多層・高次変形有限要素による積層制振材の振動・減衰特性解析*

(第1報, 有限要素定式化と拘束型 CFRP 積層制振はりへの適用)

鈴木 浩 治^{*1}, 影 山 和 郎^{*2}
金 原 勲^{*3}, 船 見 国 男^{*1}Vibration Analysis and Damping Prediction of Damped Composite
Laminates by Using Multilayer Higher-Order-Deformable Finite Elements
(1st Report, Finite Element Formulation and Applications to
CFRP Laminates with Constrained Damping Layers)Kohji SUZUKI^{*4}, Kazuro KAGEYAMA,
Isao KIMPARA and Kunio FUNAMI^{*4} Department of Mechanical Science and Engineering, Chiba Institute of Technology,
2-17-1 Tsudanuma, Narashino-shi, Chiba, 275-0016 Japan

Multilayer (ML) plate/shell finite elements (FEs) based on a versatile higher-order-deformable (HOD) theory are developed for free vibration analysis and damping prediction of damped composite laminates. The developed FEs allow one to arrange through-the-thickness degrees of freedom (DOF) by specifying the degrees of multilayer discretization (ML, or Equivalent-Single-Layer: ESL) and deformation assumptions (First-Order-Shear-Deformable: FOSD, or HOD). By comparing the numerical results of the present FEs with each other and the available experimental results, numerical accuracies of four different types of rough-the-thickness DOF arrangement, that is, ESL/FOSD, ESL/HOD, ML/FOSD and ML/HOD, are investigated for free vibrations of CFRP laminates with constrained viscoelastic damping layers.

Key Words: Finite Element Method, Free Vibration, Damping, Modal Loss Factor, Composite Laminates, Multilayer Theory, Higher-Order-Deformable Theory, First-Order-Shear-Deformable Theory

1. 緒 言

軽量化の要請の大きい航空宇宙分野で広く用いられる炭素繊維強化プラスチック (CFRP) 等の積層複合材料は, 面外せん断剛性が面内剛性に比べ小さいことや板厚方向に材料特性が不連続に変化することにより, 均質等方薄板には見られない高次せん断変形や多層のジグザグ変形が生じる。従って, この多層の構造材料に適した数値解析モデル (つまり各種の積層板殻理論) の提唱とそれらの精度・妥当性が検討されている⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。

ところで, 図1に示すような層間に粘弾性体を挿入した拘束型積層制振材^{(5), (6)}は, 静的に剛な CFRP 層と柔な粘弾性体層とが交互に積層されており, 曲げモード時において粘弾性体層が著しく面外せん断変形したジグザグ変形を意図的に発生させ, その結果粘弾性体

層に集中することになるせん断ひずみエネルギーを通じて減衰特性を向上させる機構を持つ。従って, 拘束型積層制振材の数値解析モデルは本質的に多層変形および面外せん断変形を含んだものであるべきである。

Fig.1 A damped composite laminate with constrained viscoelastic damping layers

拘束型制振構造として特に粘弾性三層形制振鋼板については, いわゆる Ross-Kerwin-Ungar モデル⁽⁷⁾と呼ばれる三層積層はりモデルに基づいた動特性・減衰特性解析が過去に精力的になされてきた⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾。また, 三層に限定せずより一般的な多層積層板を扱った研究も少なからずある^{(6), (11), (12)}。

一方, 平板や円筒殻といった特定形状だけでなく3次元の任意形状を扱え, より実用的であるとの理由から, 有限要素法 (FEM) により拘束型制振構造をモデ

* 原稿受付 2003年7月1日。

^{*1} 正員, 千葉工業大学工学部 (☎ 275-0016 習志野市津田沼 2-17-1)。

^{*2} 正員, 東京大学工学系研究科 (☎ 113-8658 東京都文京区本郷 7-3-1)。

^{*3} 正員, 金沢工業大学高度材料科学研究開発センター (☎ 924-0838 松任市八東 3-1)。

E-mail: kjsuzuki@pf.it-chiba.ac.jp

ル化し、さらにモードひずみエネルギー法⁽¹³⁾⁻⁽¹⁶⁾を適用しその減衰特性を評価する手法が普及している⁽¹⁷⁾⁻⁽²¹⁾。本手法によれば、積層構造を連続体ソリッド要素にて積層内部をも完全に要素分割して固有値解析が実施出来さえすれば、原理的には形状や積層総数に依らずいかなる構造の振動・減衰特性もその評価が可能なのである。しかし、現在の計算機の処理能力では未だこの要求を満たすには至っておらず、このソリッド要素によるフル・メッシュ分割を代替する新たな有限要素モデルを考案する必要がある。例えば、節点を中央面から表面上へオフセットさせた厚肉シェル要素2枚でソリッド要素を挟んだ三層有限要素^{(17), (18), (21)}は、その最も成功した例であろう。ただし、この解析手法をより汎用化させるためには、積層数を限定しない、より一般性と拡張性のある要素モデルの提案が必要である。

