スキー板の弾性パラメータの同定に関する研究*

細川 健治^{*1}, 佐藤 悠有^{*2}, 坂田 敏行^{*3}

Study on Identification of Elastic Parameters for Skis

Kenji HOSOKAWA^{*4}, Yu SATO and Toshiyuki SAKATA^{**} Department of Mechanical Engineering, Chubu University,
1200 Matsumotocho, Kasugai-shi, Aichi, 487-8501 Japan

The elastic parameters of skis are essential for simulation on skiing. Generally, the elastic parameters of skis have not been reported. Also, the elastic parameters of skis are difficult to determine by either theoretical and experimental approach. Therefore, an inverse analysis method to identify equivalent elastic parameters of skis is very important. In the identification method, mainly, the experimental modal analysis technique, the finite element method and the sensitivity analysis method are used. First, by applying the experimental modal analysis technique to a ski with free boundary conditions, natural frequencies and mode shapes are obtained. Secondly, from the obtained natural frequencies and mode shapes, the equivalent elastic parameters of the ski are identified numerically. Finally, to justify the application of this approach, the bending stiffness and twisting stiffness in longitudinal direction calculated by the obtained equivalent elastic parameters of the ski are compared with those obtained by the other experimental method.

Key Words: Free Vibration, Inverse Problem, Identification, Elastic Parameters, Finite Element Method, Experimental Modal Analysis, Ski

1. 結 言

毎年、多種多様なスキー板が市販されているが、スキー板の設計開発は主に設計者の経験や実際に滑走試験を行った滑走者の主観に頼っているのが現状であり、多くの時間とコストがかかっている。その原因の一つとしてはスキー板の形状や機械特性が滑走性能にどのような影響を及ぼすのかが力学的に明確にされていないことである。そこで、スキーヤの特性、スキー板の特性および雪面の特性が滑走性能に及ぼす影響を力学的に考慮することのできる設計法が提案されれば設計開発を行う上で有用であると考え、著者の一人は文献(1)に示すスキー操作を考慮したスキー板の設計法を提案している。この設計法では、スキー板の曲げ変形を考慮したスキーターンのシミュレーションが基となっている⁽²⁾。このような、スキー板の曲げ変形を考慮したスキーターンのシミュレーションを行う場合、スキー板の機械特性(弾性パラメータ)は重要となる。しかしながら、スキー板は金属のような単一材料

とは異なり異方性を有する複合材料が積層されているため、弾性パラメータを決定するのは非常に難しい。

近年、振動特性を利用した弾性パラメータの同定法が提案されている^{(3)~(6)}。松本らは、積層板⁽³⁾およびハニカムサンドウィッチ板⁽⁴⁾の弾性パラメータを同定し、著者の一人と松本は、FRP 積層円筒⁽⁵⁾およびFRP 積層偏平シェル⁽⁶⁾の弾性パラメータを同定した。上記の例はすべて同定対象が基本的な構造部材であり、実際の製品に適用した例は著者の知る限り報告されていない。

本研究では、スキー板の固有振動数と振動モードを用いて、有限要素法による固有値解析の結果からスキー板の弾性パラメータを求める同定法を提案する。次に、この同定法のスキー板への適用性を明らかにするため、同定対象のスキー板と異なる特性を有するスキー板の弾性パラメータを初期値として同定を行う。さらに、同定された弾性パラメータを用いて計算されたスキー板の長手方向の曲げ剛性分布およびねじり剛性分布により同定法の適用性を検討する。

2. 同 定 手 法

提案する同定手法は、主に有限要素法と逆問題解析法から成る。有限要素法による固有値解析では不均質

* 原稿受付 2003 年 5 月 12 日。

^{*1} 正員, 中部大学工学部 (〒487-8501 春日井市松本町 1200)。^{*2} 学生員, 中部大学大学院生。^{*3} 正員, 中部大学工学部。

