食違い軸歯車の曲ねじれ率に関する研究*

大 竹 與 志 知^{*1}

Studies on the Curvatures of Skew Gears

Yoshichi OTAKE^{*2}^{*2} Victor Company of Japan, AV & Multimedia Company, Engineering Dept.,
3-12 Moriya-cho, Kanagawa-ku, Yokohama-shi, Kanagawa, 221-8528 Japan

In this paper curvatures of skew gears are investigated and not only interference but blood items about curvature are discussed. First, expressions of free direction curvature on the tooth surface of gears are derived by two direction curvatures on the tooth surface of gear 1. Second, space image and expressions and characteristics of many items about curvature are clarified. Finally, the method of space display of curvature are shown and examples of curvature space image of involute worm gears are shown. A feature of this paper is the new viewpoint from the expressions of free direction curvature derived by two direction curvatures of gears 1. The new viewpoint give possibility to discuss more broad and detailed space image and characteristics. For example, the theory of minimum relative curvature is clarified. It is known that small relative curvature is good to performance about wear.

Key Words: Machine Element, Gear, Skew Gears, Curvature, Relative Curvature, Interference, Wear, Involute Worm Gears

1. 緒 論

食違い軸歯車の曲率については、谷村⁽¹⁾、酒井⁽²⁾の研究がある。谷村⁽¹⁾は接触面とその上の接触線が知られたとしてすべり線および歯面の曲率を求め、接触線近傍での干渉の条件を定めた。ここでは、歯面の基本量として歯面1, 2の全曲率, 平均曲率を求め、平均曲率の差が符号をかえるとき歯面は干渉をすることを明らかにしている。酒井⁽²⁾は媒介歯車について論じその特別な場合として直接創成歯車を扱っている。ここでは、創成歯面の ∇N を用いてすべり線1, 2の曲率そして接触線垂直方向の相対曲率を求め、その符号をかえるとき歯面は接触点の近傍において第1種の干渉をすると述べている。以上のように干渉条件に至る曲率の基礎理論は確立されているが、曲ねじれ率に関するすべてが示されているわけではない。本論文は、酒井理論⁽²⁾を基に、干渉条件に限定せずより広くあるいは詳細に論じることにより、食違い軸歯車の曲ねじれ率に関する理論の若干の進展を試みるものである。

なお、ここでは歯面の曲率と測地的ねじれ率を総称して曲ねじれ率と呼ぶ。

本論文ではまず歯面1, 2および相対歯面(相対曲率を有する歯面)の任意方向の曲ねじれ率と歯面1の垂直2方向の曲ねじれ率の関係式を求める。次に、これを基に食違い軸歯車の曲ねじれ率に関する多くの項目について論じ、その空間像、関連式、性質等を明らかにする。最後に、曲ねじれ率を視覚的に得るための空間表示の方法を提案し、代表的な歯車であるインボリュートウォームギヤの諸例を示す。本論文の特徴の一つは、歯面1の垂直2方向の曲ねじれ率を変数とする任意方向の曲ねじれ率の式を新しい切り口とする点にある。これは、より広く詳細な曲ねじれ率に関する議論を可能とする。例えば、接触線垂直方向の相対曲率は小さいほど耐摩耗性に優れていることが知られているが、この相対曲率を最小とする条件を明らかにする。

2. 任意方向曲ねじれ率

図1で、歯車軸を S_1, S_2 、軸間距離を D 、軸角を β 、角速度を ω_1, ω_2 、相対角速度を ω とする。接触点 Q での歯面1の単位法線ベクトル N を実質側から外側にとり、 N を含む任意の A 平面を基準面とする。歯

* 原稿受付 2002年11月19日。

^{*1} 正員、日本ビクター(株) (☎ 221-8528 横浜市神奈川区守屋町3-12)。

E-mail: otake-yoshichi@jvc-victor.jp

面法線 N は A 上の準ピッチ点 P を通り、歯面の法曲率中心は N 上にのる⁽³⁾。準ピッチ点は相対速度が A に垂直な点である。 A を N を軸に θ_B 回転させ B 平面とする。 A, B 平面上の歯面 1 の単位接線ベクトルを e_1, e_B とし、 A, B に垂直な単位ベクトルを a, a_B とする。曲ねじれ率は法平面上の歯形を考えた場合の法曲率と測地的ねじれ率を考える。曲率は N 方向が凸の場合を正とする。図 2 は接触点 Q 近傍の無限拡大図である。 Q から歯形 1, 2 上の点 G_{12}, G_{22} への微小ベクトル dG_1, dG_2 を $ds_1 e_B, ds_2 e_C$ で表す(両者の誤差は dG_1, dG_2 に対し無限小なので略す)。なお、 dG_1, dG_2 以外のベクトルは無限に縮小して概念的に表示している。 e_C は歯形 2 方向の単位接線ベクトルであり、 G_{12}, G_{22} は微小時間 dt 後に点 Q^* で接触する。接触点での歯車 1, 2 の速度を V_1, V_2 , 相対速度を V とし、歯面 1, 2 の単位法線ベクトル N, N_2 の G_{12}, G_{22} での変化量を dN, dN_2 とする。ここで、 dN_2, e_C は酒井式⁽²⁾ より、

$$\begin{aligned} dN_2 &= dN + N \times \omega dt \\ e_C &= (e_B - K_t V) ds_1 / ds_2 \\ dN &= \nabla N \cdot dG_1 = \nabla N \cdot e_B ds_1 \\ K_t &= dt / ds_1 = -e_B \cdot T / (N \cdot q) \\ T &= \nabla N \cdot V + N \times \omega, \quad q = \omega_2 \times V_1 - \omega_1 \times V_2 \end{aligned} \quad (1)$$

