構造的な不確かさを含む線形離散時間システムに対する 過渡応答を考慮したロバスト制御*

大屋 英 稔^{*1}, 萩野 剛二郎^{*2}

Robust Control Giving Consideration to Transient Behavior for Linear Discrete-Time Systems with Structured Uncertainties

Hidetoshi OYA^{*3} and Kojiro HAGINO

^{*3} Department of Systems Engineering, The University of Electro-Communications,
1-5-1 Chofugaoka, Chofu-shi, Tokyo, 182-8585 Japan

In this paper, we present a robust controller design method which achieves performance robustness together with robust stability for linear discrete-time systems with structured uncertainties. The performance robustness means that comparing the transient behavior of the uncertain system with a desired one generated by the nominal system, the deterioration of control performance is suppressed and at the same time excessive control input is avoided. In this approach, the control law consists of a state feedback with a feedback gain designed by using the nominal system and a compensation input for the purpose of reducing the error between the real transient behavior and the desired one. The compensation input is determined so that an upper bound on a quadratic cost function is minimized directly without trial and error. We show that a condition for the existence of the compensation input minimizing the upper bound on the quadratic cost function is given in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Finally, numerical examples are presented.

Key Words: Error System, Compensation Input, Direct Minimization of the Upper Bound on the Quadratic Cost Function, Keeping Desired Transient Performance

1. ま え が き

近年、不確かさを含む線形多入出力システムに対し、2次コスト制御⁽¹⁾⁽²⁾やロバスト H_2 制御⁽³⁾⁽⁴⁾など、達成可能なパフォーマンスとの関係を明確にした形でのコントローラ設計法について盛んに研究がなされてきた。また、過渡応答特性の改善のために、安定性の確保に加え、閉ループ極に関する付加的な制約を満たすコントローラ設計法についてもいくつか提案されている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかしながら、一般の線形多入出力システムに対して、望ましい過渡応答特性を得るために、閉ループ極の存在領域をどのように選定すればよいかは明らかにされていない。さらに、これらの制御方式は最悪ケースに対して設計された単一の固定ゲインコントローラを用いているため、不確かさの摂動領域が実際の摂動幅より大きく見積もられた場合には保守的な結果となってしまうといった問題点がある。

この問題に対し、筆者らは線形不確定連続時間システムに対するレギュレータ問題において、ノミナルシステムを利用して生成した制御対象の望ましい軌道と

実際の応答を直接比較することにより、不確かさによる応答特性の劣化を抑制するコントローラ設計法を標準的な線形二次制御問題の拡張型として提案した⁽⁷⁾。文献⁽⁷⁾では不確かさの影響を補正するという観点から、制御則を状態フィードバック則と補償入力からなるものとし、補償入力を誤差システム(望ましい軌道と実際の応答とのずれ)に対する2次形式評価関数の上界値を最小化するように決定した。また、補償入力が存在するための十分条件がリカッチ方程式の可解性に帰着されることを示し、設計パラメータを設定する指針を与えた。文献⁽⁷⁾の制御方式は、不確かさに関するオンライン情報として、望ましい軌道と実際の応答との誤差情報をコントローラに反映させることにより、従来の固定ゲインによるロバスト制御方式に比べ、構造は複雑になるものの、より柔軟で適応的な制御系を構成することができる。しかしながら、文献⁽⁷⁾では設計パラメータをリカッチ方程式の正定対称解が存在する範囲で試行錯誤的に設定するため、2次形式評価関数の上界値の厳密な意味での最小化とはなっていない。

そこで、本論文では文献⁽⁷⁾の結果を線形離散時間システムに拡張し、2次形式評価関数の上界値を直接最小化することにより、試行錯誤的な手続きを踏むこと

* 原稿受付 2003年4月9日。

^{*1} 正員、電気通信大学システム工学科(〒182-8585 調布市調布ヶ丘1-5-1)。

^{*2} 電気通信大学システム工学科。

E-mail: hide-o@se.uec.ac.jp

なく、補償入力を設計することを考える。具体的には、構造的な不確かさのもとで、補償入力を制御対象とノミナルシステムからなる誤差システムに対する2次形式評価関数の上界値を直接最小化するように決定する。

