真にプロパーな離散時間系に対する 安定な遅れ型逆システムの一設計法* (対角化法の提案)

山田 功^{*1}, 菊地 聡子^{*2}
戸塚 明德^{*3}, 木下 航^{*4}

A Design Method of Stable Delayed Inverse Systems for the Strictly Proper Digital Systems (Proposition of Diagonalization Method)

Kou YAMADA^{*5}, Satoko KIKUCHI,
Akinori TOTSUKA and Wataru KINOSHITA

^{*5} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjincho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

This paper considers a design method for delayed-inverse systems for time-invariant strictly proper digital systems, which exactly reproduce the input with some delay. The inverse system must be stable in practical applications. It is well known that the inverse system is unstable if the system has invariant zeros outside the unit circle. The purpose of this paper is to give a state space design method for stable delayed-inverse systems such that the series-connected system, which includes the system and the stable delayed-inverse system, is a diagonal rational function. As a preliminary, we construct the delayed-inverse system by the usual method and factorize the delayed-inverse systems into several subsystems. The stable delayed-inverse system is obtained using observer design for subsystems of the delayed-inverse system. A simple numerical example is also shown.

Key Words: Delayed Inverse System, State Space Description, Diagonal Rational Function, Inner-Outer Factorization, Digital Control

1. ま え が き

時不変線形システムに対し、その出力データから入力データを再現する逆システムの研究がいろいろなされてきた^{(1)~(11)}。逆システムは、モデルマッチング⁽²⁾、サーボ系⁽³⁾、内部モデル制御^{(12) (13)}、繰返し制御^{(8) (9)}、モデルフィードバック制御^{(10) (11)}などへの応用が考察されている。

逆システムに関する研究は、大きく2つ、すなわち Silverman^{(1) (2)}らによる研究と、Sain and Massey⁽⁵⁾による研究に分けられる。Silverman らによる逆システムは、入力データを忠実に再現することから逆システムとしては理想的であるが、微分器を必要とする。そのため実用面で問題となる。Sain and Massey による逆システムは、与えられたシステムに対し、直列結合することにより全体のシステムを積分関数行列とするシステムを求め、これを逆システムとする方法である。この方法も、入力を忠実に再現しようとするとき微分

器が必要となる。また、安定性に問題があることが指摘されている⁽³⁾。一方、離散時間系に対する Sain and Massey の逆システムは、遅れを伴うが、入力を正確に再現できる。連続時間系に対する Sain and Massey の逆システムの安定性の問題点は、離散時間系に対する遅れ型逆システムでは問題とはならず、最小位相系に対する Sain and Massey の逆システムは安定となるという利点がある。以下では、離散時間系に対する Sain and Massey の逆システムを遅れ型逆システムとよぶ。

遅れ型逆システムを用いる際には、遅れ型逆システムは安定でなければならない。与えられたシステムが単位円外に不変零点（以下では不安定な不変零点と呼ぶ）を持つと、そのシステムに対する遅れ型逆システムは不安定になることが知られている⁽³⁾。山田、木下、菊地は、不安定な不変零点を持つ真にプロパーな離散時間系に対する安定な遅れ型逆システムの状態空間上での構成法を提案した⁽¹²⁾。しかし、参考文献⁽¹²⁾の安定な遅れ型逆システムの設計法では、与えられたシステムと遅れ型逆システムの直列結合系が必ずしも対角な実有理関数行列になるとは限らない。遅れ型逆システムを制御系設計に応用する際に、与えられたシステムと遅れ型逆システムの直列結合系が対角な実有理関数

* 原稿受付 2003 年 5 月 21 日。

^{*1} 正員、群馬大学工学部(☎ 376-8515 桐生市天神町 1-5-1)。

^{*2} 学生員、群馬大学大学院工学研究科。

^{*3} 群馬大学工学部。

^{*4} 東芝テック(株)(☎ 101-8442 東京都千代田区神田錦町 1-1)。

E-mail: yamada@me.gunma-u.ac.jp

行列になることが要求される場合がある。たとえば、内部モデル制御⁽¹³⁾において入出力特性を非干渉したい場合などである。このような場合には、参考文献⁽¹²⁾の方法を用いることができない。

