不連続な区分線形特性を有する質量・ダンパー系の
強制振動における周期解*

(初期値補正拡張法による対称基本周期解の導出)

今 村 仁^{*1}, 鈴木 浩 平^{*2}Periodic Solution for Periodically Excited
Lumped Mass Discontinuous System having no Stiffness
(Derivation of Symmetric Fundamental Periodic Solution
by Initial Value Corrective Extension Method)Hitoshi IMAMURA^{*3} and Kohei SUZUKI^{*3} Mechanical Engineering, Ibaraki University,
4-12-1 Nakanarusawa, Hitachi-shi, Ibaraki, 316-8511 Japan

A new analytical method to find the exact solution to lumped mass discontinuous piecewise linear system having no spring stiffness is proposed. In this study, we apply the pseudo feedback superposition method in order to determine the exact functional form of the summation of the infinite number of pseudo-feedback responses appearing derivation process of the fundamental symmetric periodic solution. First, for this stiffness-free discontinuous piecewise linear system, we assume the solution facing towards the future. Under this assumption, we have to evaluate unfavorable two terms; "trend" term and "offset" term which lead to failure of periodicity and symmetry among the solution. Second, we propose an alternative method to derive corrected terms based on the evaluation of only finite terms summation. Solution calculated through the approach can be identical to that through Cesàro's summation approach reported in the previous paper.

Key Words: Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Discontinuous, Global Representation, Pseudo-Feedback Form, Zero Stiffness System, Symmetric Periodic Solution, Trend Term, Offset Term, Correction

1. 結 言

著者はこれまで、非線形性を系に循環する仮想的な外力とみなし、線形系の一般解とこの見掛けの外力によって発生する応答とを重ね合わせることににより区分線形系の一般解を大域的に表記できる“擬フィードバック形式”によるモデリング法を提案してきた^{(1)~(3)}。さらに、この表現式から導出される定常解の大域表現に現れる無限個の擬フィードバック応答を解析的に評価することにより、あらゆる周期解の関数構造を厳密に決定できるフィードバック重畳法を提案し、幾つかの簡単な系についてその有効性を明らかにしてきた^{(4) (5)}。しかしながら、この表現では、ばね剛性が 0 の場合に周期解の計算過程で収束しない関数項級数が現れるので、これを如何に評価するかが問題となる。著者は、

ばね剛性が 0 となる最も簡単な区分線形系のモデルの一つである、質点の両側に配置されたストッパーにより変位が拘束される衝突振動系に関してこの問題を提起し、最も基本的な周期解である対称基本周期解の 2 つの異なる計算法を提案した。論文 (6) では、Cesàro の総和法により収束しない関数項級数を評価し、これによりこの系の対称基本周期解が厳密に求められることを示した。また、論文 (7) では、収束しない関数項級数を求めることなく、現在から無限の未来までの周期的な擬フィードバック応答の無限和を周期化するように初期値を決めることにより、Cesàro の総和法によるもの⁽⁶⁾と同一の対称基本周期解を求めることが可能であることを示し、この計算法を初期値補正拡張法と名付けた。

同様の方法論をより一般の場合に確立するために、前報では、衝突振動系とは異なる特性を有する区分線形系として、変位に依存して不連続な力が作用する質

* 原稿受付 2003 年 6 月 20 日。

^{*1} 正員、茨城大学工学部 (☎ 316-8511 日立市中成沢町 4-12-1)。^{*2} 正員、東京都立大学工学部 (☎ 192-0397 八王子市南大沢 1-1)。

E-mail: imamura@mech.ibaraki.ac.jp

量・ダンパー系の対称基本周期解を, Cesàro の総和法により厳密に導出できることを明らかにした⁽⁸⁾. 本論文は, 初期値補正拡張法を適用してこの系の対称基本周期解の関数形を厳密に導出するための方法を提案する. まず, 周期解が実現するとき, ある初期時間以降の未来に向かう解を考えると, 無限個の擬フィードバック応答の総和によって, 解の周期性と対称性を損なうトレンド成分とオフセット成分が出現することを示す. 次に, 有限和の評価のみでこれらの成分を相殺する補正項を求める方法を明らかにする. 最後に, トレンド成分とオフセット成分の相殺によって補正された一般解から, Cesàro の総和法によって得られたもの⁽⁸⁾と同一の対称基本周期解の大域表現が導かれることを確認する.

2. 系の記述と問題提起

2.1 運動方程式 次式の無次元化された運動方程式

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \text{sgn}(x) = \eta \cos(\omega t) \quad (1)$$

で記述される強制振動系を考察する. $\text{sgn}(x)$ は

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

で定義される符号関数であり, 系は変位の符号が一定である間は線形系と等価となるので, 式(1)で表されるシステムは不連続な非線形性を有する区分線形系となる. 質点がばねによる復元力を受けるより一般的な不連続区分線形系である予圧縮ばね系⁽¹⁾

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x + \text{sgn}(x) = \eta \cos(\omega t) \quad (3)$$

については, $x(t+T/2) = -x(t)$ を満たす対称基本周期解とその分岐特性が, 切り換えと切り換えの間の線形系の解を接続する方法である“接合法”を用いて調べられている⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾. しかしながら, ばね剛性 β が 0 となる式(1)の系については, 粘性減衰 ζ と外力がどちらも 0 となる特殊な場合以外の周期解は調べられていない⁽¹¹⁾. また, 接合法によって求められるのは, 対称基本周期解を実現する初期条件のみであるので, 解の時間関数形については, 導出された値を初期条件とする線形系の一般解を切り換えごとに周期的に接続したもので表されるという以上に詳細な情報は原理的に得られない.

