参 考 文 献

- (1) S.G. Mallat: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11-7(1989), pp.674-693.
- (2) S. Mallat: a wavelet tour of signal processing, Academic Press(1999), pp.146
- (3) J.F.A. Magarey and N.G. Kingsbury: Motion Estimation using a Complex-Valued Wavelet Transform, IEEE Trans. on Signal Processing, 46-4 (1998), pp.1069-1084.
- (4) Z. Zhang, H. Kawabata and Z.Q. Liu: Nonstationary Signal Analysis Using the RI-Spline Wavelet, Integrated Computer-Aided Engineering, 8-4 (2001), pp.351-362.
- (5) W. Lawton: Applications of Complex Valued Wavelet Transforms to Subband Decomposition IEEE Trans. on signal processing, 41-12 (1993), pp.3566-3568.
- (6) B. Belzer, J.M. Lina and J. Vilasenor: Complex Linear-Phase Filters for Efficient Image Coding, IEEE Trans. on signal processing, 43-10(1995), pp.2425-2427.
- (7) X.P. Zhang, M.D. Desai and Y.N. Peng: Orthogonal Complex Filter Banks and Wavelets: Some Properties and Design, IEEE Trans. on signal processing, 47-4 (1999), pp.1039-1048.
- (8) 章 忠, 戸田浩, 川畑洋昭: 複素数多重解像度解析によるレコード音楽中のパルスノイズの除去に関する研究, 日本機械学会論文集 C 編, 69-680(2003), pp. 966-973
- (9) C.K. Chui: An Introduction to Wavelets, Academic Press (1992). 桜井, 新井 訳: ウェーブレット入門, 東京電機大学出版局 (1993)
- (10) D.L. Donoho and I.M. Johnstone: Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage, Biometrika, 81(1994), pp.425-455.
- (11) D.L. Donoho, I.M. Johnstone, G. Kerkycharian and D. Picard: Wavelet Shrinkage: Asymptotia?, J.R. Statist. Soc. B, 57-2 (1995), pp.301-369.
- (12) D.L. Donoho and I.M. Johnstone: Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage, J. America Statist. Assoc., 99-432(1995), pp.1200-1244.