本論文では、2次形式評価関数の上界値を直接最小化する補償入力が存在するための十分条件が線形行列不等式 (LMI) で記述されることを示し、数値例により本制御手法の有効性を検証する。なお、本論文で用いる記法は次の通りである。 A^T は行列 A の転置を表し、 $\text{Tr}\{A\}$ は行列 A のトレースを表す。また、 $\text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ は行列 A_i ($i = 1, \dots, n$) を要素にもつブロック対角行列、 I_n は n 次の単位行列を表す。さらに、 $E\{\cdot\}$ は期待値を示す。

2. 問題の記述

次式の線形不確定離散時間システムを考える。

$$x(k+1) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k) \quad (1)$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m$ は、それぞれ制御対象における状態、制御入力ベクトルであり、状態 $x(k)$ は完全に観測できるものとする。また、 $A(\theta), B(\theta)$ はそれぞれ適当なサイズとし、 $\theta(k) \in \mathbb{R}^N$ を未知パラメータとして次式のように記述されるものとする。

$$\left. \begin{aligned} A(\theta) &= A + \sum_{i=1}^N \theta_i(k) A_i \\ B(\theta) &= B + \sum_{i=1}^N \theta_i(k) B_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)における A, B はノミナル値を表す定数行列であり、 A_i, B_i は未知パラメータの構造を表す定数行列である。また、未知パラメータ $\theta \in \mathbb{R}^N$ は次式で記述される N 次元楕円体領域に属するものとし、 $\forall \theta \in \Delta$ に関して $(A(\theta), B(\theta))$ は可制御ペアであるとする。

$$\left. \begin{aligned} \Delta &\triangleq \{ \theta \in \mathbb{R}^N \mid \theta^T(k) \Sigma^{-1} \theta(k) \leq 1 \} \\ \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(1)において、未知パラメータ $\theta \in \mathbb{R}^N$ を無視したノミナルシステムは次式で記述されるものとする。

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k) \quad (4)$$

$\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^n, \bar{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ はそれぞれノミナルシステムにおける状態、制御入力ベクトルである。

本論文では、システムティックに制御対象の望ましい時間応答を生成するために、ノミナルシステムに対する線形2次制御問題を採用する(もちろん、極配置法など、他の設計手法を用いることも可能である)⁽⁷⁾。よく知られているように、最適制御入力 $\bar{u}(k)$ は

$$\bar{u}(k) = -K\bar{x}(k) \quad (5)$$

と与えられる。式(5)のフィードバックゲイン行列 K は次式のリカッチ方程式の正定対称解 P を用いて $K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$ と求められる。

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q \quad (6)$$

また、式(6)の $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ はそれぞれ準正定値、正定値の重み行列であり、所望の応答特性を実現するようにあらかじめ設定しておく。ただし、重み行列 Q は (H, A) が可観測ペアとなる行列 $H \in \mathbb{R}^{r \times n}$ を用いて $Q = H^T H$ と表されるものとする。このとき、式(5)の制御入力 $\bar{u}(k)$ を用いることによって得られるノミナルシステムの閉ループ系は漸近安定となる⁽⁸⁾。

式(1)の制御対象に対して、式(5)のゲイン行列 K を用いて次式の制御入力を施すことを考える⁽⁷⁾。

$$u(k) \triangleq -Kx(k) + v(k) \quad (7)$$

また、未知パラメータの影響をオンライン情報として利用するために、制御対象の実際の応答と望ましい軌道との誤差を $e(k) \triangleq x(k) - \bar{x}(k)$ と定義すると、式(1)、(4)、(5)、および(7)から誤差システムが

$$e(k+1) = \bar{A}(\theta)e(k) + B(\theta)v(k) + \bar{A}_e(\theta)\bar{x}(k) \quad (8)$$

と得られる。式(8)において、 $\bar{A}(\theta), \bar{A}_e(\theta)$ はそれぞれ $\bar{A}(\theta) = A(\theta) - B(\theta)K, \bar{A}_e(\theta) = \bar{A}(\theta) - (A - BK)$ を満たす行列である。さらに、式(8)の誤差システムに対して次式の2次形式評価関数を設定する。

$$J_e = \sum_{k=0}^{\infty} (e^T(k) Q_e e(k) + v^T(k) R_e v(k)) \quad (9)$$

$Q_e \in \mathbb{R}^{n \times n}, R_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は正定値の重み行列であり、制御対象の望ましい応答を得るように調整される。