上式の T は接触線に垂直な方向のベクトルである。

歯面 2 の e_C 方向の曲ねじれ率は次式で表せるが、酒井理論⁽²⁾ と異なり e_B をすべり線方向としないので $e_C \neq e_B$ である。

Fig. 1 Gears and plane A, B

Fig. 2 Vectors on the contact point

$$\begin{aligned} \kappa_{2C} &= dN_2 \cdot e_C / ds_2, \quad \tau_{2C} = dN_2 \cdot a_C / ds_2, \\ a_C &= N \times e_C \end{aligned} \quad (2)$$

この式に式(1)を代入すれば、

$$\begin{aligned} \kappa_{2C} &= (\nabla N \cdot e_B + N \times \omega K_t) \cdot e_C ds_1 / ds_2 \\ \tau_{2C} &= (\nabla N \cdot e_B + N \times \omega K_t) \cdot a_C ds_1 / ds_2 \end{aligned} \quad (3)$$

e_C が単位ベクトルである点に着目して、

$$\begin{aligned} e_C &= (e_B - K_t V) / |(e_B - K_t V)|, \\ ds_1 / ds_2 &= 1 / |(e_B - K_t V)| \end{aligned} \quad (4)$$

この式を式(3)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \kappa_{2C} &= (\nabla N \cdot e_B + N \times \omega K_t) \cdot e_C / |(e_B - K_t V)| \\ \tau_{2C} &= (\nabla N \cdot e_B + N \times \omega K_t) \cdot a_C / |(e_B - K_t V)| \end{aligned} \quad (5)$$

この式は e_B に従属する。式(4)の e_C に T 方向の単位ベクトル e_T を内積すれば、

$$|(e_B - K_t V)| = (e_B \cdot e_T - K_t V \cdot e_T) / (e_C \cdot e_T) \quad (6)$$

この式を式(4)の e_C の式に再度代入すれば、

$$e_B = K_t V + e_C (e_B \cdot e_T - K_t V \cdot e_T) / (e_C \cdot e_T) \quad (7)$$

式(5)に式(6), (7), 式(1)の K_t を代入すれば、

$$\begin{aligned} \kappa_{2C} &= (\nabla N \cdot e_C) \cdot e_C - (e_C \cdot T)^2 / (N \cdot q + V \cdot T) \\ \tau_{2C} &= (\nabla N \cdot e_C) \cdot a_C \\ &\quad - (e_C \cdot T)(a_C \cdot T) / (N \cdot q + V \cdot T) \end{aligned} \quad (8)$$

この式は e_B に従属しない。 e_C を e_B とすれば、

$$\begin{aligned} \kappa_{2B} &= (\nabla N \cdot e_B) \cdot e_B - (e_B \cdot T)^2 / (N \cdot q + V \cdot T) \\ \tau_{2B} &= (\nabla N \cdot e_B) \cdot a_B \\ &\quad - (e_B \cdot T)(a_B \cdot T) / (N \cdot q + V \cdot T) \end{aligned} \quad (9)$$

この式の第1項は歯面 1 の曲ねじれ率、第2項は相対曲ねじれ率である。歯面 1 の曲ねじれ率を κ_{1B}, τ_{1B} , 相対曲ねじれ率を κ_B, τ_B とすれば、

$$\kappa_{1B} = (\nabla N \cdot e_B) \cdot e_B, \quad \tau_{1B} = (\nabla N \cdot e_B) \cdot a_B \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{2B} &= \kappa_{1B} - (e_B \cdot T)^2 / (N \cdot q + V \cdot T) \\ \tau_{2B} &= \tau_{1B} - (e_B \cdot T)(a_B \cdot T) / (N \cdot q + V \cdot T) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \kappa_B &= - (e_B \cdot T)^2 / (N \cdot q + V \cdot T) \\ \tau_B &= - (e_B \cdot T)(a_B \cdot T) / (N \cdot q + V \cdot T) \end{aligned} \quad (12)$$

相対歯面の単位法線ベクトルを N_{12} とし、

$$\nabla N_{12} = \nabla N - TT / (N \cdot q + V \cdot T) \quad (13)$$

$$\nabla N_{12} = -TT / (N \cdot q + V \cdot T) \quad (14)$$

とすれば、式(10)~(12)より、

$$\kappa_{2B} = (\nabla N_{12} \cdot e_B) \cdot e_B, \quad \tau_{2B} = (\nabla N_{12} \cdot e_B) \cdot a_B \quad (15)$$

$$\kappa_B = (\nabla N_{12} \cdot e_B) \cdot e_B, \tau_B = (\nabla N_{12} \cdot e_B) \cdot a_B \cdots (16)$$

これは、歯面 2、相対歯面においても歯面 1 の式(10)と同様な式が成立し、 ∇N_2 , ∇N_{12} は式(13), (14)で表されることを示す。また、式(13), (14)より、

$$\nabla N_{12} = \nabla N_2 - \nabla N \cdots (17)$$

これは ∇N においても相対角速度に似た関係が成立することを示す。

歯面 1 の e_1 方向の曲ねじれ率を κ_1 , τ_1 , a 方向の曲ねじれ率を κ_{1a} , τ_{1a} とすれば、 ∇N は次式で表すことができる。

$$\nabla N = e_1(\kappa_1 e_1 + \tau_1 a) + a(\kappa_{1a} a - \tau_{1a} e_1) \cdots (18)$$