2.2 擬フィードバック形式 著者により提案された擬フィードバック形式による表記法によれば, 系(1)の初期切り換え時刻 t_0 から m 回目の切り換え時刻 t_m

Table 1 Unit indicial response function $\mathcal{X}(t)$

parameters	$\mathcal{X}(t)$
$\beta = 0, \zeta \neq 0$	$\frac{1}{2\zeta} \left(t - \frac{1-e^{-2\zeta t}}{2\zeta} \right)$
$\beta = \zeta = 0$	$\frac{t^2}{2}$

Table 2 Steady response functions $\mathcal{S}(t)$

parameters	$\mathcal{S}(t)$
$\beta = 0, \zeta \neq 0$	$\frac{\eta}{\omega\sqrt{\omega^2+(2\zeta)^2}} \cos(\omega t + \tan^{-1} \frac{-2\zeta}{-\omega})$
$\beta = \zeta = 0$	$\frac{\eta}{\omega^2} \cos(\omega t - \pi) \quad (= -\frac{\eta}{\omega^2} \cos(\omega t))$

までに領域境界 $x = 0$ と横断的に交差する停滞を伴わない一般解は, $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ を初期値とする線形系の一般解 ($\mathcal{S}(t)$ と表記する) と, 時刻 $t_0, \dots, t_{m-1}$ での切り換えによって発生するインディシャル応答との和によって次式のように大域的に表される⁽¹⁾.

$$\mathcal{X}_{t_0, t_m}(t) = u(t-t_0)\mathcal{S}(t-t_0) - \sigma_0 \left[u(t-t_0)\mathcal{X}(t-t_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i u(t-t_i)\mathcal{X}(t-t_i) \right] \quad (4)$$

ここで $\mathcal{X}(t)$ は, 表 1 で定義される線形系の単位インディシャル応答関数であり, $\mathcal{S}(t)$ は表 2 に示す線形系の入力応答関数である. 時間 t_0 の直後に変位 x が正, 負のどちらの領域に存在すべきかを決定する一般化された符号関数を

$$\sigma_0(t_0) \equiv \sum_{i=0}^q \prod_{j=0}^{i-1} \varepsilon(x^{(j)}(t_0)) \text{sgn}(x^{(i)}(t_0)) \quad (5)$$

で定義し, σ_0 と略記する. また, $u(x)$ は単位ステップ関数, $\varepsilon(x)$ は次式

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

で定義される記号関数である. 式(4)右辺の総和項の係数が 2 となっているのは, 初期切り換え時刻 t_0 で擬フィードバックにより発生したステップ入力による影響を t_1 以降で打ち消し, 新たに符号を反転したステップ入力を生成するために, t_1 以降では 2 倍の強度のステップ入力が切り換えのたびに生成されなければならないためと解釈できる.

式(3)の定常解 ($\mathcal{X}_\infty(t)$ と表記する) は, 一般解(4)の初期値を無限の過去に移行することにより得られる⁽¹⁾. ここで, $\mathcal{X}(t)$ は $\beta \neq 0$ の場合の対応する式によるものとするが, その具体的な関数形は紙数の制約により省略する. 特に, 外力の n 周期間 ($T = n \cdot 2\pi/\omega$) に領域境界 $x = 0$ と m 回交差する周期解 ($\mathcal{X}_m^n(t)$ と表記する) の場合には, 無限の過去から無限の未来ま

で発生する擬フィードバック応答は周期的になるので、次式のように大域的に表せる。

$$\mathcal{X}_\infty(t) = \mathcal{S}(t) - \sigma_0 \cdot 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \times u(t - t_i - kT) \mathcal{X}(t - t_i - kT) \quad (7)$$

著者は、 $\beta \neq 0$ の系(3)の場合に、式(7)右辺の2重和を解析的に計算することにより周期解 $\mathcal{X}_m^n(t)$ が厳密に求められることを示した⁽⁴⁾。ところが、ばね剛性を表すパラメータ β が0となる式(1)の系の場合に同様の方法を適用すると、式(7)の2重和は収束しない関数項級数となるので、その計算法が問題となる。前報⁽⁸⁾では、無限の過去から生成されるこの収束しない関数項級数を、“Cesàroの総和法”を用いて評価する計算法を提案した。本論文では、 t_0 から無限の未来までの周期的な擬フィードバック応答の無限和を周期化するような一般解の初期値を求めることにより、収束しない無限和を求めることなく対称基本周期解を導出する“初期値補正拡張法”⁽⁷⁾が、式(1)の系にも適用できることを明らかにする。