本論文における制御系設計問題は、文献⁽⁷⁾のように設計パラメータを試行錯誤的に設定することなく、構造的な不確かさの存在のもとで、式(9)の2次形式評価関数の上界値を直接最小化する補償入力を設計することにより、安定性の確保に加えて不確かさによる過渡応答波形の劣化を抑制することである。

3. LMI による補償入力の設計

ここでは、制御対象の構造的変動のもとで式(9)の2次形式評価関数 J_e の上界値を直接最小化する補償入力 $v(k)$ が存在するための十分条件を導出する。

文献⁽⁷⁾と同様に補償入力 $v(k)$ を次式で定義する。

$$v(k) \triangleq -F_e e(k) \quad (10)$$

式(10)の F_e は補償ゲイン行列である。よって、提案するロバスト制御系の構成は図. 1 のようになる。

Fig. 1 Configuration of the proposed robust regulator

ここで、 $v(k) \triangleq -F_e e(k)$ と任意の正定値行列 $X_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、および $P_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に関して成立する関係式

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \{ e^T(k+1)X_e e(k+1) - e^T(k)X_e e(k) \\ & + \bar{x}^T(k+1)P_e \bar{x}(k+1) - \bar{x}^T(k)P_e \bar{x}(k) \} \\ & - e^T(\infty)X_e e(\infty) - \bar{x}^T(\infty)P_e \bar{x}(\infty) \\ & + e^T(0)X_e e(0) + \bar{x}^T(0)P_e \bar{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

を用いると式(9)の2次形式評価関数は

$$\begin{aligned} J_e &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^T(k) \left\{ (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e)^T X_e \right. \right. \\ & \quad \times (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e) - X_e + Q_e + F_e^T R_e F_e \} e(k) \\ & \quad + \bar{x}^T(k) \bar{A}_e^T(\theta) X_e (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e) e(k) \\ & \quad + e^T(k) (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e)^T X_e \bar{A}_e(\theta) \bar{x}(k) \\ & \quad + \bar{x}^T(k) (\bar{A}^T P_e \bar{A} - P_e + \bar{A}_e^T(\theta) X_e \bar{A}_e(\theta)) \bar{x}(k) \Big] \\ & - e^T(\infty)X_e e(\infty) - \bar{x}^T(\infty)P_e \bar{x}(\infty) \\ & + e^T(0)X_e e(0) + \bar{x}^T(0)P_e \bar{x}(0) \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^T(k) \quad \bar{x}^T(k) \right) \Phi_e(\theta) \begin{pmatrix} e(k) \\ \bar{x}(k) \end{pmatrix} \\ & - e^T(\infty)X_e e(\infty) - \bar{x}^T(\infty)P_e \bar{x}(\infty) \\ & + e^T(0)X_e e(0) + \bar{x}^T(0)P_e \bar{x}(0) \end{aligned} \quad (12)$$

と変形することができる。ここで、式(4)、(5)、および(8)の関係式を用いた。また、式(12)において、 $\bar{A}$ は $\bar{A} = A - BK$ なる漸近安定行列であり、 $\Phi_e(\theta) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ は次式で表される行列である。

$$\begin{aligned} \Phi_e(\theta) &= \begin{pmatrix} \Phi_{e11}(\theta) & \Phi_{e12}(\theta) \\ \Phi_{e12}^T(\theta) & \bar{A}^T P_e \bar{A} - P_e + \bar{A}_e^T(\theta) X_e \bar{A}_e(\theta) \end{pmatrix} \\ \Phi_{e11}(\theta) &= (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e)^T X_e (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e) \\ & \quad - X_e + Q_e + F_e^T R_e F_e \\ \Phi_{e12}(\theta) &= (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e)^T X_e \bar{A}_e(\theta) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、式(8)の誤差システムの漸近安定性、式(1)の制御対象の漸近安定性、および式(12)の2次形式評価関数の上界値について、次の補題を示しておく。

補題 3.1 式(13)の行列 $\Phi_e(\theta)$ に対して、行列不等式

$$\Phi_e(\theta) \leq 0 \quad \text{for } \forall \theta \in \Delta \quad (14)$$

を満足する補償ゲイン行列 F_e 、および正定値行列 $X_e > 0, P_e > 0$ が存在するとき、式(8)の誤差システムの漸近安定性、および式(1)の制御対象の漸近安定性が保証され、式(12)の2次形式評価関数 J_e の上界値が次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} J_e &\leq e^T(0)X_e e(0) + \bar{x}^T(0)P_e \bar{x}(0) \\ &\triangleq \mathcal{J}_e \quad \text{for } \forall \theta \in \Delta \end{aligned} \quad (15)$$