本稿では、与えられたシステムと遅れ型逆システムの直列結合系を対角な実有理関数行列とする安定な遅れ型逆システムを、状態空間上で構成する問題を検討する。まず、参考文献⁽¹²⁾で定義された安定な遅れ型逆システムの定義を与え、本稿で検討する問題をまとめる。つぎに、与えられたシステムと遅れ型逆システムの直列結合系を対角な実有理関数行列とする安定な遅れ型逆システムの設計のアイデアを述べる。すなわち、参考文献⁽¹²⁾で定義された（必ずしも安定とは限らない）遅れ型逆システムを求め、得られた遅れ型逆システムをいくつかのサブシステムに分解し、サブシステムごとのオブザーバの設計法を援用することで、与えられたシステムと遅れ型逆システムの直列結合系を対角な実有理関数行列とする安定な遅れ型逆システムの設計法を与える。つぎに、参考文献⁽¹²⁾の設計法を用いて安定な遅れ型逆システムを求めた場合、安定な遅れ型逆システムとの直列結合系が対角な実有理関数行列にならないシステムに対し、提案方法を用いると直列結合系が対角な実有理関数行列となることを数値例により検証する。

本稿で使用する記号を以下にまとめる。

$\mathcal{R}$	実数または実行列の集合。サイズは $\mathcal{R}^{m \times p}$ のように表す。
$\mathcal{R}(z)$	z の実有理関数行列の集合。サイズは $\mathcal{R}^{m \times p}(z)$ のように表す。
$\text{diag}\{(\cdot)\}$	$(\cdot)$ を要素とする対角行列、またはブロック対角行列。
RH_∞	安定プロパーな実有理関数行列の集合。
$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$C(zI - A)^{-1}B + D$ の状態空間表現。
$0_{m \times p}$	m 行、 p 列の零行列を表す。
I_n	n 行、 n 列の単位行列を表す
$D_\perp$	D の正規直交成分を表す。すなわち、 $\begin{bmatrix} D & D_\perp \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} D \\ D_\perp \end{bmatrix}$ はユニタリである。

2. 安定な遅れ型逆システム

ここでは、参考文献⁽⁷⁾で定義された安定な遅れ型逆システムの定義を簡単に述べ、問題の定式化を行う。

次式で表される時不変線形離散時間システムについて

を考える。

$$G(z) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \in RH_\infty^{m \times p}(z) \quad (1)$$

ただし、 (A, B) 可制御、 (C, A) 可観測、 $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 、 $B \in \mathcal{R}^{n \times p}$ 、 $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$ とする。また、

$$\text{rank } G(z) = \begin{cases} p & (m \geq p) \\ m & (p \geq m) \end{cases} \quad (2)$$

が成り立つものと仮定する。 $G(z)$ は単位円上に不変零点を持たないが、単位円外に不変零点を持つものとする。

$m > p$ のとき、すなわち $G(z)$ の伝達関数行列が縦長のとき

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_p \end{bmatrix} \quad (B_i \in \mathcal{R}^n, i = 1, \dots, p) \quad (3)$$

$$\alpha_{ji} = \min(j | B_i^T (A^T)^{j-1} C^T \neq 0; j = 1, \dots, n) \quad (i = 1, \dots, p) \quad (4)$$

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} B_i^T (A^T)^{\alpha_{i1}-1} C^T \\ \vdots \\ B_i^T (A^T)^{\alpha_{ip}-1} C^T \end{bmatrix} \quad (5)$$

としたとき、

$$\text{rank } \Phi_i = p \quad (6)$$

が成り立つと仮定する。

また $m < p$ のとき、すなわち $G(z)$ の伝達関数行列が横長のとき

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} \quad (C_i \in \mathcal{R}^{1 \times n}, i = 1, \dots, m) \quad (7)$$

$$\alpha_{ri} = \min(j | C_i A^{j-1} B \neq 0; j = 1, \dots, n) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (8)$$

$$\Phi_r = \begin{bmatrix} C_1 A^{\alpha_{r1}-1} B \\ \vdots \\ C_m A^{\alpha_{rm}-1} B \end{bmatrix} \quad (9)$$