3. 初期値補正拡張法による対称基本周期解の導出

本節では、最も基本的な周期解である対称基本周期解の導出法を、ばね剛性 β が0となるパラメータ条件下で、粘性減衰 ζ の有無に応じて検討する。

3.1 $\zeta \neq 0$ における対称基本周期解 対称基本周期解 $\mathcal{X}_2^n(t)$ では $t_i = t_0 + \frac{iT}{2}$ ($i \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ は整数の集合)) となるので、初期条件を $x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = \dot{\mathcal{X}}_2^n(t_0)$ とする $\mathcal{X}_2^n(t)$ の t_0 以降、無限の未来に向かう部分は、一般解(4)で $m \rightarrow \infty$ の極限をとることにより、以下のように表記できる。

$$\begin{aligned} u(t - t_0) \mathcal{X}_2^n(t) &= u(t - t_0) \left[0 - \mathcal{S}(t_0) \right. \\ &+ \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \{ \dot{\mathcal{X}}_2^n(t_0) - \mathcal{S}(t_0) \} + \mathcal{S}(t) \\ &- \sigma_0 \left\{ \frac{1}{2\zeta} \left(t - t_0 - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \right) \right. \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \\ &\times \left. \left. \frac{1}{2\zeta} \left(t - t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \right] \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

式(8)が対称周期解を表すためには、式(8)右辺[]内のすべての項の和の t_0 から無限の未来までの寄与が、有界、周期的かつ対称でなければならない。そこで、 t_0 以降、周期的に発生する擬フィードバック応答の無

Fig. 1 Derivation process of symmetric fundamental periodic solution ($\beta = 0, \zeta \neq 0$)

限和の、共通因子である係数 σ_0 をくくった部分

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\zeta} \left\{ u(t - t_0) \left(t - t_0 - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \right) \right. \\ & + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \left(t - t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \left. \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

の $t \geq t_0$ での周期性及対称性について考える。総和(9)の初期切り換え時刻 t_0 から周期 T ごとの値は

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\zeta} \left\{ kT - \frac{1 - e^{k(-2\zeta T)}}{2\zeta} \right. \\ & + 2 \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \left(\frac{2k - i}{2} T - \frac{1 - e^{-2\zeta \frac{2k-i}{2} T}}{2\zeta} \right) \left. \right\} \\ & = - \frac{1}{2\zeta} \frac{1 - e^{-\zeta T}}{1 + e^{-\zeta T}} \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \Big|_{t=t_0+kT} \quad (10) \end{aligned}$$

となり、図 1(a) の ● に示すように k に関して指数関数的に変動するので、無限和(9) は $t \geq t_0$ に関して周期的でない。このことは、無限和(9) に現れるランプ関数 $u(t)t$ の周期的シフトの和が互いに打ち消しあった結果、無限和(9) は $t \geq t_0$ で

$$-\frac{1}{2\zeta} \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \quad (11)$$

に比例する指数関数的なトレンド成分

$$\mathcal{G}_t(t-t_0) = -\frac{1}{2\zeta} \frac{1 - e^{-\zeta T}}{1 + e^{-\zeta T}} \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \quad (12)$$

を有することを意味する。したがって、式(8) が対称周期関数になるためには、右辺に現れる線形系の初期値応答と初期入力応答の和

$$0 - \mathcal{J}(t_0) + \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \{ \dot{\mathcal{X}}_2^n(t_0) - \dot{\mathcal{J}}(t_0) \} \quad (13)$$

が擬フィードバック応答の無限和(9) を周期化しなければならない。そのような初期値は、式(13) の指数関数的に変動する成分とトレンド成分(12) が相殺することから直接求められるが、以下では、対称基本周期解 $\bar{\mathcal{X}}_2^n(t)$ の関数構造を統一的に明確化するために

1. 無限和(9) を、 $t \geq t_0$ に関して「周期的な成分」と非周期的な「トレンド成分」、および対称性を損なう「オフセット成分」との和に分解する。
2. 線形系の初期値応答と初期入力応答の和(13) が無限和(9) のトレンド成分とオフセット成分を相殺するような初期値を求める。

という 2 段階の方法について検討する。まず、無限和(9) を周期化する補正項を、式(10) で示した離散時刻での値を計算する方法とは異なるやり方で導出する。無限和(9) は指数的に増加する関数

$$u(t-t_0) \frac{1}{2\zeta} \left(t-t_0 - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \right) \quad (14)$$

を解の切り換えが発生するごとに外力の半周期 $T/2$ ずつ右にシフトしたものを符号を替えて加算していくことにより構成されるが、インディシャル応答の強度が t_0 と t_1 以降とで異なっている。そこで、無限和(9) を t_0 以降、見掛け上同一の強度のインディシャル応答が周期的に生成される表現に次式のように書き換える。

$$u(t-t_0) \mathcal{G}_f(t-t_0) - 2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t-t_i) \times \frac{1}{2\zeta} \left(t-t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \quad (15)$$

ここで

$$\mathcal{G}_f(t-t_0) = \frac{1}{2\zeta} \left(t-t_0 - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \right) \quad (16)$$

は t_0 以降、周期的に発生する同一強度のインディシャル応答の無限和

$$-2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t-t_i) \frac{1}{2\zeta} \left(t-t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \quad (17)$$