証明 3.1 式(8)の誤差システム、および式(4)、(5)より得られるノミナルシステムの閉ループ系からなる次式の拡大システムを考える。

$$\begin{pmatrix} e(k) \\ \bar{x}(k) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_e(\theta) \begin{pmatrix} e(k) \\ \bar{x}(k) \end{pmatrix} \quad (16)$$

ただし、 $\mathcal{A}_e(\theta)$ は次式で表される行列である。

$$\mathcal{A}_e(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) - B(\theta)F_e & \bar{A}_e(\theta) \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} \quad (17)$$

リヤプノフ関数の候補として、 $e(k)$ 、および $\bar{x}(k)$ に関する2次形式 $V(e, \bar{x}, k) \triangleq e^T(k)X_e e(k) + \bar{x}^T(k)P_e \bar{x}(k)$ を考え、式(16)の拡大システムの解軌道に沿って $\Delta V(e, \bar{x}, k) \triangleq V(e, \bar{x}, k+1) - V(e, \bar{x}, k)$ を計算すると、次式の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta V(e, \bar{x}, k) &= e^T(k) \{ (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e)^T X_e \\ & \quad \times (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e) - X_e \} e(k) \\ & \quad + \bar{x}^T(k) \bar{A}_e^T(\theta) X_e (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e) e(k) \\ & \quad + e^T(k) (\bar{A}(\theta) - B(\theta)F_e)^T X_e \bar{A}_e(\theta) \bar{x}(k) \\ & \quad + \bar{x}^T(k) (\bar{A}^T P_e \bar{A} - P_e + \bar{A}_e^T(\theta) X_e \bar{A}_e(\theta)) \bar{x}(k) \\ & = \begin{pmatrix} e^T(k) & \bar{x}^T(k) \end{pmatrix} \Phi_e(\theta) \begin{pmatrix} e(k) \\ \bar{x}(k) \end{pmatrix} \\ & \quad - e^T(k) (Q_e + F_e^T R_e F_e) e(k) \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、行列不等式 $\Phi_e(\theta) \leq 0$ for $\forall \theta \in \Delta$ を満たす補償ゲイン行列 F_e 、および正定値行列 X_e, P_e が存在すれば、式(18)より、2次形式 $V_e(e, \bar{x}, k)$ について

$$\Delta V(e, \bar{x}, k) \leq -e^T(k) (Q_e + F_e^T R_e F_e) e(k) \quad (19)$$

なる関係式が成り立つ。式(19)において、重み行列 Q_e, R_e は正定値行列であるので、2次形式 $V(e, \bar{x}, k)$ に

$$\Psi_e(\theta) = \begin{pmatrix} -S_e & 0 \\ 0 & \bar{A}^T P_e \bar{A} - P_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_e & W_e^T & S_e \bar{A}^T(\theta) - W_e^T B^T(\theta) \\ 0 & 0 & \bar{A}_e^T(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_e & 0 & 0 \\ 0 & R_e & 0 \\ 0 & 0 & S_e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_e & 0 \\ W_e & 0 \\ \bar{A}(\theta) S_e - B(\theta) W_e & \bar{A}_e(\theta) \end{pmatrix} \leq 0 \text{ for } \forall \theta \in \Delta \quad (24)$$

$$\Psi_e^*(\theta) = \begin{pmatrix} -S_e & 0 & S_e & W_e^T & S_e \bar{A}^T(\theta) - W_e^T B^T(\theta) \\ 0 & \bar{A}^T P_e \bar{A} - P_e & 0 & 0 & \bar{A}_e^T(\theta) \\ S_e & 0 & -Q_e^{-1} & 0 & 0 \\ W_e & 0 & 0 & -R_e^{-1} & 0 \\ \bar{A}(\theta) S_e - B(\theta) W_e & \bar{A}_e(\theta) & 0 & 0 & -S_e \end{pmatrix} \leq 0 \text{ for } \forall \theta \in \Delta \quad (25)$$