歯面 1 の曲ねじれ率の式(10)にこの式を代入すれば、

$$\begin{aligned} \kappa_{1B} &= \kappa_1(e_1 \cdot e_B)^2 + \kappa_{1a}(a \cdot e_B)^2 \\ &\quad + (\tau_1 - \tau_{1a})(a \cdot e_B)(e_1 \cdot e_B) \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta_B + \kappa_{1a} \sin^2 \theta_B \\ &\quad + (\tau_1 - \tau_{1a}) \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \tau_{1B} &= (\kappa_1 - \kappa_{1a})(e_1 \cdot e_B)(e_1 \cdot a_B) \\ &\quad + \tau_1(e_1 \cdot e_B)^2 + \tau_{1a}(a \cdot e_B)^2 \\ &= (\kappa_{1a} - \kappa_1) \cos \theta_B \sin \theta_B \\ &\quad + \tau_1 \cos^2 \theta_B + \tau_{1a} \sin^2 \theta_B \end{aligned} \cdots (19)$$

式(1)の T に式(18)を代入すれば、 T と関連式は、

$$T = (e_1 \cdot V)(\kappa_1 e_1 + \tau_1 a) + (a \cdot V)(\kappa_{1a} a - \tau_{1a} e_1) + N \times \omega \cdots (20)$$

$$\begin{aligned} e_B \cdot T &= (e_1 \cdot V)(\kappa_1 e_1 \cdot e_B + \tau_1 a \cdot e_B) \\ &\quad + (a \cdot V)(\kappa_{1a} a \cdot e_B - \tau_{1a} e_1 \cdot e_B) + (N \times \omega) \cdot e_B \\ &= (e_1 \cdot V)(\kappa_1 \cos \theta_B + \tau_1 \sin \theta_B) \\ &\quad + (a \cdot V)(\kappa_{1a} \sin \theta_B - \tau_{1a} \cos \theta_B) + (N \times \omega) \cdot e_B \\ a_B \cdot T &= (e_1 \cdot V)(\kappa_1 e_1 \cdot a_B + \tau_1 a \cdot a_B) \\ &\quad + (a \cdot V)(\kappa_{1a} a \cdot a_B - \tau_{1a} e_1 \cdot a_B) + (N \times \omega) \cdot a_B \\ &= (e_1 \cdot V)(-\kappa_1 \sin \theta_B + \tau_1 \cos \theta_B) \\ &\quad + (a \cdot V)(\kappa_{1a} \cos \theta_B + \tau_{1a} \sin \theta_B) + (N \times \omega) \cdot a_B \\ V \cdot T &= \kappa_1(e_1 \cdot V)^2 + \kappa_{1a}(a \cdot V)^2 \\ &\quad + (\tau_1 - \tau_{1a})(e_1 \cdot V)(a \cdot V) + V \cdot (N \times \omega) \end{aligned} \cdots (21)$$

式(11), (19), (21)および式(12), (21)が歯面 2 およ

び相対歯面の任意方向曲ねじれ率と歯面 1 の垂直二方向曲ねじれ率との関係式、表示式である。

次に、図 3 に示すように A 平面を接触点 Q での相対速度 V に垂直に選定する。ここでは $Q=P$ となる。 ∇N は相対速度方向の曲ねじれ率を κ_{1V} , τ_{1V} として、

$$\nabla N = e_1(\kappa_{1V} e_1 + \tau_{1V} a) + a(\kappa_{1V} a - \tau_{1V} e_1) \cdots (22)$$

歯面 1 の曲ねじれ率は、

$$\begin{aligned} \kappa_{1B} &= \kappa_{1V} \cos^2 \theta_B + \kappa_{1V} \sin^2 \theta_B \\ &\quad + (\tau_{1V} - \tau_{1V}) \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \tau_{1B} &= (\kappa_{1V} - \kappa_{1V}) \cos \theta_B \sin \theta_B \\ &\quad + \tau_{1V} \cos^2 \theta_B + \tau_{1V} \sin^2 \theta_B \end{aligned} \cdots (23)$$

A 上で、歯車軸を通る歯車中心線と P を通りこの線に垂直な歯車中心垂直線の単位ベクトルを N_C , N_{CT} とし、 ω の V 方向成分を ω' , V 垂直方向成分を ω'' とする。圧力角 ϕ は歯面法線 N と N_{CT} の角度で N_{CT} から反時計方向を正にとり、 N_{CT} と ω'' の角度を ϕ_ω とする。 ω' , ω'' のスカラー量を ω' , ω'' とすれば(以下同様)、

$$N \times \omega' = -\omega' e_1, N \times \omega'' = \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi) a \cdots (24)$$

T と関連式は、

$$T = -(V \tau_{1V} + \omega') e_1 + [V \kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] a \cdots (25)$$

$$\begin{aligned} e_B \cdot T &= -(V \tau_{1V} + \omega') \cos \theta_B \\ &\quad + [V \kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] \sin \theta_B \\ a_B \cdot T &= (V \tau_{1V} + \omega') \sin \theta_B \\ &\quad + [V \kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] \cos \theta_B \\ V \cdot T &= V^2 \kappa_{1V} + V \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi) \end{aligned} \cdots (26)$$

式(11), (23), (26)および式(12), (26)が A 平面を V に垂直に選定した場合の歯面 2 および相対歯面の任意方向曲ねじれ率と歯面 1 の垂直二方向曲ねじれ率の関係式、表示式であり、圧力角を含む式である。ここでは、これらの式を特に曲ねじれ率の第 2 表示式と呼ぶ。

3. 曲ねじれ率諸論

3.1 垂直二方向曲ねじれ率表示 3 章では 2 章で誘導した諸歯面の曲ねじれ率の式を基に論じるが、式の特徴は A 平面(曲ねじれ率を考える場合の基準面)や曲ねじれ率方向に自由度を与えた点、歯面 1 の垂直二方向曲ねじれ率で表示した点にある。これは、以下の広く詳細な曲ねじれ率に関する議論を可能とする。A 平面は必要に応じて最適な方向に設定できる。