を実際の擬フィードバック応答(9) へ補正するするために、初期切り換え時刻で生成されなければならない初期フィードバック補正項であると解釈できる。このように書き換えた上で、無限和(15) を周期化する補正項を求める。無限和(15) の 1 周期分 $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ までの和に、式(11) の α 倍とを加えたものが $t = t_0 + T$ で t_0 での値である 0 に戻るような係数 α は

$$\left[u(t-t_0) \mathcal{G}_f(t-t_0) - 2 \sum_{i=0}^1 (-1)^i u(t-t_i) \times \frac{1}{2\zeta} \left(t-t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) - \alpha \cdot \left(-u(t-t_0) \frac{1}{2\zeta} \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \right) \right] \Big|_{t=t_0+T} = 0 \quad (18)$$

より

$$\alpha = \frac{(1 - e^{-\zeta T})^2}{1 - e^{-2\zeta T}} = \frac{1 - e^{-\zeta T}}{1 + e^{-\zeta T}} \quad (19)$$

で与えられる。式(19) で得られた α と式(11) との積は式(12) で求められたトレンド成分と一致する。このことから、無限和(15) はそれに含まれる図 1(a) の破線で表されたトレンド成分を、これを補正するトレンド補正項

$$\bar{\mathcal{G}}_t(t-t_0) = -\mathcal{G}_t(t-t_0) \quad (20)$$

により除去することによって、次式のように周期化できる。

$$u(t-t_0) \{ \bar{\mathcal{G}}_t(t-t_0) + \mathcal{G}_f(t-t_0) \} - 2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t-t_i) \frac{1}{2\zeta} \left(t-t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \quad (21)$$

これを図 1(b) の実線に示す。 $t \geq t_0$ でのトレンド補正項と初期フィードバック補正項の和

$$\bar{\mathcal{G}}_f(t-t_0) + \mathcal{G}_t(t-t_0) \quad (22)$$

と無限和(17) の $0 \leq i \leq 2k-1$ までの部分の和との和

が, $t \geq t_0 + kT$ ($k \geq 1$) での値を計算すると

$$u(t - t_0 - kT) \left[\left\{ \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) - 2 \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i u(t - t_i) \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1}{2\zeta} \left(t - t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) + \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) \right\} \right] \quad (23)$$

$$= u(t - t_0 - kT) \{ \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0 - kT) + \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0 - kT) \} \quad (24)$$

となる. このことは任意の $k \geq 1$ に関して和(24) が t_{2k} 以降, 無限の未来までに生成される擬フィードバック応答の無限和

$$-2 \sum_{i=2k}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \frac{1}{2\zeta} \left(t - t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \quad (25)$$

を周期化する補正項の役割を担うことを意味する. したがって, 和(22) は無限和(17) を周期化する補正項であることが明らかになった. ところが, 周期化された無限和(21) の $t = t_0 + kT/2$ ($k \geq 1$) での値を求めると

$$\left[u(t - t_0) \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) + u(t - t_0) \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) \right. \\ \left. - 2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \frac{1}{2\zeta} \left(t - t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \right] \Big|_{t=t_0+kT/2} \\ = \begin{cases} 0 & k : \text{even} \\ -\frac{1}{2\zeta} \left\{ \frac{T}{2} - \frac{1 - e^{-\zeta T}}{\zeta(1 + e^{-\zeta T})} \right\} & k : \text{odd} \end{cases} \quad (26)$$

となり $x = 0$ に関して対称でない. そこでこの偏差が補正項 $\bar{\mathcal{G}}_o$ により以下のように対称化されたとする.

$$u(t - t_0) \{ \bar{\mathcal{G}}_o + \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) + \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) \} \\ - 2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \frac{1}{2\zeta} \left(t - t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \quad (27)$$

式(27) の $t = t_0 + kT/2$ での値を求めると

$$\left[\bar{\mathcal{G}}_o + u(t - t_0) \{ \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) + \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) \} \right. \\ \left. - 2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \frac{1}{2\zeta} \left(t - t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \right] \Big|_{t=t_0+kT/2} \\ = \begin{cases} \bar{\mathcal{G}}_o & k : \text{even} \\ \bar{\mathcal{G}}_o - \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{T}{2} - \frac{1 - e^{-\zeta T}}{\zeta(1 + e^{-\zeta T})} \right) & k : \text{odd} \end{cases} \quad (28)$$

となるが, これは k が偶数か奇数かで絶対値が等しく符号が反対でなければならないことから, 次式が得られる.

$$\bar{\mathcal{G}}_o = \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{T}{4} - \frac{1 - e^{-\zeta T}}{2\zeta(1 + e^{-\zeta T})} \right) \quad (29)$$

周期関数(27) を半周期 $T/2$ だけシフトしたものはその符号を反転したものと等しいことを初等的な計算によって確認できる. このことは式(29) が周期関数(21) のオフセット成分

$$\mathcal{G}_o = -\frac{1}{2\zeta} \left(\frac{T}{4} - \frac{1 - e^{-\zeta T}}{2\zeta(1 + e^{-\zeta T})} \right) \quad (30)$$

を補正し, 対称化するオフセット補正項であることを意味する. 周期化された無限和(21) とそのオフセット成分およびそれへの補正項の関係を図 1(b) の実線と破線で, また, 補正され対称化された周期関数(27) を図 1(c) の実線でそれぞれ示す.