E-mail: hosokawa@isc.chubu.ac.jp

な構造物に対応したソリッド要素を用いて解析できるようにモデル化を行っている。また逆問題解析法については感度解析法を用いている。

2・1 同定方法 図1に提案する同定法の概要を示す。図1に示すように、提案する同定法は有限要素解析法(NASTRAN)、実験的モーダル解析法(Star system)、3D-CADソフト(Solid works)、逆問題解析法から成る。まず、伝達関数(アクセルランス)を測定するために、図2に示すように同定対象のスキー板に加速度センサを取付け、インパルスフォースハンマで加振する。用いた加速度センサの質量は4.8gで、境界条件は自由とした。この境界条件を満足させるために、スキー板を細い糸で天井からつるした。加振実験より得られた伝達関数に実験的モーダル解析ソフトであるStar systemを適用し、固有振動数を求め、これを観測値とした。次に、三次元CADソフトのSolid worksによって同定対象のスキー板の幾何学形状を描いた後、有限要素解析ソフトであるNASTRANに取り込み、材料特性および拘束条件を考慮して解析モデルを作成する。最後に作成した解析モデルと実験的モーダル解析によって求めた固有振動数および振動モードを用いて逆問題解析法によりスキー板の弾性パラメータの同定を行う。

2・2 逆問題解析法 提案する同定法では、逆問題解析法として感度解析法を用いる。弾性パラメータの変化量に対する固有振動数の変化量を表す感度マトリックス A の各成分を次式により求める。

$$A_{ji} = \frac{\Delta f_j}{\Delta e_i} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで Δf_j は、 i 番目の弾性パラメータの変化量を Δe_i としたときの j 次の固有振動数の変化量である。実験で求めた固有振動数を観測値とし、解析による固

有振動数を観測値に一致させるために必要なパラメータの変更量ベクトル ΔE は、感度マトリックス A の逆マトリックス A^+ および固有振動数の観測値との差のベクトル ΔF を用いて、

$$\Delta E = \alpha A^+ \Delta F \quad \dots\dots\dots (2)$$

として求められる。ここで、 α は発散を防ぐための修正係数で1以下の値を用いて収束計算を行う。一般に、感度マトリックス A は正方マトリックスではないため、この感度マトリックス A の逆マトリックス A^+ を求めるのは非常に困難である。そこで、この逆マトリックス A^+ を次に示す特異値分解によるMoore-Penroseの一般逆マトリックスを用い、NUMPACによって求める。 A が m 行 n 列であるとき適当な直交マトリックス U, V を選ぶと、 A の逆マトリックス A^+ を式(3)のように分解することができる。

$$A^+ = VB^+U^T \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 U および V はそれぞれ m 行 m 列、 n 行 n 列のマトリックスであり、 B^+ は m 行 n 列の対角マトリックス B の一般逆マトリックスである。すなわち、

$$B^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$\lambda_k (k=1, 2, \dots, n)$: Singular value of A

また異方性パラメータの同定過程において、弾性パラメータの初期値によっては、実験により測定した振動モードの順序と解析による振動モードの順序が異なるという問題が生じる場合がある。これに対しては

Fig.1 Flow chart of Identification

Fig.2 Free vibration test of ski

MAC(Modal Assurance Criterion)を用いて、振動モードを対応づけることにより適切な同定を可能とする。

本研究で提案した感度解析法の流れを図3に示す。まず解析モデルに入力した弾性パラメータの初期値を微小変化させながら固有値解析を行い、式(1)における変化量 Δe_i および Δf_j を求める。次に解析と実験により得られた振動モードの対応づけを行った後、感度マトリックス A_{ji} を作成する。さらに特異値分解を用いて感度マトリックス A_{ji} の一般逆マトリックス A_{ij} を求め、弾性パラメータの同定を行う。最後に同定された弾性パラメータを用いて固有値解析を行い、その結果得られた固有振動数が観測値に収束していれば同定を終了し、そうでなければ収束するまで同定解析を繰り返す。

3. 同定結果

提案する同定法のスキー板への適用性を検討するためにスキー板の弾性パラメータの同定を行った。スキー板は複合構造部材であり、方向により材料特性が異なるため、材料特性を二次元直交異方性とした。長手方向と幅方向の縦弾性係数 E_1, E_2 、およびせん断弾性係数 G_{12} の三つの弾性パラメータを同定した。ポアソン比 ν_{12} は固有振動数に及ぼす影響が小さいと考え、同定せず 0.4 と仮定した。長手方向の縦弾性係数 E_1