ついで次式の関係が成立する。

$$\Delta V(e, \bar{x}, k) < 0 \quad (20)$$

したがって、式(14)の行列不等式を満たす補償ゲイン行列 F_e 、および正定値行列 X_e, P_e が存在すれば、2次形式 $V(e, \bar{x}, k)$ は式(16)の拡大システムのリヤプノフ関数となり、式(16)の拡大システムの2次安定性⁽⁹⁾が保証される。このとき、 $e(k) \rightarrow 0$ for $k \rightarrow \infty$ となり、式(8)の誤差システムの漸近安定性が保証される。また、 $\bar{x}(k) \rightarrow 0$ for $k \rightarrow \infty$ 、および $e(k) \triangleq x(k) - \bar{x}(k)$ の関係を考慮すれば、 $x(k) \rightarrow 0$ for $k \rightarrow \infty$ となり、式(1)の制御対象の漸近安定性も保証される。

さらに、式(19)の両辺について、0 から ∞ までの和をとると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & e^T(\infty) X_e e(\infty) + \bar{x}^T(\infty) P_e \bar{x}(\infty) \\ & - e^T(0) X_e e(0) - \bar{x}^T(0) P_e \bar{x}(0) \\ & \leq - \sum_{k=0}^{\infty} e^T(k) (Q_e + F_e^T R_e F_e) e(k) \\ & = -J_e \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、式(16)の拡大システムが2次安定、すなわち $e(\infty) = \bar{x}(\infty) = 0$ であることより、式(21)は

$$\begin{aligned} J_e &= \sum_{k=0}^{\infty} e^T(k) (Q_e + F_e^T R_e F_e) e(k) \\ &\leq e^T(0) X_e e(0) + \bar{x}^T(0) P_e \bar{x}(0) \\ &= \mathcal{J}_e \end{aligned} \quad (22)$$

と等価である。したがって、2次形式評価関数の上界値は式(15)で与えられる。■

式(15)の2次形式評価関数の上界値は初期誤差 $e(0)$ 、およびノミナルシステムの初期値 $\bar{x}(0)$ に依存した形となっている。本論文では、これらの初期値に依存しない

形で補償入力 $v(k)$ を設計するために $X_e^* \triangleq \text{diag}(X_e, P_e)$ なる行列を導入し、 $e(0)$ と $\bar{x}(0)$ について、 $E\{e(0)\} = E\{\bar{x}(0)\} = 0$ 、および $E\{e(0)e^T(0)\} = E\{\bar{x}(0)\bar{x}^T(0)\} = I_n$ を仮定して得られる平均の意味での2次形式評価関数の上界値 $E\{\mathcal{J}_e\} = \text{Tr}\{X_e^*\}$ を最小化する問題を考える⁽¹⁾⁽¹⁰⁾。すなわち、次式の制約付き最適化問題を解くことを考える。

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{X_e, F_e, P_e} [\text{Tr}\{X_e^*\}] \text{ subject to} \\ & \text{eq.(14), } X_e > 0 \text{ and } P_e > 0 \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $S_e \triangleq X_e^{-1}$ 、 $W_e \triangleq F_e S_e$ ⁽¹⁰⁾ なる行列を導入して、式(14)の条件式 $\Phi_e(\theta) \leq 0$ for $\forall \theta \in \Delta$ の両側から $\text{diag}(S_e, I_n)$ をかけて整理すれば、式(24)が得られる。ここで、 $\Psi_e(\theta) \triangleq \text{diag}(S_e, I_n) \Phi_e(\theta) \text{diag}(S_e, I_n)$ である。さらにSchur complementを用いると、式(24)の行列不等式は式(25)のように変形することができる。式(25)は、 S_e, W_e 、および P_e に関する線形行列不等式(LMI)であるから、式(3)で表される N 次元楕円体領域 Δ を覆う最小の超直方体領域 $\bar{\Delta} \triangleq \{\theta \in \Re^N \mid |\theta_i(k)| \leq \sigma_i\}$ の 2^N 個の端点集合

$$\Delta_{\text{vex}} \triangleq \{\theta \in \Re^N \mid \theta_i = \sigma_i \text{ or } \theta_i = -\sigma_i\} \quad (26)$$

を考えると、 $\forall \theta \in \Delta$ に関して式(25)の行列不等式が成り立つことは、次式の行列不等式が成立することと等価である。

$$\Psi_e^*(\theta) \leq 0 \text{ for } \forall \theta \in \Delta_{\text{vex}} \quad (27)$$