としたとき、

$$\text{rank } \Phi_r = m \quad (10)$$

が成り立つと仮定する。 $m = p$ のときには、(6)式、(10)式のどちらかが成り立つものと仮定する。

$m \geq p$ のとき,

$$\hat{G}(z)G(z) = G_K(z)Q_I(z) \quad (11)$$

を満たす $\hat{G}(z) \in RH_\infty$ を安定な遅れ型左逆システムという。ここで $G_K(z) \in RH^{p \times p}_\infty(z)$ は $G_K^T(z^{-1})G_K(z) = I_p$ を満足するインナー関数である。 $Q_I(z)$ は

$$Q_I(z) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{z^{\alpha_{I1}}} \cdots \frac{1}{z^{\alpha_{Ip}}} \right\} \quad (12)$$

である。

また、 $p > m$ のとき,

$$G(z)\hat{G}(z) = Q_r(z)G_K(z) \quad (13)$$

を満たす $\hat{G}(z)$ を安定な遅れ型右逆システムという。 $Q_r(z)$ は

$$Q_r(z) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{z^{\alpha_{r1}}} \cdots \frac{1}{z^{\alpha_{rm}}} \right\} \quad (14)$$

である。

参考文献⁽¹²⁾では、安定な遅れ型逆システムの状態空間上での構成法が提案されている。しかし、制御対象と安定な遅れ型逆システムの直列結合系が必ずしも対角な実有理関数行列になるとは限らなかった。本稿で考える問題は、(11)式を満足し、(11)式を対角な実有理関数行列にする安定な遅れ型左逆システム $\hat{G}(z)$ と、(13)式を満足し、(13)式を対角な実有理関数行列にする安定な遅れ型右逆システム $\hat{G}(z)$ の設計法を状態空間法上で与えることである。

3. 安定な遅れ型左逆システムの設計方法

ここでは、(11)式を満足し、(11)式を対角な実有理関数行列にする安定な遅れ型左逆システム $\hat{G}(z)$ の設計方法のアイデアを簡単に説明する。

参考文献⁽¹²⁾から、(6)式を満足するという仮定のもとでは、

$$G_0(z)G(z) = Q_I(z) \quad (15)$$

を満足するバイプロパーな $G_0(z) \in R^{p \times m}(z)$

$$G_0(z) = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

が存在する。ただし、 $A_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B_0 \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $C_0 \in \mathcal{R}^{p \times n}$, $D_0 \in \mathcal{R}^{p \times m}$ であり、

$$\text{rank } D_0 = p \quad (17)$$

を満足する。 $G_0(z)$ は、その極に、 $G(z)$ の不変零点を含み、 $G_0(z)$ が単位円外に不変零点を持つと、 $G_0(z)$

は不安定となる。また、 $G(z)$ が安定という仮定から、 $G_0(z)$ の不変零点が、すべて単位円内に存在するように $G_0(z)$ を選ぶことができる。そこで、 $G_0(z)$ は (15) 式を満足し、不変零点はすべて単位円内に存在するように選ばれるものとする。

$G_0(z)$ を

$$G_0(z) = \begin{bmatrix} G_{01}(z) \\ \vdots \\ G_{0p}(z) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$(G_{0i}(z) \in \mathcal{R}^{1 \times m}(z), i = 1, \dots, p)$$

のように行ごとに分解する。 $G_{0i}(z) (i = 1, \dots, p)$ の最小実現を

$$G_{0i}(z) = \begin{bmatrix} A_{0i} & B_{0i} \\ C_{0i} & D_{0i} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, p) \quad (19)$$