そこで著者は、著者らの提案する多層・高次変形有限要素⁽²²⁾をベースに種々の要素モデルを派生させ、それらを拘束型積層制振材の振動・減衰特性評価へ適用することを試みている。具体的には、著者らの開発したFEM解析プログラムを用い、積層材を等価単層板 (Equivalent-Single-Layer: ESL) か多層板 (Multi-Layer: ML) のどちらかで積層材を厚さ方向に分割し、そしてさらに分割したそれぞれの層に対し一次せん断変形仮定 (First-Order-Shear-Deformable: FOSD) か高次変形仮定 (Higher-Order-Deformable: HOD) のどちらかを設定することにより、積層材の解析モデルを構築する。そして、本報に先立ち、最も多自由度なモデルである多層・高次変形 (ML/HOD) モデルを用いて、層間に粘弾性樹脂を挿入した積層はりおよび積層サンドイッチはりの振動・減衰特性を解析・評価し、その結果を著者らによる実験結果および汎用 FEM コード中の等価単層・一次せん断変形シェル要素による解析結果と比較し、これら積層制振材を精度良く解析するためには、少なくとも多層化または高次変形化のどちらかを施した有限要素モデルが必要なることを示した⁽²³⁾。ただし、多層化および高次変形化がそれぞれの程度解析精度の向上に寄与するかについては今まで詳しく検討してこなかった。そこで本報では、ソリッド要素のフル・メッシュ分割に替わる新たな有限要素モデルの候補として、ESL/FOSD, ESL/HOD, ML/FOSD, ML/HOD の4タイプを検討対象とし、粘弾性樹脂層を有するCFRP積層制振材に対して実固有振動解析およびモードひずみエネルギー法による損失係数評価を4タイプそれぞれのモデルを用いて実施し、それらの解析精度を明らかにする。そして、その結果を基に、多層化および高次変形化の最も妥当な組み合わせについて検討する。

2. 有限要素の定式化

本研究において述べている多層・高次変形要素とは、単独の要素というよりはむしろ、図2に示すように、高次変形シェル要素などの各種等価単層要素が積み重なった、要素クラスタとも呼ぶべき要素集合体の便宜的な呼び名である。

2・1 基準となるシェル形状の定義 図2(a)に、要素を多層積み重ねる際に基準となるシード節点とシード要素を示す。

(a) Eight-node shell reference surface and global and local coordinate systems

(b) Cross-section of multilayered shell

(c) through-the-thickness modelling

(d) higher-order deformation of k^{th} layer

Fig.2 Multilayer higher-order-deformable finite elements

一方、図 2 (b) は、積層材の多層分割の例であり、これらの情報より、第 k 番目の層の形状は次式により与えられる。なお、分割後の層自身がさらにその内部にラミナを含むサブラミネートであっても構わない。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^{(k)} = \sum_{j=1}^8 \phi_j \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix}^{(k)} + \sum_{j=1}^8 \phi_j \frac{h_j^{(k)}}{2} \zeta \hat{\mathbf{v}}_{n,j} \quad (1)$$

ここで、 $\phi_j(\xi, \eta)$ は 8 節点 2 次の形状関数である。 $\hat{\mathbf{v}}_{n,j}$ は積層材の中央面に垂直な単位ベクトルであり、その中央面に接する単位ベクトル $\hat{\mathbf{v}}_{L,j}$ 、 $\hat{\mathbf{v}}_{T,j}$ も導入し、これら互いに直交するベクトルにより節点および要素内任意点での方向余弦 μ_j および μ'_j が次のように定まる。

$$\mu_j = [\hat{\mathbf{v}}_{L,j} \quad \hat{\mathbf{v}}_{T,j} \quad \hat{\mathbf{v}}_{n,j}] \quad (2)$$

$$\mu'_j = [\hat{\mathbf{v}}'_L \quad \hat{\mathbf{v}}'_T \quad \hat{\mathbf{v}}'_n] = \sum_{j=1}^8 \phi_j [\hat{\mathbf{v}}_{L,j} \quad \hat{\mathbf{v}}_{T,j} \quad \hat{\mathbf{v}}_{n,j}] \quad (3)$$

2.2 各層内における定式化 多層分割の仕方を決定した後に、分割された各層に対してどういったタイプの要素を割り当てるかを決めて、この多層積み重ね要素集合体の厚さ方向への変位自由度のアレンジが確定する。図 2 (c) にその一例を示す。本要素では、5 自由度の一次せん断変形シェル要素 (FOSD 要素、いわゆる通常の厚肉シェル要素) 、

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix}^{(k)} = \sum_{j=1}^8 \phi_j [\mu'_j]^T \mu_j \begin{Bmatrix} U'_0 \\ V'_0 \\ W'_0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} U'_1 \\ V'_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