さらに、 $S_e \triangleq X_e^{-1}$ の関係を考慮しつつ、 $\text{Tr}\{X_e^*\}$ の最小化を図るために

$$Z_e \geq X_e > 0 \iff \begin{pmatrix} Z_e & I_n \\ I_n & S_e \end{pmatrix} \geq 0 \quad (28)$$

$$Z_e^* \triangleq \text{diag}(Z_e, P_e) \quad (29)$$

を満たす 2 つの補助変数 $Z_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$, および $Z_e^* \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ を導入することにより, $Tr\{X_e^*\}$ を最小化するかわりに $Tr\{Z_e^*\}$ を最小化することを考える.

したがって, 式 (23) の制約付き最適化問題は, 次式の制約付き凸最適化問題に帰着される.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{Z_e, S_e, W_e, P_e} [Tr\{Z_e^*\}] \text{ subject to} \\ \text{eqs. (27) and (28), } S_e > 0 \text{ and } P_e > 0 \end{aligned} \quad (30)$$

式 (30) の制約付き凸最適化問題の最適解 $Z_e > 0, S_e > 0, W_e$, および $P_e > 0$ が存在すれば, 補償入力 $v(k)$ は次式のように求められる.

$$\begin{aligned} v(k) &\triangleq -F_e e(k) \\ F_e &= W_e S_e^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

なお, 補償入力 $v(k)$ を得るために解く必要のある式 (30) の制約付き凸最適化問題は MATLAB の LMI Control Toolbox や Scilab の LMITOOL など, 種々の LMI 求解ツールを用いて容易に解くことができる.

以上を定理にまとめると次のようになる.

定理 3.1 式 (12) の 2 次形式評価関数 J_e の上界値を直接最小化する補償入力 $v(k)$ が存在するための十分条件は, 次式の制約付き凸最適化問題の最適解 $Z_e > 0, S_e > 0, W_e$, および $P_e > 0$ が存在することである.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{Z_e, S_e, W_e, P_e} [Tr\{Z_e^*\}] \text{ subject to} \\ \text{eqs. (27) and (28), } S_e > 0 \text{ and } P_e > 0 \end{aligned}$$

ただし, $Z_e^* \triangleq \text{diag}(Z_e, P_e)$ を満たす行列である.

制約付き凸最適化問題の最適解 $Z_e > 0, S_e > 0, W_e$, および $P_e > 0$ が存在すれば, 補償入力 $v(k)$ は次式のように求められる.

$$\begin{aligned} v(k) &\triangleq -F_e e(k) \\ F_e &= W_e S_e^{-1} \end{aligned}$$

注意 3.1 本論文では, 確定系に対する状態フィードバック系を考えているため, 制御対象の初期状態 $x(0)$ を用いてノミナルシステムの初期値 $\bar{x}(0)$ を設定する, すなわち $\bar{x}(0) = x(0)$ とすることができる. このとき, 初期誤差は $e(0) = 0$ となり, 2 次形式評価関数の上界値は, 式 (15) より, 次式ようになる.

$$\mathcal{J}_e = \bar{x}^T(0) P_e \bar{x}(0) \quad (32)$$

さらに, この場合, 未知パラメータが実際には存在しない, すなわち $\theta = 0$ であれば, 制御対象の応答がノミナルシステムを利用して生成した望ましい軌道と一

致するだけでなく, 制御入力もノミナルシステムにおける制御入力と一致する⁽⁷⁾.

また, 特別な場合ではあるが, ノミナルシステムの初期値を $\bar{x}(0) = 0$ と設定とした場合, $e(k) = x(k)$ となることから, 式 (9) の 2 次形式評価関数は

$$J_e = \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k) Q_e x(k) + v^T(k) R_e v(k)) \quad (33)$$

と表され, 式 (10) より, 補償入力 $v(k)$ も $v(k) = -F_e x(k)$ となる. さらに, 2 次形式評価関数の上界値は, 式 (15) より次式のようになり, 2 次コスト保証制御に対応していることがわかる.

$$\mathcal{J}_e = x^T(0) X_e x(0) \quad (34)$$

ただし, 本制御方式と通常の 2 次コスト保証制御では, 解くべき最適化問題が異なるので, ノミナルシステムの初期値を $\bar{x}(0) = 0$ と設定としたからといって, 両者が一致するわけではないことに注意する.