以上のことから, 無限個の擬フィードバック応答の総和(9) からそのオフセット成分(30) とトレンド成分(12) を分離すると, $t \geq t_0$ での周期解(8) は以下のような形に書き換えられる.

$$u(t - t_0) \mathcal{X}_2^n(t) = u(t - t_0) \left[0 - \mathcal{J}(t_0) + \sigma_0 \mathcal{G}_o \right. \\ \left. + \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \{ \dot{\mathcal{X}}_2^n(t_0) - \mathcal{J}(t_0) \} \right. \\ \left. + \sigma_0 \mathcal{G}_t(t - t_0) + \mathcal{J}(t) + \sigma_0 \{ \bar{\mathcal{G}}_o + \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) \} \right. \\ \left. + \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) - 2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \frac{1}{2\zeta} \right. \\ \left. \times \left(t - t_i - \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \right] \quad (31)$$

これが $t \geq t_0$ で有界, 周期的かつ対称であるためには, 擬フィードバック応答の無限和のオフセット成分 $\mathcal{G}_o$ とトレンド成分 $\mathcal{G}_t(t - t_0)$ の $t \geq t_0$ への影響は 0 でなければならない. したがって, 次式が成り立てば, これらの成分は, 初期値応答と初期入力応答の和(13) と相殺し無効化することがわかる.

$$1 \times (0 - \mathcal{J}(t_0) + \sigma_0 \mathcal{G}_o) = 0 \quad (32a)$$

$$\frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \{ \dot{\mathcal{X}}_2^n(t_0) - \mathcal{J}(t_0) \} + \sigma_0 \mathcal{G}_t(t - t_0) = 0 \quad (32b)$$

式(12), (30) を式(32) に代入すると, トレンド成分とオフセット成分を相殺する初期値は次式のように求められる.

$$0 = \mathcal{J}(t_0) + \sigma_0 \frac{1}{2\zeta} \left\{ \frac{T}{4} - \frac{1 - e^{-\zeta T}}{2\zeta(1 + e^{-\zeta T})} \right\} \quad (33a)$$

$$\dot{\mathcal{X}}_2^n(t_0) = \mathcal{J}(t_0) + \sigma_0 \frac{1}{2\zeta} \frac{1 - e^{-\zeta T}}{1 + e^{-\zeta T}} \quad (33b)$$

これは、接合法によって求められた結果と符合する⁽⁸⁾。対称基本周期解を実現する初期値(33)を代入すると、 $t \geq t_0$ での周期解(31)は次式のように対称周期関数(27) (図 1(c) の実線) と線形系の定常解 $\mathcal{S}(t)$ (図 1(c) の破線) との和で表される (図 1(d) の実線)。

$$\begin{aligned} u(t-t_0)\mathcal{X}_2^n(t) &= u(t-t_0)[\mathcal{S}(t) \\ &+ \sigma_0 \{ \mathcal{G}_o + \mathcal{G}_i(t-t_0) + \mathcal{G}_f(t-t_0) \\ &- 2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t-t_i) \frac{1}{2\zeta} \\ &\times \left(t-t_i - \frac{1-e^{-2\zeta(t-t_i)}}{2\zeta} \right) \}] \quad (34) \end{aligned}$$

次に、式(34) 右辺の和を評価して、対称基本周期解 $\mathcal{X}_2^n(t)$ の時間関数形を求める。右辺 $\{ \}$ 内の第4項の無限和のうち指数関数を含む項をまず評価する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t-t_i-kT)e^{-2\zeta(t-t_i-kT)} \\ = \frac{e^{-2\zeta(t-t_i-T\lfloor \frac{t-t_i}{T} \rfloor)}}{1-e^{-2\zeta T}} \quad (35) \end{aligned}$$

であることを用いると⁽⁸⁾、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} u(t-t_i-kT)e^{-2\zeta(t-t_i-kT)} \\ = \frac{e^{-2\zeta(t-t_i-T\lfloor \frac{t-t_i}{T} \rfloor)}}{1-e^{-2\zeta T}} \\ - \sum_{k=1}^{+\infty} u(t-t_i+kT)e^{-2\zeta(t-t_i+kT)} \quad (36) \end{aligned}$$

ここで $\lfloor x \rfloor$ は、 x を超えない最大整数を表す床関数である。式(36) 最右辺第2項の無限和の $t \geq t_0$ の部分をさらに評価すると、

$$\begin{aligned} u(t-t_0) \sum_{k=1}^{+\infty} u(t-t_i+kT)e^{-2\zeta(t-t_i+kT)} \\ = u(t-t_0) \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2\zeta(t-t_i+kT)} \\ = u(t-t_0) \frac{e^{-2\zeta(t-t_i+T)}}{1-e^{-2\zeta T}} \quad (37) \end{aligned}$$