および図 2 (d) に図示するような 11 自由度の高次変形シェル要素 (HOD 要素) 、

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix}^{(k)} = \sum_{j=1}^8 \phi_j [\mu'_j]^T \mu_j \begin{Bmatrix} U'_0 \\ V'_0 \\ W'_0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} U'_1 \\ V'_1 \\ W'_1 \end{Bmatrix} + Z^2 \begin{Bmatrix} U'_2 \\ V'_2 \\ W'_2 \end{Bmatrix} + Z^3 \begin{Bmatrix} U'_3 \\ V'_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 $Z^{(k)} = \frac{h_j^{(k)}}{2} \zeta : -1 \leq \zeta \leq 1$

の 2 種類の要素のうちどちらかを指定できる。なお、式 (4) や式 (5) に示される変位成分に付されるプライム記号はその量がシェルローカル座標系にて定義されていることを表している。そして、一般化変位サブベクトル $\mathbf{U}^{(k)}$ を次式により定義する。

$$[\mathbf{U}^{(k)}]^T = \begin{cases} \{U'_0 V'_0 W'_0 U'_1 V'_1 W'_1 U'_2 V'_2 W'_2 U'_3 V'_3\}^{(k)} : \text{HOD} \\ \text{or} \\ \{U'_0 V'_0 W'_0 U'_1 V'_1\}^{(k)} : \text{FOSD} \end{cases} \quad (6)$$

なお、HOD 要素の 11 個の一般化変位成分には、

- $U'_0 V'_0 W'_0$: 層中央面並進変位(面内 0 次・面外 0 次)
- $U'_1 V'_1$: 層中央面上の法線の微小回転角(面内 1 次)
- W'_1 : 層中央面上の法線の伸縮量(面外 1 次)
- $U'_2 V'_2$: 層内高次変形係数(面内 2 次)
- W'_2 : 層内高次変形係数(面外 2 次)
- $U'_3 V'_3$: 層内高次変形係数(面内 3 次)

なる物理的意味がある。さらに、この一般化変位サブベクトルの第 k 層内任意点への内挿には、式 (1) に示した要素形状の内挿に用いたのと同じ形状関数を用いる。

$$\mathbf{U}^{(k)} = \sum_{j=1}^8 \phi_j \mathbf{U}_j^{(k)} \quad (7)$$

次に、微小変形のもとでのひずみ-変位関係式、

$$\epsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

に、式 (4) または式 (5) で定義され、式 (7) により節点値をもとに内挿される変位を代入すれば、節点における一般化変位ベクトル $\mathbf{U}_j^{(k)}$ から一般化ひずみベクトル $\epsilon_{mb}^{(k)}$ および $\epsilon_{sh}^{(k)}$ を求める関係式として、

$$\epsilon_{mb}^{(k)} = \sum_{j=1}^8 \mathbf{B}_{mb,j}^{(k)} \mathbf{U}_j^{(k)}, \quad \epsilon_{sh}^{(k)} = \sum_{j=1}^8 \mathbf{B}_{sh,j}^{(k)} \mathbf{U}_j^{(k)} \quad (9)$$

が得られる。ここで、

$$[\epsilon_{mb}^{(k)}]^T = \begin{cases} \{E'_{x0} E'_{y0} E'_{xy0} E'_{x1} E'_{y1} E'_{xy1} \\ E'_{x2} E'_{y2} E'_{xy2} E'_{x3} E'_{y3} E'_{xy3} E'_{z0} E'_{z1}\}^{(k)} : \text{HOD} \\ \text{or} \\ \{E'_{x0} E'_{y0} E'_{xy0} E'_{x1} E'_{y1} E'_{xy1}\}^{(k)} : \text{FOSD} \end{cases} \quad (10)$$

$$[\epsilon_{sh}^{(k)}]^T = \begin{cases} \{E'_{zx0} E'_{yz0} E'_{zx1} E'_{yz1} E'_{zx1} E'_{yz1}\}^{(k)} : \text{HOD} \\ \text{or} \\ \{E'_{zx0} E'_{yz0}\}^{(k)} : \text{FOSD} \end{cases} \quad (11)$$

である。そして、例えば、HOD 要素の場合、式 (10)、(11) に示される合計 20 個の一般化ひずみ成分により、その層内部の実際のひずみ分布が次に示されるような多項式分布にてモデル化できるとする。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{(k)} &= E_{x0}^{(k)} + Z^{(k)} E_{x1}^{(k)} + (Z^{(k)})^2 E_{x2}^{(k)} + (Z^{(k)})^3 E_{x3}^{(k)} \\ \varepsilon_y^{(k)} &= E_{y0}^{(k)} + Z^{(k)} E_{y1}^{(k)} + (Z^{(k)})^2 E_{y2}^{(k)} + (Z^{(k)})^3 E_{y3}^{(k)} \\ \varepsilon_z^{(k)} &= E_{z0}^{(k)} + Z^{(k)} E_{z1}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} &= E_{yz0}^{(k)} + Z^{(k)} E_{yz1}^{(k)} + (Z^{(k)})^2 E_{yz2}^{(k)} \\ \gamma_{zx}^{(k)} &= E_{zx0}^{(k)} + Z^{(k)} E_{zx1}^{(k)} + (Z^{(k)})^2 E_{zx2}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} &= E_{xy0}^{(k)} + Z^{(k)} E_{xy1}^{(k)} + (Z^{(k)})^2 E_{xy2}^{(k)} + (Z^{(k)})^3 E_{xy3}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで、HOD 要素でさらに曲率の無い平板の場合、