の同定はスキー板の1次～5次までの曲げの固有振動数に注目し、また、せん断弾性係数 G_{12} の同定はスキー板の1次～4次までのねじれの固有振動数に注目して、すべての固有振動数において観測値との誤差が6%以下になったときに上記の弾性パラメータが収束したと判断した。有限要素法による固有値解析において、要素特性はソリッド要素とし、加速度センサの質量は、スキー板の質量に比べ非常に小さいので、考慮しないことにした。

3・1 同定用スキー板と離散化方法 提案する同定法をカービングモデルであるスキー板 A に適用した。図4にスキー板 A の幾何学形状を示す。伝達関数を測定するために、スキー板 A を長手方向に17分割、幅方向に3分割した合計53の応答点を使用した。加速度センサは振動の節とならない応答点の一つに取付けた。また、有限要素法による固有値解析においては、スキー板 A を要素数1328、節点数2974に分割した。密度は実際に測定した質量を近似的に求めた体積で割ることにより算出した 1206 kg/m^3 を用いた。また、同定を行う際に入力する弾性パラメータの初期値は、同定対象のスキー板とは異なる特性を有するジャイアントスラロームモデルのスキー板 B あるいは C の弾性パラメータとした。

3・2 スキー板の固有振動数比較 初期値としてスキー板 B の弾性パラメータを用いてスキー板 A の弾性パラメータを同定した。この同定した弾性パラメータを用いて計算した1次～5次までの曲げの固有振動数を表1に、1次～4次までのねじれの固有振動数を表2に表す。また、比較のために実験的モード解析法により求めたスキー板 A の曲げおよびねじれの固有振動数を実験値として併せて示す。表1および表2から明らかに曲げの固有振動数の数値計算結果と実験結果の誤差は最大で4.96%であり、ねじれの

Fig. 3 Flow chart of sensitivity analysis method

Fig. 4 Geometrical configuration of ski A

Table 1 The bending natural frequencies estimated by the identified equivalent elastic parameters (Initial data: the equivalent elastic parameters of ski B)

Modal order	Numerical natural frequencies (Hz)	Experimental natural frequencies (Hz)	Error(%)
1st	18.37	17.5	4.74
2nd	39.58	38.3	3.23
3rd	71.66	69.8	2.60
4th	114.7	111	3.23
5th	171.5	163	4.96

Table 2 The twisting natural frequencies estimated by the identified equivalent elastic parameters (Initial data: the equivalent elastic parameters of ski B)

Modal order	Numerical natural frequencies (Hz)	Experimental natural frequencies (Hz)	Error(%)
1st	94.48	92.5	2.10
2nd	125.0	120	4.00
3rd	194.6	191	1.85
4th	287.0	280	2.44

Table 3 The bending natural frequencies estimated by the identified equivalent elastic parameters (Initial data: the equivalent elastic parameters of ski C)

Modal order	Numerical natural frequencies (Hz)	Experimental natural frequencies (Hz)	Error(%)
1st	18.33	17.5	4.53
2nd	39.89	38.3	3.99
3rd	72.73	69.8	4.03
4th	116.3	111	4.56
5th	171.8	163	5.12

Table 4 The twisting natural frequencies estimated by the identified equivalent elastic parameters (Initial data: the equivalent elastic parameters of ski C)

Modal order	Numerical natural frequencies (Hz)	Experimental natural frequencies (Hz)	Error(%)
1st	94.9	92.5	2.53
2nd	123.5	120	2.83
3rd	193.0	191	1.04
4th	285.9	280	2.06

固有振動数の数値計算結果と実験結果の誤差も最大で4.00%とすべて収束判定の誤差範囲6%以下に収まっている。

次に、初期値としてスキー板Cの弾性パラメータを用いてスキー板Aの弾性パラメータを同定した。この同定した弾性パラメータを用いて計算した1次～5次までの曲げの固有振動数を表3に、1次～4次までのねじれの固有振動数を表4に表す。また、比較のために実験的モーダル解析法により求めたスキー板Aの曲げおよびねじれの固有振動数を実験値として併せて示す。表3および表4から明らかなように曲げの固有振動数の数値計算結果と実験結果の誤差は最大で5.12%であり、ねじれの固有振動数の数値計算結果と実験結果の誤差も最大で2.83%とすべて収束判定の誤差範囲6%以下に収まっている。また、本論文では示していないが、振動モードも大変良い一致を示している。