とおく。ただし、 $A_{0i} \in \mathcal{R}^{n_i \times n_i}$, $B_{0i} \in \mathcal{R}^{n_i \times m}$, $C_{0i} \in \mathcal{R}^{1 \times n_i}$, $D_{0i} \in \mathcal{R}^{1 \times m}$ である。

ここで、 $A_{0i} - K_i C_{0i}$ を安定にする $K_i \in \mathcal{R}^{n_i}$ を用いると、

$$\begin{aligned} & C_{0i}(zI - A_{0i} + K_i C_{0i})^{-1}(B_{0i} - K_i D_{0i}) + D_{0i} \\ &= \left\{ 1 + C_{0i}(zI - A_{0i})^{-1} K_i \right\}^{-1} \\ & \quad \left\{ C_{0i}(zI - A_{0i})^{-1} B_{0i} + D_{0i} \right\} \\ &= \left\{ 1 + C_{0i}(zI - A_{0i})^{-1} K_i \right\}^{-1} G_{0i}(z) \end{aligned} \quad (20)$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} G_K(z) &= \text{diag} \left[\left\{ 1 + C_{01}(zI - A_{01})^{-1} K_1 \right\}^{-1} \cdots \right. \\ & \quad \left. \left\{ 1 + C_{0p}(zI - A_{0p})^{-1} K_p \right\}^{-1} \right] T \\ &= \begin{bmatrix} A_{01} - K_1 C_{01} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{0p} - K_p C_{0p} \\ -C_{01} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -C_{0p} \\ K_1 T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_p T_p \\ T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

とおく。ただし、 $T \in \mathcal{R}^{p \times p}$ は

$$T = \text{diag} \{T_1 \cdots T_p\} \quad (22)$$

$$(T_i \in \mathcal{R})$$

である。このとき (20) 式から

$$\hat{G}(z) = G_K(z)G_0(z) \quad (23)$$

は安定となる。あとで示すが、 $G_K(z)$ がインナー関数となるように $K_i (i=1, \dots, p)$, $T_i (i=1, \dots, p)$ を設計することができる。 $G_K(z)$ をインナー関数とする K_i , T_i を用いると

$$\begin{aligned} \hat{G}(z)G(z) &= G_K(z)G_0(z)G(z) \\ &= G_K(z)Q_l(z) \end{aligned} \quad (24)$$

が成り立つ。 $Q_l(z)$ と $G_K(z)$ がともに対角な実有理関数行列であるので、 $\hat{G}(z)G(z)$ は対角な実有理関数行列となる。以上の方法を用いると、(11) 式を満足し、 $\hat{G}(z)G(z)$ を対角な実有理関数行列にする安定な遅れ型左逆システム $\hat{G}(z)$ が設計できる。

4. 状態空間表現での構成

ここでは、3. で述べたアイデアを用いて (11) 式を満足し、(11) 式を対角な実有理関数行列にする安定な遅れ型左逆システム $\hat{G}(z)$ の状態空間上での構成法を述べる。

まず、(15) 式を満足する $G_0(z)$ の状態空間表現を与える。(6) 式が成り立つという仮定のもとでは、参考文献⁽¹²⁾から、 $G_0(z)$ の状態空間表現は

$$G_0(z) = \left[\begin{array}{c|c} A - \Psi_l \Phi_l^T C & -\Psi_l \Phi_l^T \\ \hline \Phi_l^T C & \Phi_l^T \end{array} \right] \quad (25)$$

で与えられる。ここで、 Ψ_l , Φ_l は

$$\Psi_l = \begin{bmatrix} A^{\alpha_{l1}} B_1 & \cdots & A^{\alpha_{lp}} B_p \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\Phi_l \Phi_l^T = I_p \quad (27)$$