Fig. 3 Vertical plane A to relative velocity

A 平面を相対速度に垂直に選定した曲ねじれ率の第 2 表示式では、 $V \cdot T$ の式が単純化される。歯車基準面を A 平面とする歯車基準点はその例となる。接触点軌跡線とその上の歯面法線が同一平面上にある場合は、この平面を各接触点での A 平面として統一的に選択できる。任意方向の曲ねじれ率は全方向や選定方向の曲ねじれ率を論じることを可能とする。接触点近傍でのすべての歯面 1 は垂直二方向曲ねじれ率(ねじれ率の一方は他方より定まる)で表現できる。ねじれ率零で主曲率となるが主曲率方向を異にする歯面は表せない。したがって、歯面 1 の垂直二方向曲ねじれ率による表示は、歯面 1 の影響を詳しく探るのに有効となる。なお、表示式の特徴として、歯面 2 の曲ねじれ率は歯面 1 の曲ねじれ率と T の関連式、相対歯面の曲ねじれ率は T の関連式を主要な構成要素とする。

3.2 任意方向曲ねじれ率の変数 曲率の変数の値により曲率、性能が変化する。表示式(11), (19), (21)より、歯面 2 の任意方向の曲ねじれ率を決定する要素は、相対角速度、相対速度、歯面法線方向および歯面 1 の 3 個の曲ねじれ率、 θ_B 等である。他方、A 平面を相対速度に垂直に選定した第 2 表示式(11), (23), (26)より、決定要素は接触点位置で決まる V , ω' , ω'' , ϕ_ω , および圧力角 ϕ , 相対速度方向の曲ねじれ率、同垂直方向の曲率, θ_B 等である。任意方向の相対曲ねじれ率を決定する要素は、表示式では歯面 2 と同じである。他方、第 2 表示式では、相対速度垂直方向の曲率 κ_1 に無関係となる。この性質は重要な性質である。例えばハイポイドギヤの歯車基準点での相対曲率は、圧力角一定とすれば、 $\tau_1 \tau_2$ 零で A 上基準歯形によらず一定であり、相対曲率の改善は歯形状ではできないことを意味する。接触点位置による曲ねじれ率の差は歯車形態を特徴づける。圧力角 ϕ に着目すれば圧力角の影響を解明できる。以下では歯面 1 の 3 個の曲ねじれ率を主変数として考える。

Fig. 4 Curvature curve

3.3 主曲率と曲率零方向 表示式(19)のねじれ率を零とおけば、歯面 1 の主曲率方向 θ_{B1} の次式を得る。

$$\tan \theta_{B1} = \{(\kappa_1 - \kappa_a) \pm \sqrt{[(\kappa_1 - \kappa_a)^2 - 4\tau_a\tau_1]}\} / (2\tau_a) \quad \dots\dots\dots (27)$$

$e_1 = -e_T$ とし表示式(11), (19)のねじれ率を零とおけば、歯面 2 の主曲率方向 θ_{B2} の次式を得る。

$$\tan \theta_{B2} = \{(\kappa_1 - \kappa_a + \kappa_T) \pm \sqrt{[(\kappa_1 - \kappa_a + \kappa_T)^2 - 4\tau_a\tau_1]}\} / (2\tau_a) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\kappa_T = -T^2 / (N \cdot q + V \cdot T) \quad \dots\dots\dots (29)$$

κ_T はすべり線を介して誘導された接触線垂直方向の酒井の相対曲率式⁽²⁾である。式(28)は κ_T 零で歯面 1 の式となるので、一般に歯面 1, 2 の主曲率方向は一致しないことがわかる。相対主曲率方向は T と T 垂直方向となることが知られている。曲率零方向は $e_1 = -e_T$ とし表示式(11), (19)の曲率を零とおけば、

$$\tan \theta_B = \{(\tau_1 - \tau_a) \pm \sqrt{[(\tau_1 - \tau_a)^2 - 4\kappa_a(\kappa_1 + \kappa_T)]}\} / (2\kappa_a) \quad \dots\dots\dots (30)$$

3.4 全方向曲ねじれ率 全方向の曲ねじれ率は、横軸に θ_B , 縦軸に曲ねじれ率をとる曲ねじれ率図により把握することができる。これは 2 章の式より求まる。図 4 左は歯面 1, 2 の曲率図の例である(曲線 I が歯面 1 の曲率曲線、曲線 II が歯面 2 の曲率曲線を示す)。両歯車の全方向にわたる曲率変化と相互関係が

Fig. 5 Kinds of curvature curve

見て取れる。4章の計算例はこのようすを空間的に示す。曲線の頂点の θ_B が主曲率、両曲線の接点の θ_B が接触線の位置である。各歯面の主曲率と接触線の位置は周期的に並び一般に一致しない。接触点近傍での歯面形状がだ円的か双曲的あるいは放物的かは曲率零線との関係による。歯面1で主曲率の正を凸、負を凹とし、歯面2では正を凹、負を凸とする。だ円的歯面は凸凸、凹凹、双曲的歯面は凸凹、放物的歯面は平凸、平凹の場合となる。図4右に凸凸等と曲率曲線の関係を示す。□は平を示す。

3・5 接触状況の分類 接触状況は曲率図により分類できる。図5は、点接触を含む一般歯車の分類図である。Aは歯面2の曲率曲線IIの振幅が歯面1の曲率曲線Iより大きい場合、Bは小さい場合である。各場合は2曲線の位置関係でa, b, c, dに分けられ、さらに曲率零線の位置(数字)により細かく区分される。例えば、Ab2の場合は歯面2の曲率曲線IIの振幅が大きく2曲線は相互に入り込み、歯面1は凸凸面、歯面2は平凹の柱面である。図5よりa以外点接触である。b, cの場合、歯面2を歯面法線を軸に回転させれば曲線IIは横に移動して曲線Iに接触し線接触となる。c0の場合は平凸と平凸の接触で放物的歯面同士の接触となる。凸凸と凸凸の組合せはdの場合に属すが線接触とはなり得ない。したがって、線接触の一般形はbであり、点接触のような凸凸と凸凸の組合せはない。