$$\left. \begin{aligned} E_{x0}^{(k)} &= \frac{\partial U_0^{(k)}}{\partial x'}, E_{x1}^{(k)} = \frac{\partial U_1^{(k)}}{\partial x'}, E_{x2}^{(k)} = \frac{\partial U_2^{(k)}}{\partial x'}, E_{x3}^{(k)} = \frac{\partial U_3^{(k)}}{\partial x'} \\ E_{y0}^{(k)} &= \frac{\partial V_0^{(k)}}{\partial y'}, E_{y1}^{(k)} = \frac{\partial V_1^{(k)}}{\partial y'}, E_{y2}^{(k)} = \frac{\partial V_2^{(k)}}{\partial y'}, E_{y3}^{(k)} = \frac{\partial V_3^{(k)}}{\partial y'} \\ E_{z0}^{(k)} &= W_1^{(k)}, E_{z1}^{(k)} = 2W_2^{(k)} \\ E_{yz0}^{(k)} &= V_1^{(k)} + \frac{\partial W_0^{(k)}}{\partial y'}, E_{yz1}^{(k)} = 2V_2^{(k)} + \frac{\partial W_1^{(k)}}{\partial y'}, E_{yz2}^{(k)} = 3V_3^{(k)} + \frac{\partial W_2^{(k)}}{\partial y'} \\ E_{zx0}^{(k)} &= U_1^{(k)} + \frac{\partial W_0^{(k)}}{\partial x'}, E_{zx1}^{(k)} = 2U_2^{(k)} + \frac{\partial W_1^{(k)}}{\partial x'}, E_{zx2}^{(k)} = 3U_3^{(k)} + \frac{\partial W_2^{(k)}}{\partial x'} \\ E_{xy0}^{(k)} &= \frac{\partial U_0^{(k)}}{\partial y'} + \frac{\partial V_0^{(k)}}{\partial x'}, E_{xy1}^{(k)} = \frac{\partial U_1^{(k)}}{\partial y'} + \frac{\partial V_1^{(k)}}{\partial x'} \\ E_{xy2}^{(k)} &= \frac{\partial U_2^{(k)}}{\partial y'} + \frac{\partial V_2^{(k)}}{\partial x'}, E_{xy3}^{(k)} = \frac{\partial U_3^{(k)}}{\partial y'} + \frac{\partial V_3^{(k)}}{\partial x'} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

であり、式(9)において $U_j^{(k)}$ と $\varepsilon_{mb}^{(k)}$ および $\varepsilon_{sh}^{(k)}$ との関係マトリックス $\mathbf{B}_{mb,j}^{(k)}$ および $\mathbf{B}_{sh,j}^{(k)}$ はこの式(13)をもとに定義される。

一方、第 k 層サブラミネート内の第 l 番目のラミナに関する応力-ひずみ関係式は、

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy} \end{bmatrix}^{(k,l)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k,l)} \begin{bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \varepsilon'_z \\ \gamma'_{yz} \\ \gamma'_{zx} \\ \gamma'_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (14)$$

ここで、 $\bar{Q}_{pq}^{(k,l)}$ ($p, q=1, 2, 3, 6, p \leq q$ or $p, q=4, 5, p \leq q$) は、配向角に従って変換した弾性係数である⁽²⁴⁾。さらに、各応力成分を層厚さ方向に積分した一般化合応力と一般化ひずみとの間の関係は以下のような行列形式で表すことができる。

$$\sigma_{mb}^{(k)} = \mathbf{D}_{mb}^{(k)} \cdot \varepsilon_{mb}^{(k)}, \quad \sigma_{sh}^{(k)} = \mathbf{D}_{sh}^{(k)} \cdot \varepsilon_{sh}^{(k)} \quad (15)$$

ここで、一般化合応力 $\sigma_{mb}^{(k)}$ および $\sigma_{sh}^{(k)}$ は、例えば HOD 要素の場合は、

$$\begin{aligned} [\sigma_{mb}^{(k)}]^T &= \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left\{ \sigma'_x \sigma'_y \tau'_{xy} Z \sigma'_x Z \sigma'_y Z \tau'_{xy} \right. \\ &\quad \left. Z^2 \sigma'_x Z^2 \sigma'_y Z^2 \tau'_{xy} Z^3 \sigma'_x Z^3 \sigma'_y Z^3 \tau'_{xy} \sigma'_z Z \sigma'_z \right\}^{(k)} dZ \end{aligned} \quad (16)$$

$$[\sigma_{sh}^{(k)}]^T = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \left\{ \tau'_{zx} \tau'_{yz} Z \tau'_{zx} Z \tau'_{yz} Z^2 \tau'_{zx} Z^2 \tau'_{yz} \right\}^{(k)} dZ \quad (17)$$