であり、 $\alpha_{li} (i=1, \dots, p)$, Φ_l は、それぞれ (4) 式、(5) 式である。

(21) 式の $G_K(z)$ をインナー関数とする K_i と T_i の設計に関して、つぎの定理が成り立つ。

定理 1 リッカチ方程式

$$A_{0i} X_i (I + C_{0i}^T C_{0i} X_i)^{-1} A_{0i}^T - X_i = 0 \quad (28)$$

の唯一の安定化解 $X_i \geq 0$ が存在する。 X_i を用いて

$$S_i = I + C_{0i} X_i C_{0i}^T \quad (29)$$

とおき、 K_i , T_i をそれぞれ

$$K_i = A_{0i} X_i C_{0i}^T S_i^{-T} \quad (30)$$

$$T_i = S_i^{-\frac{1}{2}T} \quad (31)$$

とすると $G_K(z)$ はインナー関数となる。

証明に必要な補題を以下にまとめる。

補題 1 システム $G_u(z) = \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & D_u \end{array} \right]$ に対し、 (A_u, B_u) 可安定、すべての $\theta \in [0, 2\pi]$ に対して $\left[\begin{array}{c|c} A_u - e^{j\theta} I & B_u \\ \hline C_u & D_u \end{array} \right]$ が列フルランク、 D_u は列フルランクであると仮定する。このとき、 $N(z)$ がインナー関数となるような既約分解 $G_u(z) = \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & D_u \end{array} \right] = N(z)M^{-1}(z)$ が存在する。ここで、 $M(z)$, $N(z)$ は、

$$\begin{bmatrix} M(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_u + B_u F & B_u S^{-\frac{1}{2}} \\ \hline F & S^{-\frac{1}{2}} \\ C_u + D_u F & D_u S^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right] \quad (32)$$

で表される。ただし、(32) 式の S , F は

$$S = D_u^T D_u + B_u^T X B_u \quad (33)$$

$$F = -S^{-1} (B_u^T X A_u + D_u^T C_u) \quad (34)$$

であり、(33), (34) 式の $X = X^T \geq 0$ は

$$\begin{aligned} A_D^T X (I + B_u (D_u^T D_u)^{-1} B_u^T X)^{-1} A_D \\ - X + C_u^T D_{u\perp} D_{u\perp}^T C_u = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$A_D = A_u - B_u (D_u^T D_u)^{-1} D_u^T C_u \quad (36)$$

の唯一の安定化解である。

上記の補題 1 を用いて定理 1 を証明する。

証明 1 (22) 式の T が対角行列であることから、(21) 式の $G_K(z)$ は、

$$G_K(z) = G_K^T(z) \quad (37)$$

を満足する。したがって、 $T_i \{1 + C_{0i}(zI - A_{0i})^{-1} K_i\}^{-T}$ ($i=1, \dots, p$) がインナー関数であるならば、 $G_K(z)$ はインナー関数である。そこで、 K_i を (30) 式、 T_i を (31) 式で与えたとき、 $T_i \{1 + C_{0i}(zI - A_{0i})^{-1} K_i\}^{-T}$ ($i=1, \dots, p$) がインナー関数であることを示す。

システム $\left[\begin{array}{c|c} A_{0i}^T & C_{0i}^T \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$ を

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{0i}^T & C_{0i}^T \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = N_i(z)M_i^{-1}(z) \quad (38)$$

のようにインナー関数 $N_i(z)$ と $M_i(z)$ に分解したとき、インナー関数 $N_i(z)$ が

$$N_i(z) = T_i \{1 + C_{0i}(zI - A_{0i})^{-1}K_i\}^{-T} \quad (39)$$

を満足することを示す。 A_{0i}^T の固有値がすべて単位円内にあるという仮定から、 (A_{0i}^T, C_{0i}^T) は可安定である。

また、システム $\begin{bmatrix} A_{0i}^T & C_{0i}^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の不変零点は、 A_{0i}^T の固有値と一致し、 A_{0i}^T のすべての固有値は単位円内にあるという仮定から、すべての $\theta \in [0, 2\pi]$ に対して $\begin{bmatrix} A_{0i}^T - e^{j\theta}I & C_{0i}^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ が列フルランクとなる。したがって、補題 1 から、システム $\begin{bmatrix} A_{0i}^T & C_{0i}^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ に対するリッ