3・6 回転誤差と曲率 歯面法線のまわりに回転誤差があると、歯車は線接触に近い点接触歯車となる。ここで、歯面2の曲率は歯面1の曲率より大きいと干渉する。したがって、回転誤差は、歯面2の相対的な回転方向により干渉方向と非干渉方向に分けられる。図4の曲率図で曲線が離れる方向に回転可能で、逆方向は干渉を伴う。設計時に歯車基準点で非干渉方向に誤差を持つように公差を与えれば干渉を避けることができる。また、図6左のように積極的に非干渉方向に微小誤差を与えれば誤差に強く線接触に近い点接触歯車となる。歯面1, 2の主曲率方向の θ_B を θ_{B1} ,

θ_{B2} として、図6右を参照に回転方向の遊び角 $\Delta\theta_B$ を求めれば、

$$\Delta\theta_B = 2(\theta_{B1} - \theta_{B2}) \dots\dots\dots (31)$$

3・7 垂直2方向曲ねじれ率の関係式 式(19)より

歯面1の垂直2方向曲ねじれ率の関係式(32)を得る。 κ_{1Ba} , τ_{1Ba} は歯面1の a_B 方向の曲ねじれ率である。 κ_1 , κ_{1a} が主曲率の場合は従来式に一致し、曲率の式は平均曲率 H の2倍、ねじれ率の式は零となる。主曲率方向に対し $\pm$ 同角方向の曲率は等しいから、2主曲率の中央方向に対し $\pm$ 同角方向の曲率の和は下記の関係式と $=$ で結ばれる。 ± 0 の2曲率は一致し平均曲率となる。

$$\begin{aligned} \kappa_{1B} + \kappa_{1Ba} &= \kappa_1 + \kappa_{1a}, \quad \tau_{1B} + \tau_{1Ba} = \tau_1 + \tau_{1a} \\ \kappa_{1B} \cos \theta_B - \tau_{1B} \sin \theta_B &= \kappa_1 \cos \theta_B + \tau_1 \sin \theta_B \end{aligned} \dots\dots\dots (32)$$

式(11), (32)より、歯面2の垂直2方向曲ねじれ率の関係式(33)を得る。 κ_{2e} , τ_{2e} は e_1 方向、 κ_{2a} , τ_{2a} は a 方向、 κ_{2Ba} , τ_{2Ba} は a_B 方向の曲ねじれ率である。

$$\begin{aligned} \kappa_{2B} + \kappa_{2Ba} &= \kappa_1 + \kappa_{1a} + \kappa_T = \kappa_{2e} + \kappa_{2a} \\ \tau_{2B} + \tau_{2Ba} &= \tau_1 + \tau_{1a} = \tau_{2e} + \tau_{2a} \\ \kappa_{2B} \cos \theta_B - \tau_{2B} \sin \theta_B &= \kappa_{2e} \cos \theta_B + \tau_{2e} \sin \theta_B \end{aligned} \dots\dots\dots (33)$$

式(12)より求まる相対歯面の e_1 , a , e_B , a_B 方向の曲ねじれ率より、相対歯面の垂直2方向曲ねじれ率の関係式(34)を得る。 θ_{BT} は e_B と T の角度、 θ_{1T} は e_1 と T の角度、 κ_e , τ_e は e_1 方向、 κ_a , τ_a は a 方向、 κ_{Ba} , τ_{Ba} は a_B 方向の曲ねじれ率である。

$$\begin{aligned} \kappa_B + \kappa_{Ba} &= \kappa_e + \kappa_a = \kappa_T, \quad \tau_B + \tau_{Ba} = \tau_e + \tau_a = 0 \\ \kappa_B \cos \theta_B - \tau_B \sin \theta_B &= \kappa_T \cos \theta_{BT} \cos \theta_{1T} \\ &= \kappa_e \cos \theta_B + \tau_e \sin \theta_B \end{aligned} \dots\dots\dots (34)$$

以上、歯面2や相対歯面でも歯面1同様の関係式が成立し同様の性質が認められることがわかる。

3・8 干渉 干渉は、接触線方向を除く任意方向(e_B 方向)の相対曲ねじれ率 κ_B が符号を変えるとき起こる。したがって、A平面上の接触点軌跡線とその上の歯面法線がA上にある場合は、一般にA上の相対曲ねじれ率を考えればよい。接触線垂直方向の相対曲率は $e_B = e_T$ とすれば κ_T となる。相対平均曲率 H は式(32)~(34)より次式で表せる。

$$2H = 2H_2 - 2H_1 = \kappa_T \dots\dots\dots (35)$$

したがって、^{1)谷村}は相対平均曲率が、^{2)酒井}は接触線に垂直な方向の曲率が符号を変えるとき干渉をするとして述べているが、これは結果的に同一である。

歯面法線を軸に歯車の回転誤差がある場合の垂直2方向相対曲率の和は、式(32)~(34)より、

$$\kappa_B + \kappa_{Ba} = 2(H_2 - H_1) = 2H = \kappa_T \dots\dots\dots (36)$$

Fig. 6 Rotally error and curvature curve

式より、この場合の垂直2方向相対曲率の和も平均曲率を表し回転誤差に無関係に定まる。回転誤差がある場合は、 κ_B , κ_{Ba} を相対主曲率とすれば、線接触の場合と異なり下式の κ_B が符号をかえるとき干渉する、

$$\kappa_B = 2H - \kappa_{Ba} = \kappa_T - \kappa_{Ba} \quad \dots\dots\dots (37)$$