Fig. 5 Bending stiffness in longitudinal of ski A

Fig. 6 Twisting stiffness in longitudinal of ski A

Fig. 7 Bending experimentation

Fig. 8 Twisting experimentation

3・3 スキー板の長手方向の曲げ剛性分布比較

図5にスキー板Aの長手方向の曲げ剛性分布を表す。図中の太い実線は静的な曲げ実験により求めた長手方向の曲げ剛性分布を示す。この曲げ剛性分布は、図7に示す実験装置を用い、曲げモーメントと曲率半径を考慮して求めた⁽⁷⁾。図中の細い実線は、初期値としてスキー板Bの弾性パラメータを用いて同定した弾性パラメータより求めたスキー板Aの長手方向の曲げ剛性分布を示す。同様に、図中の点線は、初期値としてスキー板Cの弾性パラメータを用いて同定した弾性パラメータより求めたスキー板Aの長手方向の曲げ剛性分布を表す。図5より、曲げ剛性分布の数値計算結果と実験結果はシュエセント付近で誤差が多少大きい、最大誤差は5%以下であり良い一致を示していることがわかる。

3・4 スキー板の長手方向のねじり剛性分布比較

図6にスキー板Aの長手方向のねじり剛性分布を表す。図中の太い実線はねじり試験により求めた長手方向のねじり剛性分布を示す。このねじり剛性分布は図8に示す実験装置を用い、ねじりモーメントとねじり角を考慮して求めた⁽⁷⁾。図中の細い実線は、初期値としてスキー板Bの弾性パラメータを用いて同定した弾性パラメータより求めたスキー板Aの長手方向のねじり剛性分布を示す。同様に、図中の点線は、初期値としてスキー板Cの弾性パラメータを用いて同定した弾性パラメータより求めたスキー板Aの長手方向のねじり剛性分布を示す。図6より、ねじり剛性分布の数値計算結果は実験結果に比べて低い結果となったが最大誤差は10%以下であり良い結果が得られたと言える。

4. 結 論

スキー板の振動特性を利用したスキー板の弾性パラ

メータの同定法を提案した。提案した同定法の適用性を明らかにするために初期値として同定対象のスキー板とは異なる特性を有する2本のスキー板の弾性パラメータを用いて同定を行った。その結果、これら同定された弾性パラメータを用いて求めた曲げおよびねじりの固有振動数の数値計算結果と実験結果は良く一致することが明らかとなった。さらに、これら同定された弾性パラメータを用いてスキー板の長手方向の曲げ剛性分布およびねじり剛性分布をそれぞれ求めた。曲げ剛性分布およびねじり剛性分布の数値計算結果と実際に測定した結果は良い一致を示し、提案した同定法は精度の良いスキー板の弾性パラメータの同定を可能とすることが明らかとなった。

文 献

- (1) 河合茂博・加藤啓介・坂田敏行, 与えられたスキーターン特性を有するスキー板の設計法, 設計工学, 38-3 (2003), 141-148.
- (2) Sakata, T. and Ito, T., Simulation of ski turn, *The Engineering of Sport (Proc. 2nd Int. Conf. Eng. Sports)*, (1998), 361-368.
- (3) 松本金矢・座古勝・古野雅美, 有限要素法固有値解析を利用した異種積層複合材料の異方性パラメータの同定法, 機論, 62-596, C (1996), 95-100.
- (4) 松本金矢・座古勝・古野雅美・藤田知正, ハニカムサンドウィッチ板の等価弾性パラメータ同定逆問題, 機論, 63-611, C (1997), 2256-2261.
- (5) Hosokawa, K. and Matsumoto, K., Identification of Elastic Parameter for Laminated Circular Cylindrical Shells (Comparison of Numerical and Experimental Results), *JSM E Int. J.*, 45-1 (2002), 26-31.
- (6) Hosokawa, K. and Matsumoto, K., Identification of Elastic Parameter for Laminated Shallow Cylindrical Shells (Comparison of Numerical and Experimental Results), *Proc. 10th U. S.-Japan Conf. Compos. Mater.*, (2002), 551-559.
- (7) 坂田敏行・森下武志, スキー板の機械特性に関する研究, 中部大学工学部紀要, 27 (1991), 19-26.