これより式(36) の $t \geq t_0$ の部分は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} u(t-t_0) \sum_{k=0}^{+\infty} u(t-t_i-kT)e^{-2\zeta(t-t_i-kT)} \\ = u(t-t_0) \left\{ \frac{e^{-2\zeta(t-t_i-T\lfloor \frac{t-t_i}{T} \rfloor)}}{1-e^{-2\zeta T}} - \frac{e^{-2\zeta(t-t_i+T)}}{1-e^{-2\zeta T}} \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

次に、式(34) 右辺 $\{ \}$ 内の第4項の無限和のうち指数関数を含まない項を評価する。単位ステップ関数と単位ランプ関数を周期的にシフトしたものの無限和は、それぞれ以下のように評価できる。

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u(t-t_i-kT) = u(t-t_i) \left\lfloor \frac{t-t_i+T}{T} \right\rfloor \quad (39a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} u(t-t_i-kT)(t-t_i-kT) \\ = u(t-t_i) \left\lfloor \frac{t-t_i+T}{T} \right\rfloor \left(t-t_i - \frac{T}{2} \left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \quad (39b) \end{aligned}$$

式(38), (39) の結果を用いて式(34) を書き換えると

$$\begin{aligned} u(t-t_0)\mathcal{X}_2^n(t) &= u(t-t_0)[\mathcal{S}(t) \\ &+ \sigma_0 \{ \mathcal{G}_o + \mathcal{G}_i(t-t_0) + \mathcal{G}_f(t-t_0) \\ &- \frac{1}{2\zeta} \sum_{i=0}^1 (-1)^i \left[\left(1 + \frac{t-t_i}{T} \right) \left(t-t_i - \frac{1}{\zeta} \right) \right. \\ &- \frac{e^{-2\zeta(t-t_i+T)}}{\zeta(1-e^{-2\zeta T})} + \frac{e^{-2\zeta(t-t_i-T\lfloor \frac{t-t_i}{T} \rfloor)}}{\zeta(1-e^{-2\zeta T})} \\ &+ \left. \left(t-t_i-T\left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \left\{ 1 + \frac{1}{\zeta T} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{T} \left(t-t_i-T\left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \right\} \right] \} \quad (40) \end{aligned}$$

式(40) の i についての和の床関数 $\lfloor \cdot \rfloor$ を含まない項は、次式

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\zeta} \sum_{i=0}^1 (-1)^i \left[\left(1 + \frac{t-t_i}{T} \right) \left(t-t_i - \frac{1}{\zeta} \right) \right. \\ \left. + \frac{e^{-2\zeta(t-t_i+T)}}{\zeta(1-e^{-2\zeta T})} \right] \\ = -\frac{1}{2\zeta} \left(\frac{T}{4} - \frac{1}{2\zeta} + t-t_0 + \frac{e^{-2\zeta(t-t_0+\frac{T}{2})}}{\zeta(1+e^{-\zeta T})} \right) \\ = -(\mathcal{G}_o + \mathcal{G}_i(t-t_0) + \mathcal{G}_f(t-t_0)) \quad (41) \end{aligned}$$

のように書き換えられる。これより式(40) は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} u(t-t_0)\mathcal{X}_2^n(t) &= u(t-t_0)[\mathcal{S}(t) - \sigma_0 \\ &\times \sum_{i=0}^1 (-1)^i \frac{1}{2\zeta} \left[\left(t-t_i-T\left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \right. \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{\zeta T} - \frac{1}{T} \left(t-t_i-T\left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \right\} \\ &+ \left. \frac{e^{-2\zeta(t-t_i-T\lfloor \frac{t-t_i}{T} \rfloor)}}{\zeta(1-e^{-2\zeta T})} \right] \quad (42) \end{aligned}$$

解の周期性から、この結果(42) を初期切り換え時刻 t_0 より過去 ($t < t_0$) へと拡張することにより、対称基本

周期解は線形系の定常解である周期関数 $\mathcal{S}(t)$ と不連続な非線形性の影響を集約した基本的な連続周期関数を切り換え時刻だけシフトしたものとの和で次式のように大域的に表される.

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{X}}_2^n(t) &= \mathcal{S}(t) - \sigma_0 \sum_{i=0}^1 (-1)^i \mathcal{G} \left(t - t_i - T \left\lfloor \frac{t - t_i}{T} \right\rfloor \right) \\ \mathcal{G}(t) &\equiv \frac{1}{2\zeta} \left\{ t \left(1 + \frac{1}{\zeta T} - \frac{t}{T} \right) + \frac{e^{-2\zeta t}}{\zeta(1 - e^{-2\zeta T})} \right\}\end{aligned}\quad (43)$$

式(43) は先に擬フィードバック応答の総和を Cesàro の総和法を用いて評価して求められた結果⁽⁸⁾と一致する. 式(43) は交差時間 t_0, t_1 を含むが, t_0 と t_1 の間には $t_1 = t_0 + T/2$ の関係が成り立つので, 解は実質的に交差時間 t_0 により規定される. t_0 の値は式(33) から厳密に計算できる⁽⁸⁾ので, 式(43) は切り換え時刻 t_0 を含めた対称基本周期解の厳密な大域表現となっている.