と定義される。行列 $\mathbf{D}_{mb}^{(k)}$ および $\mathbf{D}_{sh}^{(k)}$ はそれぞれ、一般化合応力-ひずみ関係マトリックスの面内/曲げ/面外直成分および面外せん断成分に関するものである。

以上より、第 k 層内任意点での一般化合応力ベクトル $\sigma_{mb}^{(k)}$ 、 $\sigma_{sh}^{(k)}$ は、節点での一般化変位サブベクトル $U_j^{(k)}$ から次式により求められ、

$$\sigma_{mb}^{(k)} = \sum_{j=1}^8 [\mathbf{DB}]_{mb,j}^{(k)} U_j^{(k)}, \quad \sigma_{sh}^{(k)} = \sum_{j=1}^8 [\mathbf{DB}]_{sh,j}^{(k)} U_j^{(k)} \quad (18)$$

さらに、一般化ひずみエネルギー密度関数 $w_{total}^{(k)}$ は次式にて求めることができる。

$$w_{total}^{(k)} = w_{mb}^{(k)} + w_{sh}^{(k)} = [\varepsilon_{mb}^{(k)}]^T \cdot \sigma_{mb}^{(k)} + [\varepsilon_{sh}^{(k)}]^T \cdot \sigma_{sh}^{(k)} \quad (19)$$

一方、第 k 層内部任意点に作用する一般化慣性力 $\mathbf{f}^{(k)}$ は、

$$\mathbf{f}^{(k)} = - \sum_{j=1}^8 \mathbf{I}^{(k)} \mathbf{N}_j^{(k)} \ddot{U}_j^{(k)} \quad (20)$$

にて表せる。ここで、 $\mathbf{I}^{(k)}$ は一般化慣性質量マトリックスであり、 $\mathbf{N}_j^{(k)}$ は形状関数マトリックスである。また、 $\ddot{U}_j^{(k)}$ は節点での一般化加速度ベクトルである。

2・3 各層間における定式化 完全接合した第 k 層と第 $k+1$ 層との層間界面上での変位連続条件は、例えば HOD 平板要素の場合なら、

$$\left. \begin{aligned} g_x^{(k)} &= U_0^{(k+1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} U_1^{(k+1)} + \frac{(h^{(k+1)})^2}{4} U_2^{(k+1)} - \frac{(h^{(k+1)})^3}{8} U_3^{(k+1)} \\ &\quad - U_0^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2} U_1^{(k)} - \frac{(h^{(k)})^2}{4} U_2^{(k)} - \frac{(h^{(k)})^3}{8} U_3^{(k)} = 0 \\ g_y^{(k)} &= V_0^{(k+1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} V_1^{(k+1)} + \frac{(h^{(k+1)})^2}{4} V_2^{(k+1)} - \frac{(h^{(k+1)})^3}{8} V_3^{(k+1)} \\ &\quad - V_0^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2} V_1^{(k)} - \frac{(h^{(k)})^2}{4} V_2^{(k)} - \frac{(h^{(k)})^3}{8} V_3^{(k)} = 0 \\ g_z^{(k)} &= W_0^{(k+1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} W_1^{(k+1)} + \frac{(h^{(k+1)})^2}{4} W_2^{(k+1)} \\ &\quad - W_0^{(k)} - \frac{h^{(k)}}{2} W_1^{(k)} - \frac{(h^{(k)})^2}{4} W_2^{(k)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

上式を行列形式で、節点一般化変位ベクトルを用い

て表すと,

$$\mathbf{g}^{(k)} = \{g_x, g_y, g_z\}^{(k)} \\ = \sum_{j=1}^8 \mathbf{G}_{LWJ}^{(k+1)} \mathbf{U}_J^{(k+1)} - \sum_{j=1}^8 \mathbf{G}_{UPJ}^{(k)} \mathbf{U}_J^{(k)} = \mathbf{0} \quad (22)$$

ここで $\mathbf{G}_{LWJ}^{(k+1)}$, $\mathbf{G}_{UPJ}^{(k)}$ は式 (21) に従って定まる層間界面変位と節点一般化変位ベクトルとの間の関係行列である。さらに, 式 (22) を拘束条件として課すことに伴い, 次の層間応力 $\mathbf{A}^{(k)}$ が新たな変数として導入される。

$$[\mathbf{A}^{(k)}]^T = \{A_x, A_y, A_z\}^{(k)} \quad (23)$$

2・4 全体運動方程式の導出 これまでに定式化された諸量を用い, 自由振動する積層材に対し, 変位境界条件を満たす仮想変位 $\delta \mathbf{x}$ がなす仮想仕事 $\delta \Pi$ は,