κ_{Ba} が零の場合が誤差零の線接触の場合で、 κ_B が最大となる。したがって、回転誤差がある場合には誤差零の場合に比べ干渉に対する余裕度が若干少なくなる。

3・9 A 平面方向の曲ねじれ率 A 平面方向の曲ねじれ率は、表示式(11), (12), (19), (21)で $e_B = e_1$ とすれば求まる。簡略化される式は、

$$\begin{aligned} \kappa_{1B} &= \kappa_1, \quad \tau_{1B} = \tau_1 \\ e_B \cdot T &= (e_1 \cdot V) \kappa_1 + (a \cdot V) \tau_1 + (N \times \omega) \cdot e_1 \\ a_B \cdot T &= (a \cdot V) \kappa_{1a} - (e_1 \cdot V) \tau_{1a} + (N \times \omega) \cdot a_1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$e_B \cdot T$ はA方向曲ねじれ率で、 $a_B \cdot T$ はA垂直方向曲ねじれ率、 $V \cdot T$ は両方向の曲ねじれ率で表される。したがって、諸曲ねじれ率の変数は3のままである。 $N \cdot q \neq 0$ で $V \cdot T$ が零すなわち相対速度と接触線が一致しすべり率零の場合は、A方向の歯面2の曲率と相対曲率は歯面1のA方向の曲ねじれ率で表すことができ、変数は2で自由度が一つ増える。

3・10 相対速度および同垂直方向の曲ねじれ率

相対速度V方向の曲ねじれ率は、第2表示式(11), (12), (23), (26)で $e_B = a$ とすれば求まる。略される式は、

$$\begin{aligned} \kappa_{1B} &= \kappa_{1V}, \quad \tau_{1B} = \tau_{1V} \\ e_B \cdot T &= V \cdot T / V = [V \kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] \\ a_B \cdot T &= -(V \tau_{1V} + \omega') \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (39)$$

この式は極めてシンプルである。 $e_B \cdot T$, $V \cdot T$ はV方向曲率で、 $a_B \cdot T$ はねじれ率で表される。したがって、V方向の歯面2の曲率と相対曲率は歯面1のV方向曲率のみの関数で表せ、変数が1となる。これは、相対速度方向の曲率のみ見られる特徴で、歯形1, 2が

Fig. 7 Curvature κ_T curve

すべり線であることと関連し曲率の誘導がシンプルとなる理由となる。歯面2のねじれ率と相対ねじれ率はV方向の曲ねじれ率で表され、変数は2となる。V方向相対曲率は表示式(12), (39)より、

$$\begin{aligned} \kappa_V &= -[V \kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)]^2 / (N \cdot q \\ &\quad + V[V \kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)]) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (40)$$

この式は下式を満たすとき κ_V が零となるが、この式は接触線方向と相対速度が平行となる条件式である。

$$\kappa_{1V} = -\omega'' \sin(\phi_\omega - \phi) / V \quad \dots\dots\dots (41)$$

相対速度V垂直方向の曲ねじれ率は、第2表示式で $e_B = e_1$ とすれば求まる。簡略化される式は、

$$\begin{aligned} \kappa_{1B} &= \kappa_1, \quad \tau_{1B} = \tau_1, \quad e_B \cdot T = -(V \tau_{1V} + \omega') \\ a_B \cdot T &= V \cdot T / V = [V \kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$e_B \cdot T$ はV方向の歯面1のねじれ率で表されるのに対し、 $a_B \cdot T$, $V \cdot T$ は曲率で表される。したがって、V垂直方向の歯面2の曲率は、式は簡略化されるが、歯面1のV垂直方向の曲率とV方向の曲ねじれ率で表され、変数は3である。相対曲率および歯面2のねじれ率、相対ねじれ率は歯面1のV方向の曲ねじれ率で表すことができ、変数2である。

3・11 接触線および同垂直方向の曲ねじれ率

接触線方向(単位ベクトル e_{TT})の曲ねじれ率は、表示式(11), (12), (19), (21)で $e_B = e_{TT}$ とすれば求まる。簡略化される式は、

$$e_B \cdot T = 0, \quad a_B \cdot T = \sqrt{T^2} \quad \dots\dots\dots (43)$$

式より、当然の帰結として接触線方向の歯面2の曲ねじれ率は歯面1に一致する。歯面1, 2のねじれ率は同一となるが、接触線方向が相対主曲率方向であることと符合する。接触線に垂直な方向(T 方向)の曲ねじれ率は、表示式で $e_B = e_T$ とすれば求まる。簡略化される式は、

$$e_B \cdot T = \sqrt{T^2}, \quad a_B \cdot T = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

この式より、接触線垂直方向の歯面2の曲率は、歯面1の垂直2方向の関数として表され、変数3である。歯面1, 2のねじれ率は同一となるが、これも接触線垂直方向が相対主曲率方向であることと符合する。

3・12 最小相対曲率

接触線垂直方向の相対曲率(絶対値、以下同様)が小さいほど摩擦に強いことが知られている。この相対曲率の式(29)と式(25), (26)より、

$$\begin{aligned} \kappa_T &= -\{ (V \tau_{1V} + \omega')^2 + [V \kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)]^2 \} \\ &\quad / [N \cdot q + V^2 \kappa_{1V} + V \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (45)$$

式(25)より相対速度と接触線の角度 θ は、

$$\tan \theta = [V\kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] / [V\tau_{1V} + \omega'] \quad \dots\dots\dots (46)$$

式(45)より, κ_T が無限となる条件式(等式)および接触点近傍の干渉を避ける条件式(不等式)は,

$$\kappa_{1V} \geq -N \cdot q / V^2 - \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi) / V \quad \dots\dots\dots (47)$$

$N \cdot q = 0$ の場合の等式は式(41)に一致する.