3.2 $\zeta = 0$ における対称基本周期解 対称基本周期解 $\bar{\mathcal{X}}_2^n(t)$ が実現するとき, 周期解 $\bar{\mathcal{X}}_2^n(t)$ の $t \geq t_0$ に制限した部分は, 表 1 の $\beta = 0, \zeta = 0$ での式を用いて一般解(4) の $m \rightarrow +\infty$ の極限をとることにより以下のように書ける.

$$\begin{aligned}u(t - t_0) \bar{\mathcal{X}}_2^n(t) &= u(t - t_0) \left[0 - \mathcal{S}(t_0) \right. \\ &\quad + (t - t_0) \{ \dot{\bar{\mathcal{X}}}_2^n(t_0) - \dot{\mathcal{S}}(t_0) \} + \mathcal{S}(t) \\ &\quad \left. - \sigma_0 \left\{ \frac{(t - t_0)^2}{2} + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \frac{(t - t_i)^2}{2} \right\} \right]\end{aligned}\quad (44)$$

式(44) の右辺の擬フィードバック応答の総和は, 共通因子である係数 σ_0 をくくり出すと, 初期フィードバック補正項

$$\bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) = \frac{(t - t_0)^2}{2} \quad (45)$$

を導入して, 次式のように書き換えられる.

$$u(t - t_0) \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) - 2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \frac{(t - t_i)^2}{2} \quad (46)$$

式(46) は区分的に 2 次の多項式であり, その $t = t_0 + kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) での値は $-\frac{T}{4}kT = -\frac{T}{4}(t - t_0)|_{t=t_0+kT}$ となるので, t の 1 次のオーダーのトレンド成分を有する. そこで, 擬フィードバック応答の総和(46) を周期化する補正係数 α は

$$\begin{aligned}u(t - t_0) \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) + \alpha u(t - t_0)(t - t_0) \\ - 2 \sum_{i=0}^1 (-1)^i u(t - t_i) \frac{(t - t_i)^2}{2} = 0\end{aligned}\quad (47)$$

より

$$\alpha = \frac{T}{4} \quad (48)$$

となる. これより和(46) はトレンド成分

$$\bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) = -\frac{T}{4}(t - t_0) \quad (49)$$

を有し, その補正項は次式で与えられる.

$$\bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) = \frac{T}{4}(t - t_0) \quad (50)$$

式(50) により周期化した総和(46) の $t = t_0 + kT/2$ ($k \geq 1$) での値は 0 であるので, オフセット成分 $\bar{\mathcal{G}}_o$ とその補正項 $\bar{\mathcal{G}}_o$ は共に 0 となる. 実際, 総和(46) を半周期 $T/2$ だけシフトしたものは総和(46) の符号を替えたものと等しいので, それ自体で対称周期関数である. 以上のことから, 式(44) は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}u(t - t_0) \bar{\mathcal{X}}_2^n(t) &= u(t - t_0) \left[0 - \mathcal{S}(t_0) \right. \\ &\quad + (t - t_0) \{ \dot{\bar{\mathcal{X}}}_2^n(t_0) - \dot{\mathcal{S}}(t_0) \} + \\ &\quad + \sigma_0 \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) + \mathcal{S}(t) \\ &\quad + \sigma_0 \{ \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) + \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) \\ &\quad \left. - 2 \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i u(t - t_i) \frac{(t - t_i)}{2} \right]\end{aligned}\quad (51)$$

トレンド成分の影響は初期値応答と初期入力応答の和により相殺されなければならないので, 次式が成り立つ必要がある.

$$1 \times (0 - \mathcal{S}(t_0) + \sigma_0 \bar{\mathcal{G}}_o) = 0 \quad (52a)$$

$$(t - t_0) \{ \dot{\bar{\mathcal{X}}}_2^n(t_0) - \dot{\mathcal{S}}(t_0) \} + \sigma_0 \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) = 0 \quad (52b)$$

これを満たす初期値は次式で与えられる.

$$0 = \mathcal{S}(t_0) \quad (53a)$$

$$\dot{\bar{\mathcal{X}}}_2^n(t_0) = \dot{\mathcal{S}}(t_0) + \sigma_0 \frac{T}{4} \frac{1 - e^{-\zeta T}}{1 + e^{-\zeta T}} \quad (53b)$$

式(53) は, 接合法によって求められた結果⁽⁸⁾と符合する. 対称基本周期解を実現する初期値(53) を代入すると, 式(51) は次式のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}u(t - t_0) \bar{\mathcal{X}}_2^n(t) &= u(t - t_0) \left[\mathcal{S}(t) \right. \\ &\quad + \sigma_0 \{ \bar{\mathcal{G}}_t(t - t_0) + \bar{\mathcal{G}}_f(t - t_0) \\ &\quad - \sum_{i=0}^1 (-1)^i \left[\left\{ \frac{(t - t_i)^3}{3T} + \frac{(t - t_i)^2}{2} + \frac{T(t - t_i)}{6} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left[-\frac{T}{6} \left(t - t_i - T \left\lfloor \frac{t - t_i}{T} \right\rfloor \right) \right] \right. \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{1}{T} \left(t - t_i - T \left\lfloor \frac{t - t_i}{T} \right\rfloor \right) \right\} \\ &\quad \left. \times \left\{ 1 - \frac{2}{T} \left(t - t_i - T \left\lfloor \frac{t - t_i}{T} \right\rfloor \right) \right\} \right] \right]\end{aligned}\quad (54)$$