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W + \delta V \\ = \delta \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{K}_d \cdot \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{K}_a \cdot \mathbf{x} \quad (24) \\ = \delta \mathbf{x}^T \cdot [\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_a) \cdot \mathbf{x}]$$

と表せる。ここで δU , δW および δV はそれぞれ内部仮想仕事, 外部仮想仕事および層間変位連続性に関する変分成分であり, それぞれ式 (19), 式 (20) および式 (22) をもとに仮想仕事量を評価すればそれぞれ求めることができる。なお, $\mathbf{K}_a$ の導出にはペナルティ法を利用した (22), (23) として,

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (25)$$

のときに本有限要素モデルが力学的に平衡状態にあるという一般化変分原理を適用することにより, 積層板自由振動問題を本多層・高次変形有限要素モデルにて表現した場合の全体運動方程式系を次式のように得る。

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{ただし, } \mathbf{K} = \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_a \quad (26)$$

ここで $\mathbf{K}$ および $\mathbf{M}$ はそれぞれ全体剛性行列および全体質量行列である。さらに調和振動を仮定すれば, 次式に示す自由振動する積層板に対する一般化固有値問題を得る。

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \lambda = \omega^2 \quad (27)$$

この一般化固有値問題をサブスペース法⁽²⁵⁾にて解き, 低次側の n 個の固有値 $\lambda_m = \omega_m^2; m=1, 2, \dots, n$ および固有ベクトル $\mathbf{d}_m$ が求まる。さらに, モードひずみエネルギー法^{(13), (14)}を用いることにより, 積層材のモード損失係数 η_m^c を次式により評価することができる。

$$\eta_m^c = \frac{\sum_{k=1}^{N_k} \eta_m^{(k)} W_m^{(k)}}{\sum_{k=1}^{N_k} W_m^{(k)}} \quad (28)$$

ただし, $W_m^{(k)}$ は m 番目の振動モード形状において第 k

層に蓄えられているひずみエネルギーであり, $\eta_m^{(k)}$ はその層のそのモードの周波数での材料損失係数である。

図3に解析プログラムの流れを示す。入力データにて層分割方法 (ESL か ML) および変形モデル (FOSD か HOD) を指定する。また, 材料特性の周波数依存性を考慮するためのイタレーションループも備えている。

Fig.3 Program flow chart

3. 数値解析例

次の4タイプの有限要素モデルを検討モデルに選ぶ。

- (1) 等価単層・一次せん断変形 (ESL/FOSD) モデル
- (2) 等価単層・高次変形 (ESL/HOD) モデル
- (3) 多層・一次せん断変形 (ML/FOSD) モデル
- (4) 多層・高次変形 (ML/HOD) モデル

以上4つのモデルを用いて, 図4に示す3種のCFRP擬似等方積層片持り (全長 200 mm, 幅 25 mm) の固有振動数及びモード損失係数を評価する。laminate#1は粘弾性樹脂層を含まない普通の積層材であるのに対し, laminate#2 および#3 はそれぞれ 0° 層と 60° 層との間, およびすべての層間にそれぞれ厚さ $h = 0.1\text{mm}$ の粘弾性樹脂層が挿入されている。

Fig.4 Three types of CFRP composite laminate with or without viscoelastic layers

CFRP (炭素繊維強化エポキシ樹脂) 層の材料特性は,

$$h = 0.144 \text{ mm} \quad \rho = 1610 \text{ kg/m}^3 \quad E_L = 454 \text{ GPa} \quad E_T = 4.23 \text{ GPa} \\ G_{LT} = 33.4 \text{ GPa} \quad \nu_{LT} = 0.326 \quad \nu_{TT} = 0.3$$

ここで, h は層厚さ, ρ は質量密度, E, G, ν はそれぞれヤング率, せん断弾性係数およびポアソン比であり, 添え字 L は繊維方向, T は繊維と直角方向を表す.

一方, 粘弾性樹脂層の材料特性は,

$$h = 0.1 \text{ mm} \quad \rho = 1560 \text{ kg/m}^3 \\ E'(f) = 0.0041 + 0.0322 \log(f) \text{ GPa} \\ E''(f) = \eta \cdot E' = -0.0077 + 0.0433 \log(f) \text{ GPa} \\ \nu = 0.3 \quad \eta(f) = E''(f)/E'(f)$$

ここで $E'(f)$ および $E''(f)$ はそれぞれ貯蔵弾性率および損失弾性率であり, $\eta(f)$ は材料損失係数である. これらは周波数 f (Hz) に依存した材料特性である.

解析モデルの基準となるシード有限要素のメッシュは 32 分割 (幅方向に 2 分割, 長さ方向に 16 分割) とした. 図 5 に ESL/FOSD モデルを用いて得られた laminate#1 の曲げ 1 次～3 次までのモード形状を示す.