式(45)より, 接触線垂直方向の相対曲率は相対速度方向の曲ねじれ率の関数となる. τ_{1V} に関していえば, 接触線に垂直方向の相対曲率の最小条件式は下式となる.

$$\tau_{1V} = -\omega' / V \quad \dots\dots\dots (48)$$

式(46)より, この式は接触線方向が相対速度に垂直となる条件式である. したがって, 相対曲率を最小とすることは接触線方向を相対速度に垂直とすることでもある.

κ_{1V} に関していえば, κ_{1V} を横軸, κ_T を縦軸とする κ_T 曲線を考えることができる. 式(45)より κ_{1V} が $-\infty$ のとき κ_T は $+\infty$ となる. κ_{1V} が大きくなるにつれ κ_T は小さくなるがある点を境にまた大きくなり, κ_T の分母が零となると κ_T は再び $+\infty$ となる. 同時に κ_T は $+\infty$ から $-\infty$ 転じ, κ_{1V} がさらに大きくなるにつれ κ_T は大きくなり, ある点を頂点としてまた小さくなる. $\kappa_{1V} + \infty$ で κ_T は $-\infty$ となる. 式(47)より, κ_T の分母が零となる κ_{1V} の負側領域が干渉領域,

正側領域がかみあい領域となる. したがって正側領域の頂点が干渉なく κ_T が最小となる点である. κ_T 曲線の頂点での κ_{1V} , κ_T の式は,

$$\begin{aligned} \kappa_{1V} &= [VT - V\omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] / V^2 \\ \kappa_T &= -[(V\tau_{1V} + \omega')^2 + (VT/V)^2] / (N \cdot q + VT) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$VT = -N \cdot q \pm \{ \sqrt{[(2N \cdot q)^2 + 4(V\tau_{1V} + \omega')^2 V^2]} \} / 2$$

式(48)を満たす特別な場合の VT , κ_T の式は,

$$VT = 0, \quad \kappa_T = 0 \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$VT = -2N \cdot q, \quad \kappa_T = 4N \cdot q / V^2 \quad \dots\dots\dots (51)$$

$VT = 0$ の場合, 式(49)の κ_{1V} は接触線方向と相対速度が平行となる条件式(41)となり, κ_T は零でべた当たり, 接触線方向の式(46)は不定となる. 式(51)で $N \cdot q$ 零の場合は, $VT = 0$ で κ_{1V} は式(41)であるが, κ_T の式(45)と接触線方向の式(46)はともに不定となる. また, 式(41)は κ_T が無限となる条件式(47)(等式)となる. これは κ_T 曲線の二つの頂点が一致する場合で κ_T は理論的に零から無限の間で自由の値をとり, κ_T 零を採用すればべた当たり, 無限の値を採用すればかみあい限界となる. すなわち, べた当たりとかみあい限界の両特性を許容する. 図7は鼓形ウォームギヤの1軸より共通垂線上で31.9 mmの位置にある

Fig. 8 Tooth surface 1, 2

Fig. 9 Contact zone

Fig. 10 Curvatures on the base point

($\theta_B = 0^\circ$)

($e_B = e_V$)

($e_B = e_T$)

Fig. 11 Curvatures on the contact line

Fig. 12 Curvatures on the contact path

歯車基準点での κ_T 曲線, θ 曲線の計算例である. ε を角速度比として, 基本諸元は,

$$\begin{aligned} D=50 \text{ mm}, \beta=90^\circ, \varepsilon=0.1, \phi=20^\circ, \\ \tau_{1V}=-0.0054 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (52)$$

3.13 点接触歯車と曲ねじれ率 歯面 2 上の曲線を歯形 2 とすれば, これと接触する歯面 1 上の歯形 1 が定まる. 歯面 1 と点接触する歯面 2_P は歯形 2 で歯面 2 に接する曲面で無数に存在する. 歯面 2_P の歯形 2 方向の曲ねじれ率は式 (5) の κ_{2C} , τ_{2C} , 歯形垂直方向のねじれ率は $-\tau_{2C}$ となる. したがって, 接触点近傍での歯面 2_P は歯形に垂直な方向の曲率 κ_{2PT} により確定する. 歯面 2 を介せば歯形 2 が歯面 2, 2_P の接触線となる. 2 接触線の角度を θ_P , 歯面 2 の歯形 2 に垂直な方向の曲率を κ_{2CT} とすれば, 歯面 1, 2_P の相対全曲率 $K^{(4)}$ は,

$$K=(\kappa_{1T}-\kappa_{2T})(\kappa_{2PT}-\kappa_{2CT})\sin^2\theta_P \quad \dots\dots\dots (53)$$

干渉がない条件は K が正⁽⁶⁾である. したがって干渉なく点接触する歯面 2_P は, すべて歯面 2 をはさんで歯面 1 の反対側にある歯面 2 上曲線に内接する曲面である. これは等角速度比での性質であり, 不等角速度比となる 3.6 節の点接触歯車はこれに属さない.

3.14 一義的歯車の曲ねじれ率 一義的歯車⁽⁵⁾⁽⁶⁾

ではその上でかみあい条件の一義的性質が成立する A 平面を選定する. インボリュートヘリコイド系歯車や球面インボリュート系歯車, 円すい面を歯面 1 とするような回転面歯車等では基礎円筒や基礎円すいに接する平面, 回転軸を含む平面を A 平面とする. 曲ねじれ率の式は表示式で $\tau_1=\tau_a=0$ とすれば求まる. 諸曲ねじれ率は A 平面上歯形により決まる特徴が見い出せる. 準ピッチ点では第 2 表示式より,

$$\begin{aligned} e_B \cdot T &= -\omega' \cos \theta_B \\ &\quad + [V\kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] \sin \theta_B \\ a_B \cdot T &= \omega' \sin \theta_B + [V\kappa_{1V} + \omega'' \sin(\phi_\omega - \phi)] \cos \theta_B \\ V \cdot T &= V^2 \kappa_{1V} + V\omega'' \sin(\phi_\omega - \phi) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (54)$$