ここで, i に関する和に関して

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=0}^1 (-1)^i \left\{ \frac{(t-t_i)^3}{3T} + \frac{(t-t_i)^2}{2} + \frac{T(t-t_i)}{6} \right\} \\ & = -\{\mathcal{G}_t(t-t_0) + \mathcal{G}_f(t-t_0)\} \quad (55) \end{aligned}$$

が成り立つことから, 式(54)は次式のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} u(t-t_0) \tilde{\mathcal{X}}_2^n(t) &= u(t-t_0) \left[\mathcal{S}(t) \right. \\ & - \sigma_0 \sum_{i=0}^1 (-1)^i \left[-\frac{T}{6} \left(t-t_i - T \left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \right. \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1}{T} \left(t-t_i - T \left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \right\} \\ & \times \left. \left. \left\{ 1 - \frac{2}{T} \left(t-t_i - T \left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \right\} \right] \right] \right] \quad (56) \end{aligned}$$

初期切り換え時刻 t_0 の値は式(53)により厳密に求められるので, 式(56)で得られた結果を解の周期性から $t < t_0$ へ拡張することにより, 対称基本周期解は以下のように大域的かつ厳密に求められる.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}_2^n(t) &= \mathcal{S}(t) - \sigma_0 \sum_{i=0}^1 (-1)^i \mathcal{G} \left(t-t_i - T \left\lfloor \frac{t-t_i}{T} \right\rfloor \right) \\ \mathcal{G}(t) &\equiv -\frac{T}{6} t \left(1 - \frac{t}{T} \right) \left(1 - 2 \frac{t}{T} \right) \quad (57) \end{aligned}$$

以上によって, 対称基本周期解は粘性減衰 ζ の有無によらず, 線形系の定常解である周期関数 $\mathcal{S}(t)$ と不連続な非線形性の影響を集約した基本的な連続周期関数を切り換え時刻だけシフトしたものの和で大域的に表されることが明らかとなった.

4. 結 言

不連続な区分線形特性を有する質量・ダンパー系の強制振動に発生する対称基本周期解をフィードバック重畳法により厳密に求める方法として「初期値補正拡張法」を提案し, 以下の知見が得られた.

1. 不連続な非線形性に起因して発生する無限個の周期的擬フィードバック応答は, 初期時間以降の未来に向かう解のトレンド成分とオフセット成分を補正することによって対称周期化できる.
2. 上記の補正項は, 初期値応答と初期入力応答の和がトレンド成分とオフセット成分を相殺する条件から, 無限和を評価することなく導出できる.
3. この方法によって得られた値を初期値とする一般解から, Cesàro の総和法によって得られたものと同一の対称基本周期解の厳密な大域表現が得られる.

文 献

- (1) 今村仁, 鈴木浩平, 区分的線形振動系における一般解の大域表現と標準形 (非線形性が不連続な場合), 機論, 57-541, C(1991), 2811-2818.
- (2) 今村仁, 鈴木浩平, 区分線形振動系の一般解の大域表現と標準形 (衝突振動系の場合), 機論, 64-627, C(1998), 4167-4175.
- (3) 今村仁, 鈴木浩平, 衝突振動系の一般解に現れる再帰的フィードバック構造, 機論, 66-645, C(2000), 1468-1474.
- (4) 今村仁, 鈴木浩平, 区分線形振動系の周期解の標準形 (フィードバック重畳法の提案), 機論, 64-617, C(1998), 36-44.
- (5) 今村仁, 鈴木浩平, 衝突振動系の定常応答と周期解の一般形 (停滞を伴わない場合), 機論, 67-653, C(2001), 23-29.
- (6) 今村仁, 鈴木浩平, ばね剛性 0 の衝突振動系における周期解 (Cesàro の総和法による対称基本周期解の導出), 機論, 70-690, C(2004), 325-332.
- (7) 今村仁, 鈴木浩平, ばね剛性 0 の衝突振動系における周期解 (初期値補正拡張法による対称基本周期解の導出), 機論, 70-690, C(2004), 333-340.
- (8) 今村仁, 鈴木浩平, 不連続な区分線形特性を有する質量・ダンパー系の強制振動における周期解 (Cesàro の総和法による対称基本周期解の導出), 機論, 70-691, C(2004).
- (9) 清水辰次郎, 「非線形振動論」, (1965), 114-122, 培風館.
- (10) Shaw, S. W., Tung, P. C., "The Dynamic Response of a System with Preloaded Compliance", Trans. ASME, J. Dyn. Syst., Meas., Cont., 110(1988), 278-283.
- (11) Lipscomb, T., Mickens, R. E., "Exact Solution to the Antisymmetric, Constant Force Oscillation Equation", J. Sound and Vib., 169-1(1994), 138-140