カチ方程式 (35) 式は、唯一の安定化解を持つ。簡単な計算から、システム $\begin{bmatrix} A_{0i}^T & C_{0i}^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ に対するリッカチ方程式 (35) 式は、(28) 式で表される。

システム $\begin{bmatrix} A_{0i}^T & C_{0i}^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ に補題 1 を適用すると、システム $\begin{bmatrix} A_{0i}^T & C_{0i}^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のインナー関数は

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{0i}^T + C_{0i}^T F_i & C_{0i}^T S_i^{-\frac{1}{2}} \\ \hline F_i & S_i^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right] \quad (40)$$

と記述される。ただし、

$$F_i = -S_i^{-1}C_{0i}X_iA_{0i}^T \quad (41)$$

$$S_i = 1 + C_{0i}X_iC_{0i}^T \quad (42)$$

であり、 X_i は (28) 式の唯一の安定化解である。(30) 式と (31) 式から、(40) 式は

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} A_{0i}^T + C_{0i}^T F_i & C_{0i}^T S_i^{-\frac{1}{2}} \\ \hline F_i & S_i^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right] \\ &= \{1 + C_{0i}(zI - A_{0i})^{-1}K_i\}^{-T} T_i \end{aligned} \quad (43)$$

と書き換えられる。以上のことから、 $T_i \{1 + C_{0i}(zI - A_{0i})^{-1}K_i\}^{-T}$ はインナー関数であることが示された。

以上のことから証明された。

(11) 式を満足し、(11) 式を対角な実有理関数行列とする安定な遅れ型逆システム $\hat{G}(z)$ の状態空間表現は、(21)、(25) 式を用いて、(23) 式から

$$\begin{aligned} \hat{G}(z) &= \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} A_k & B_k \hat{\Phi}_i^T C & B_k \hat{\Phi}_i^T & \\ 0 & A - \Psi_i \hat{\Phi}_i^T C & -\Psi_i \hat{\Phi}_i^T & \\ \hline C_k & D_k \hat{\Phi}_i^T C & D_k \hat{\Phi}_i^T & \end{array} \right] \quad (44)$$

で表される。

注意 1 3., 4. で述べた方法の双対問題を考えることにより、安定な遅れ型左逆システムの設計法と同様の方法で、(13) 式を満足し、(13) 式を対角な実有理関数行列にする安定な遅れ型右逆システム $\hat{G}(z)$ を求めることができる。したがって、(13) 式を満足し、(13) 式を対角な実有理関数行列にする安定な遅れ型右逆システム $\hat{G}(z)$ を設計する問題においては、新たな議論をする必要がないことに注意する。

5. 数 値 例

ここでは数値例を示し、参考文献⁽¹²⁾の設計法を用いて安定な遅れ型逆システムを求めた場合、安定な遅れ型逆システムとの直列結合系が対角な実有理関数行列にならないシステムに対し、提案方法を用いると直列結合系が対角な実有理関数行列となることを検証する。

次式で表される 2 入力 2 出力のシステム $G(z)$ を考える。

$$\begin{aligned} G(z) &= \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & z-4 & & \\ \hline \frac{(z+0.25)(z+0.5)}{6} & \frac{(z+0.25)(z+0.5)}{z-2} & & \\ \hline \frac{(z+0.25)(z+0.5)}{(z+0.25)(z+0.5)} & \frac{(z+0.25)(z+0.5)}{(z+0.25)(z+0.5)} & & \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc|cc} -0.25 & 0 & 0 & 0 & 12 & -17 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0 & 24 & -9 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & -12 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

$G(z)$ は $(-0.25, 0)$, $(-0.25, 0)$, $(-0.5, 0)$, $(-0.5, 0)$ に極を持つため安定で、 $(6, 0)$ 点に不変零点を持つ。このシステム $G(z)$ に対して、(11) 式を満足する安定な遅れ型左逆システム $\hat{G}(z)$ を構成することを考える。なお、(45) 式で表される $G(z)$ に対して、参考文献⁽¹²⁾の方法を用いて安定な遅れ型逆システムを設計すると、(11) 式は対角な実有理関数行列とはならないことに注意する。