4. 数 値 例

ここでは, 簡単な数値例を通して, 本制御方式の有効性を検証する. なお, 参考として, 文献⁽¹⁾に基づいた 2 次コスト保証制御についても数値シミュレーションを行った結果を示す. ただし, 文献⁽¹⁾に基づいた 2 次コスト保証制御においても本論文と同様に線形行列不等式 (LMI) を用いて設計した.

次式のように状態空間表現される線形不確定離散時間システムを考える.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} 0.75 + \theta_1(k) & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \theta_2(k) \end{pmatrix} u(k) \end{aligned}$$

ここで, 未知パラメータ $\theta_1(k), \theta_2(k)$ の摂動幅は, それぞれ $\theta_1(k) \in [-0.5, 0.5], \theta_2(k) \in [-0.25, 0.25]$ とあらかじめ見積もられているとする.

制御対象の望ましい軌道を生成するように式 (6) の重み行列 Q, R を $Q = 1.0I_2, R = 4.0$ と設定すると, 式 (5) のフィードバックゲイン行列 K は $K = (0.1239 \ 0.7814)$ と得られた.

次に補償入力 $v(k)$ を設計するために式 (9) の 2 次形式評価関数の重み行列 Q_e, R_e をそれぞれ $Q_e = 4.0I_2$ and $R_e = 1.0$ と設定し, 式 (30) の制約付き凸最適化問題を解くと提案した制御則が次式のように求められた.

$$\begin{aligned} u(k) &= -(0.1239 \ 0.7814) x(k) \\ &\quad - (0.4704 \ 1.0008) e(k) \end{aligned}$$

Fig. 2 Time response of $x_1(t)$: Case 1 Fig. 3 Time response of $x_2(t)$: Case 1

一方、制御対象に対する2次形式評価関数の重み行列 Q_r, R_r をそれぞれ $Q_r = 4.0I_2, R_r = 1.0$ と設定すると文献⁽¹⁾に基づいた2次コスト保証制御におけるフィードバックゲイン行列 K_r は次式のように得られた。

$$K_r = (0.6205 \ 1.8274)$$

ここでは、未知パラメータ $\theta_1(k)$ 、および $\theta_2(k)$ の変動パターンとして、以下の2通りのパターンを考える。

$$\begin{aligned} \text{Case 1): } \theta_1(k) &= -0.5 \cos(0.2\pi t) \\ \theta_2(k) &= 0.25 \cos(0.2\pi t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Case 2): } \theta_1(k) &= -0.1, \theta_2(k) = 0.05: 0 \leq t < 5 \\ \theta_1(k) &= -0.1, \theta_2(k) = -0.05: 5 \leq t < 10 \\ \theta_1(k) &= 0.1, \theta_2(k) = 0.05: 10 \leq t < 15 \\ \theta_1(k) &= 0.1, \theta_2(k) = -0.05: t \geq 15 \end{aligned}$$

Case 1) は、未知パラメータ $\theta_1(k), \theta_2(k)$ について、あらかじめ見積もられた摂動幅 $\theta_1(k) \in [-0.5, 0.5], \theta_2(k) \in [-0.25, 0.25]$ 内で滑らかに変動する場合であり、Case 2) は、未知パラメータ $\theta_1(k), \theta_2(k)$ の実際の摂動幅がそれぞれ $\theta_1(k) \in [-0.1, 0.1], \theta_2(k) \in [-0.05, 0.05]$ とあらかじめ見積もられた摂動幅の20%であり、その区間内で大きく変動する場合である。

Fig. 4 Control inputs $u(t)$: Case 1

図. 2～7に各パターンのシミュレーション結果を示す。図中 Desired はそれぞれノミナルシステムを利用して生成した制御対象の望ましい軌道、あるいは制御入力を示しており、Robust は文献⁽¹⁾に基づいた2次コスト保証制御を適用した場合の時間応答、あるいは制御入力を示している。ただし、ここでは制御対象の初期状態を $x(0) = (10.0 \ -5.0)^T$ とし、ノミナルシステムの初期値を $\bar{x}(0) = (10.0 \ -5.0)^T$ 、すなわち初期誤差を $e(0) = (0.0 \ 0.0)^T$ とした。