Fig.6 Natural frequencies

Fig.5 Modal shapes for the CFRP laminate

図 6 に固有振動数を示す. 粘弾性樹脂層を含まない通常の積層材である laminate#1 の場合, どの数値モデルもほぼ同じ値を与え, 実測値⁽²³⁾とも良く一致した. それに対し, 粘弾性樹脂層が挿入された laminates#2 および#3 では, 多層モデル (ML/FOSD と ML/HOD) の解析結果は実測値に良く合うのに対し, 等価単層モデル (ESL/FOSD と ESL/HOD) では剛な結果となった.

図 7 に固定端部付近 ($x = 2.36 \text{ mm}, y = -1.41 \text{ mm}$) での変位 u の板厚方向分布をプロットする. laminate#1 に対しては, どの数値モデルも同一の変位分布を与え, laminate#2 や#3 の場合, 多層モデルの ML/FOSD と ML/HOD は変位分布については多層的なジグザグ変位分布を正しく表しているのに対し, 等価単層モデルの ESL/FOSD と ESL/HOD はそのようなジグザグ変形をモデル化できず, 虚偽の変位分布であることが分かる.

Fig.7 Displacement distributions through-the-thickness

図8は laminate#2 および#3 のモード損失係数の比較である。まず図8(a)に示される曲げ1次モードについては、実験値⁽²³⁾も得られており、等価単層モデル (ESL/FOSD, ESL/HOD) の評価したモード損失係数は、実験による実測値のおよそ1~2割程度となり、また多層モデル (ML/FOSD, ML/HOD) の評価したものは実測値のおよそ6割割程度となった。実験結果は、粘弾性樹脂層の減衰のみならず、CFRP 層の減衰や固定端部の緩みなどによる摩擦減衰など振動減衰に関するすべての要因を含んだ結果としてのモード損失係数が測定されているわけであり、粘弾性樹脂層の材料損失係数だけしか考慮していない本 FEM 解析結果よりもそれが大きくなることは不自然ではない。ただし、そのことを考えても等価単層モデル (ESL モデル) の結果は他と比べて明らかに小さ過ぎる。このことは、図8(b)および(c)にそれぞれ示されている曲げ2次および3次の場合さらに顕著であり、実験値は得られていないので解析結果同士の比較だけになるが、ESL モデルの解析結果は多層モデル (ML モデル) のそれに比べて非常に小さく、明らかに偽りの値である。なお、

ML/FOSD と ML/HOD の両多層モデル間の差は小さいことが分かる。つまり、ML モデルでさえあれば、変位仮定は FOSD で十分であることが示唆されている。

図9に固定端部付近におけるひずみエネルギー密度関数 w_{total} の板厚方向分布を示す。粘弾性樹脂層を持たない laminate#1 では、ひずみエネルギー密度分布の4タイプ全数値モデル間で、分布の差異はほとんどない。ところが、laminate#2や#3の場合、多層モデルの ML/FOSD と ML/HOD は粘弾性樹脂層に非常に大きなひずみエネルギーの集中を示す結果を与えているのに対し、等価単層モデルの ESL/FOSD と ESL/HOD では、粘弾性樹脂層へのひずみエネルギーの集中が全く評価できていない偽りの分布を与えていることが分かる。なお、ML モデルの結果に見られる粘弾性樹脂層中に集中したひずみエネルギーは面外せん断成分である。また、ML モデルの場合、各層に高次変形を仮定した ML/HOD の精度は各層を一次せん断変形とした ML/FOSD と大きな差がなく、計算コストのことを考慮すれば、粘弾性樹脂層を含む本解析対象に対しては ML/FOSD モデルが最適であることがこの結果からも示唆されている。

Fig.8 Modal loss factors

Fig.9 Strain energy density distributions through-the-thickness

4. 結 言

積層制振材の振動・減衰特性を高精度に評価するために多層・高次変形有限要素を定式化した。そして、定式化された本要素をベースに種々の要素モデルを考案し、それら要素の多層化や高次変形化の程度と解析精度との関係を調べる目的で、それらを用いて粘弾性樹脂層を有する CFRP 擬似等方積層はりの曲げの固有振動数とモード損失係数を解析・評価した。

その結果、層間に粘弾性樹脂層を全く含まない通常の積層板では、固有振動数については、等価単層モデル (ESL/FOSD や ESL/HOD) でも多層モデル (ML/FOSD や ML/HOD) でも解析結果に大きな差異は見られなかった。つまり、通常の CFRP 積層板の振動問題を解析するためには、等価単層・一次せん断変形仮定の ESL/FOSD モデルで十分であることが確認された。一方、層間に粘弾性樹脂層を挿入した拘束型積層制振材に対しては、実験での実測結果や多層モデル (ML モデル) による解析結果と比較した結果、単層モデル (ESL モデル) を用いたのでは固有振動数も損失係数も精度の悪い結果を与えることが分かった。これは、ESL モデルの表す厚さ方向の変位分布やひずみエネルギー密度分布が明らかに虚偽であるためである。したがって、このような拘束型積層制振材の振動・減衰特性解析には多層モデル (ML モデル) を必ず用いなければならないということが分かった。ただし、ML/FOSD と ML/HOD との解析結果の差はほとんど見られないので、計算コストの点を考慮すれば、多層・一次せん断変形モデル ML/FOSD が最適であると言える。