(4) 式と

$$B_1^T C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$B_1^T A^T C^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$B_2^T C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

が成り立つことから, $\alpha_{l1} = 2$, $\alpha_{l2} = 1$ となる. (5) 式, (26) 式から, Φ_l , Ψ_l は, それぞれ

$$\Phi_l = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\Psi_l = \begin{bmatrix} 0.75 & 4.25 \\ 1.5 & 2.25 \\ -3 & -9 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad (50)$$

と求められる. Φ_l は正則であるので (27) 式を満足する $\hat{\Phi}_l$ があり, 次式はこれを満足する.

$$\hat{\Phi}_l = \begin{bmatrix} -0.3333 & 2 \\ 0.3333 & -1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

(25) 式から (15) 式を満足する $G_0(z)$ は

$$G_0(z) = \begin{bmatrix} -8.5 & 4 & -8.25 \\ -4 & 1.5 & -4 \\ 17 & -8 & 16.5 \\ 8 & -3 & 8 \\ \hline -0.3333 & 0.3333 & -0.3333 \\ 2 & -1 & 2 \\ \hline 4 & -8.25 & 4 \\ 1.75 & -4 & 1.75 \\ -8 & 17 & -8 \\ -3.5 & 8 & -3 \\ \hline 0.3333 & -0.3333 & 0.3333 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

で与えられる. $G_0(z)$ を (18) 式とおき, $G_{0i}(z)$ の最小実現 (19) 式を求め, (28) 式のリッカチ方程式を解く. その唯一の安定化解 X_i を用い, (30) 式から, K_1 , K_2 をそれぞれ

$$K_1 = [-22.3806 \quad 6.108 \quad -9.4113]^T \quad (53)$$

$$K_2 = [5.766 \quad -0.884]^T \quad (54)$$

とし, (22), (31) 式から T を

$$T = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0 \\ 0 & 0.1667 \end{bmatrix} \quad (55)$$

とする. このとき, (21) 式から, $G_K(z)$ は

$$G_K(z) = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0 & 25.0354 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0 & -5.8333 \\ -0.233 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0 \\ 0 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{0.1667z-1}{z-0.1667} & 0 \\ 0 & \frac{0.1667z-1}{z-0.1667} \end{bmatrix} \quad (56)$$

と求められる. $G_K(z)$ は安定で $G_K^T(z^{-1})G_K(z) = I_2$ が成り立つので対角なインナー関数であることが確認できる.

(23) 式から, システム $G(z)$ に対する安定な遅れ型左逆システム $\hat{G}(z)$ の状態空間表現は

$$\hat{G}(z) = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.1991 & 0.0898 & -0.115 \\ 0 & 0.0741 & -0.0354 & -0.1962 \\ 0 & -0.43 & -0.034 & 0.5101 \\ 0 & -0.499 & -0.2168 & 0.1266 \\ \hline 0.0221 & 0.0329 & -0.2402 & 0.0427 \\ 1 & 0.3333 & 0.2603 & -0.2212 \\ \hline -0.1061 & 0.1834 & -0.0759 \\ -0.2752 & 0.2612 & -0.1926 \\ 1.2124 & -0.286 & 0.9096 \\ 1.1222 & -0.4954 & 0.9017 \\ \hline 0 & 0 & 0.2236 \\ \hline 0.0745 & -0.0556 & 0.0556 \\ -0.2236 & 0.3333 & -0.1667 \end{bmatrix} \quad (57)$$

で与えられる. $\hat{G}(z)$ の極は $(0,0)$, $(0,0)$, $(0,0)$, $(0.1667,0)$, $(0.1667,0)$ であるので, すべての極が単位円内に存在し, 安定であることが確認される. 簡単な計算から, $\hat{G}(z)G(z)$ は

$$\hat{G}(z)G(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.1667z-1}{z^2(z-0.1667)} & 0 \\ 0 & \frac{0.1667z-1}{z(z-0.1667)} \end{bmatrix} \quad (58)$$

となるので, (11) 式を満足し, (11) 式を対角な実有理関数行列とする安定な遅れ型左逆システム $\hat{G}(z)$ が設計できたことが確認される.