式より, 準ピッチ点での相対速度方向の歯面 2 の曲ねじれ率と任意方向の相対曲ねじれ率は κ_{1V} により定まる. ラックや平歯車を歯車 1 とする歯車, 平面を歯面 1 とするような柱面歯車では歯面母線に垂直に A 平面を選定する. 曲ねじれ率の式は表示式で $\tau_1=\tau_a=\kappa_{1a}=0$ とすれば得られ, 諸曲ねじれ率は κ_1 の関数で表せる. 準ピッチ点での曲ねじれ率は, 式 (54) で $\kappa_{1V}=0$ とすれば得られ, 相対速度方向の歯面 2 の曲ねじれ率と任意方向の相対曲ねじれ率は歯面形状に無関係に定まる.

4. 曲ねじれ率の表示法と計算例

ここでは, e_B 方向の曲率 κ_{1B} を接触点を始点として次式で表す. 座標系は図 1 参照.

$$\kappa_{1B} = k_k \kappa_{1B} e_B = k_k \kappa_{1B} [e_{BX}, e_{BY}, e_{BZ}] \quad \dots\dots\dots (55)$$

k_k は表示倍率である. 他の曲ねじれ率も同様. この表示法は新たに提案する方法で, 歯面, 接触面, 相対速度等との関係において曲率の全体像を空間的, 視覚的, 直感的かつ総合的に把握することを可能とする. 各要素を重ねてカラー表示すればより効果的である.

以下, インボリュートウォームギヤの諸曲率の詳細な空間像を計算例により示す. 歯車諸元は,

$$D=50 \text{ mm}, \beta=90^\circ, \varepsilon=20, \delta=85^\circ, \phi=20^\circ \quad \dots\dots\dots (56)$$

δ はねじれ角である. 図 8 に歯面 1, 2 を, 図 9 左に接触面を, 図 9 右に歯車基準点 P_s を通る歯形 1, 2, 接触点軌跡線, 接触線(順に 1, 2, 3, 4)を示す.

図 10 に, 歯車基準点 P_s で曲率方向(e_B 方向)を 180 度回転させた場合の歯面 1, 2, 相対歯面(順に I, II, III)の曲率を示す. $\theta_B=0$ 方向は基礎平面方向すなわち歯面母線方向である. 曲率は P_s を始点とするベクトル κ_{1B} で表すが, 矢印は省略し表示倍率 $k_k=200$ とする. 以下同様. 図 10 より各歯面の全方向の

曲率のようすを一見してつかめる。歯面1はだ円的歯面であり歯面2は双曲的歯面である。曲率最小と最大方向が主曲率方向を示し、相対曲率零の方向が接触線方向を示す。歯面1に対し歯面2の曲率は総じて大きく符号は負であるが、接触線方向近辺では小さく正符号となる。

図11に、歯車基準点 P_s を通る接触線上の諸曲率を、 $\theta_B=0$ 、相対速度方向($e_B=e_V$)、接触線垂直方向($e_B=e_T$)について示す。図11より、各歯面の接触線上の曲率の変化や曲率方向による変化のようすを視覚的に把握できる。総じて歯面1の曲率は小さいために、相対曲率は歯面2の曲率に類似し大きな変化を示す。 $\theta_B=0$ 方向では、歯面1の曲率は零、歯面2の曲率と相対曲率は等しく接触線の手前側で小さくなる。相対速度方向では歯面2、相対歯面の曲率は大きくなく特に歯車基準点近くで小さい。接触線垂直方向は大きく変化が少ない。

図12に、歯車基準点 P_s を通る接触点軌跡線上の諸曲率を、 $\theta_B=0$ 、相対速度方向、接触線垂直方向について示す。図12より、接触点軌跡線上の曲率の変化や曲率方向による変化のようすを視覚的に把握できる。 $\theta_B=0$ 方向や接触線垂直方向では、歯面2、相対歯面の曲率が大きく、かみあい限界を示す変化が見られる。相対速度方向では全体に小さく歯面1、2がほぼ等しい。

5. 結 論

任意方向の諸曲ねじれ率と歯面1の垂直二方向曲ねじれ率の関係を明らかにし、曲ねじれ率に関する諸項目について論じた。その結果、より広く詳細な空間像を示すことができ、曲ねじれ率に関する理論の進展を計ることができた。ここで、特筆されるのは、接触線垂直方向の相対曲率を最小とする条件式の誘導に成功した点である。接触線垂直方向の相対曲率は小さいほど耐摩耗性に優れていることが知られており、高性能歯車の開発において、この条件式は一つの指針を与えると考ええる。また、曲率図により接触状況を分類したが、同一相対曲率での歯面1,2の曲率の大小や接触状況の差が歯車性能に与える影響の究明は今後の課題である。

文 献

- (1) 谷村正義, 定回転比歯車について(第1報), 機論, 5-18 (1939), 184-190.
- (2) 酒井高男, ハイボイド歯車の歯形に関する研究, 機論, 21-102 (1955), 164-170.
- (3) 大竹與志知, 食違い軸歯車におけるかみあい条件の平歯車の性質, 機論, 56-531, C (1990), 3038-3045.
- (4) 横田晃, 点接触歯車の基礎的な問題について, 機論, 33-253 (1967), 1491-1502.
- (5) 大竹與志知, 食違い軸歯車の平歯車の歯形理論(第1報かみあい条件と歯車形態), 64-625, C (1998), 3588-3595.
- (6) 大竹與志知, 平歯車を一方の歯車とする線接触食違い軸歯車に関する研究, 機論, 59-561, C (1993), 1533-1540.