文 献

- (1) 成田吉弘, 複合材料構造物のモデリングと振動問題における研究展望, 機論, 59-565, C(1993), 2593-2599.
- (2) 成田吉弘, 連続体の振動解析に関する研究展望 (はり, 平板, 殻の振動問題), 機論, 61-583, C(1995), 738-745.
- (3) 成田吉弘・太田佳樹・森賀茂樹, 対称積層されたクロスプライ厚肉長方形板の三次元振動解析, 機論, 61-583, C(1995), 842-848.
- (4) 太田佳樹・成田吉弘・長崎健太, 繊維強化複合材料の減衰評価に用いる各種理論について, 機講論, No. 01-72 (2002-1), 239-242.
- (5) 藤本淳・田村徹也・金原勲・谷本敏夫, CFRP と制振材料から構成される制振複合材料の曲げ振動減衰特性, 日本複合材料学会誌, 20-4 (1994), 144-153.
- (6) 末益博志・佐藤伸朗, 層間に減衰材料を有する複合材料積層梁の減衰特性, 日本航空宇宙学会誌, 44-505 (1996), 112-119.
- (7) Ross, D., Ungar, E.E. and Kerwin, E.M., Jr., *Structural Damping* (Ed. Ruzica, J.E.), Sec. 3, (1959), Pergamon Press.
- (8) 鹿内元治・佐藤喜一・福野克哉, 粘弾性長方形サンドイッチ板の減衰効果, 機論, 57-533, C(1991), 69-75.
- (9) 宇津野秀夫・杉本明男・木村康正・田中俊光, 粘弾性三層形制振材料の動特性予測に関する研究 (第1報, RKU モデルを用いた三層ばり振動周波数応答関数の予測), 機論, 57-540, C(1991), 2548-2553.
- (10) 遠藤紘・伊藤耿一・柴田勝久・丸岡邦明・門脇伸生, 粘弾性樹脂をコアとする三層積層板の振動減衰特性に及ぼす機械的振動条件の影響, 機論, 61-585, C(1995), 1873-1878.
- (11) Alam, N. and Asnani, N.T., Vibration and Damping Analysis of Multilayered Rectangular Plates with Constrained Viscoelastic Layers, *J. Sound Vib.*, 97-4 (1984), 597-614.
- (12) 出羽宏規・佐々木僚子・富樫勇, コア層を多分割した積層はりの制振特性 (両端固定五層はりの場合), 機論, 67-654, C(2001), 335-341.
- (13) Ungar, E.E. and Kerwin, E.M., Jr., Loss Factors of Viscoelastic Systems in Terms of Energy Concepts, *J. Acoust. Soc. Am.*, 34-7 (1962), 954-957.
- (14) Ni, R.G. and Adams, R.D., The Damping and Dynamic Moduli of Symmetric Laminated Composite Beams - Theoretical and Experimental Results, *J. Compos. Mater.*, 18-3 (1984), 104-121.
- (15) 青木義男・邊吾一・蓮見薫, CF/PEEK 積層材のダンピング解析と実験, 材料, 41-466 (1992), 1121-1125.
- (16) 松本金矢・細川健治・座古勝・小林博, 積層複合材料の減衰パラメータ同定法, 機論, 65-636, C(1999), 3129-3134.
- (17) Soni, M.L. and Bogner, F.K., Finite Element Vibration Analysis of Damped Structures, *AIAA J.*, 20-5 (1982), 700-707.
- (18) Johnson, C.D. and Kienholz, D.A., Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers, *AIAA J.*, 20-9 (1982), 1284-1290.
- (19) 赤松克児・山口蒼夫・金沢純一, 制振材積層平板の振動と音響放射, 機論, 65-633, C(1999), 1865-1872.
- (20) 井上喜雄・岡田徹・上田宏樹, 制振材料を付加した三次元構造物の減衰特性解析 (二層形積層制振構造の場合), 機論, 66-644, C(2000), 1089-1096.
- (21) 上田宏樹・岡田徹・田中俊光・井上喜雄, 修正モード歪エネルギー法による制振構造の振動解析, 機講論, No. 01-72 (2002-1), 225-230.
- (22) 鈴木浩治・金原勲・影山和郎, penalty 法型の高次変形有限要素の提案, 日本複合材料学会誌, 25-3 (1999), 109-119.
- (23) Suzuki, K., Kageyama, K., Kimpara, I., Hotta, S., Ozawa, T., Kabashima, S. and Ozaki, T., Vibration and Damping Prediction of Laminates with Constrained Viscoelastic Layers - Numerical Analysis by a Multilayer Higher-Order-Deformable Finite Element and Experimental Observations, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 10-1 (2003), 43-75.
- (24) Vinson, R.J. and Sierakowski, R.L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Material*, (1986), Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- (25) Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, (1996), Prentice Hall, London.