6. あ と が き

本稿では、非最小位相系に対して、与えられたシステムとその逆システムの直列結合系が対角な実有理関数行列となるような安定な遅れ型逆システムの構成法を状態空間上で与えた。参考文献⁽¹²⁾の設計法では直列結合系が対角な実有理関数行列にならないシステムに対し、提案方法を用いると直列結合系が対角な実有理関数行列となることを数値例により検証した。詳細は述べないが、本稿で提案した遅れ型逆システムは、非最小位相離散時間系に対する非干渉化内部モデル制御系、すなわち入出力特性が非干渉化された内部モデル制御系の設計に応用できる。

末筆ながら、筆頭著者が日頃ご指導賜ります山形大学渡部慶二教授、大阪大学大学院池田雅夫教授、大阪大学大学院太田快人教授に深く感謝いたします。本研究の一部は、笹川科学研究助成の援助を受けた。ここに記し、感謝の意を表したい。

文 献

- (1) L. M. Silverman, H. J. Payne, *Input-Output Structure of Linear Systems with Application to the Decoupling Problem*, "SIAM J. Control", Vol. 9, no. 2, (1971) pp. 199-233
- (2) L. M. Moore, L. M. Silverman, *Model Matching by State Feedback and Dynamic Compensation*, "IEEE Transactions on Automatic Control", Vol. AC-17, No. 4, (1972) pp. 491-479
- (3) 吉川, 杉江, 高周波遮断逆システムとそのサーボ系への応用, "計測自動制御学会論文集", Vol.18, No.8, (1982), pp.792-799
- (4) L. M. Silverman, *Inversion of Multivariable Linear Systems*, "IEEE Trans. ", Vol. AC-14, No. 3, (1969) pp. 270-276
- (5) M. K. Sain, J. L. Massey, *Invertibility of Linear Time-Invariant Dynamical Systems*, "IEEE Trans. ", Vol. AC-14, No. 2, (1969) pp. 141-149
- (6) 山田, 渡部, 低域通過逆システムの状態空間法での構成, "計測自動制御学会論文集", Vol.28, No. 8, (1992), pp.923-930
- (7) 山田, 渡部, 安定な低域通過型逆システムの状態空間法による構成法, "計測自動制御学会論文集", Vol.32, No.6, (1996), pp.862-870
- (8) 山田, 渡部, 土屋, 金子, 逆システムを用いた繰返し制御系の設計 "計測自動制御学会論文集", Vol.29, No.11, (1993), pp.1311-1319
- (9) K. Yamada, K. Watanabe, *Robust Control Design for Repetitive Control Systems with Filtered Inverse*, "Proc. First Asian Control Conference", (1994), pp. 243-246
- (10) 不破, 成清, ノルム評価を用いた逆モデルの構成とその応用, "電気学会論文誌", Vol.117C, No.6, (1997), pp.720-726
- (11) 不破, 成清, 舟橋, 高域遮断型逆モデルの構成とモデルフィードバック形制御系への応用, "電気学会論文誌", Vol.119-C, No.12, (1999), pp.1444-1453
- (12) 山田, 木下, 菊地, 真にプロパーな離散時間系に対する遅れ型逆システムの設計法, "日本機械学会論文集 C編", Vol. 69-682, (2003), pp.1603-1610
- (13) M. Morari, E. Zafriou, "Robust Process Control", Prentice Hall, (1989)
- (14) E. G. Gilbert, *The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback*, "SIAM J. Control", Vol. 7, No. 1, (1969), pp. 51-63
- (15) K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, (1996)
- (16) T. Sugie, T. Yoshikawa, *General Solution of Robust Tracking Problem in Two-Degree-of-Freedom Control Systems*, "IEEE Trans.", Vol. AC-31, (1986), pp. 552-554