Case 1)、Case 2) のどちらの場合も Proposed による応答は、ノミナルシステムを利用して生成した望ましい軌道に近い応答特性を示しており、制御入力も著しく大きくなっていない。特に、未知パラメータの摂動幅が実際には小さい場合 (Case 2)) では、応答のみならず、制御入力においても Desired とほぼ一致した軌道となっている。すなわち、ノミナルシステムに匹敵する良好な制御性能が得られており、本制御則が実際のパラメータ変動に関する情報 (制御対象の望ましい軌道と実際の応答との誤差情報) を反映した適応的なものとなっていることがわかる。

この結果は、実際のパラメータ変動の如何にかかわらず、パラメータ変動の最悪値に対して設計された単一の固定ゲインコントローラを用いる従来のロバスト制御方式に比べ、実際のパラメータ変動に関する情報をオンラインで利用することにより、実際の未知パラメータによる過渡応答波形の劣化を抑制することができるという点で、構造は複雑になるものの、提案した制御方式がより柔軟で適応的な制御方式であることを示している⁽⁷⁾。

なお、ここでは図示していないが、本制御方式 (Proposed) において、ノミナルシステムの初期値を $\bar{x}(0) = 0$ と設定した場合には、文献⁽¹⁾に基づいた2次コスト保証制御 (Robust) とほぼ同様な応答特性、制御入力を示した。

 Fig. 5 Time response of $x_1(t)$: Case 2

 Fig. 6 Time response of $x_2(t)$: Case 2

5. む す び

本論文では、文献⁽⁷⁾の結果を線形離散時間システムに拡張し、文献⁽⁷⁾のように試行錯誤的な手続きを踏むことなく、誤差システムに対する2次形式評価関数の上界値を直接最小化することによる補償入力的设计法を提案した。また、補償入力が存在するための十分条件が線形行列不等式(LMI)で記述されることを示し、数値例により、本制御方式の有効性を検証した。

本制御方式は、不確かさに関するオンライン情報として、ノミナルシステムを利用して生成した制御対象の望ましい軌道と制御対象の実際の応答との誤差情報をコントローラに反映させるという点で、単一の固定ゲインコントローラを用いる従来のロバスト制御方式に比べ、より柔軟で適応的な制御系を構成することができる。また、制御則を得るために解く必要のある制約つき凸最適化問題もMATLABのLMI Control ToolboxやScilabのLMITOOLなど、種々のLMI求解ツールを用いることにより、容易に解くことができるという利点をもつ。

今後の課題としては、制御対象の状態に直接アクセス出来ない場合に対するオブザーバ併合型ロバスト制御や出力フィードバック系への拡張などが挙げられる。

 Fig. 7 Control inputs $u(t)$: Case 2

謝 辞

最後に、有益な御意見、御指摘を頂いた校閲担当委員の方に感謝致します。

文 献

- (1) I. R. Petersen and D. C. McFarlane, "Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.39, No.9, pp.1971-1977, (1994)
- (2) S. O. Reza Moheimani and I. R. Petersen, "Optimal Guaranteed Cost Control of Uncertain Systems via Static and Dynamic Output Feedback", *Automatica*, Vol.32, No.4, pp.575-579, (1996)
- (3) A. A. Stoerovogel, "The Robust H_2 Control Problem, A Worst-Case Design", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.38, No.9, pp.1358-1370, (1993)
- (4) 杉江 俊治, 手塚 知幸, "指定した H_2 制御性能を満たすロバストレギュレーション", 計測自動制御学会論文誌, Vol.29, No.7, pp.760-766, (1993)
- (5) M. Chilali, P. Gahinet, " H_∞ Design with Pole Placement Constraints, An LMI Approach", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.41, No.3, pp.358-367, (1996)
- (6) M. Chilali, P. Gahinet and P. Apkarmann, "Robust Pole Placement in LMI Regions", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.44, No.12, pp.2257-2270, (1999)
- (7) 大屋 英稔, 萩野 剛二郎, "不確かさを含む線形システムの時間応答を考慮したロバスト制御", システム制御情報学会論文誌, Vol.15, No.8, pp.404-412 (2002)
- (8) B. D. O. Anderson and J. B. Moore, "Optimal Control : Linear Quadratic Methods", Prentice-Hall, Inc., (1990)
- (9) Y. Li and X. Xu, "The quadratic stability of a discrete-time system with structured uncertainties", *Int. J. Contr.*, Vol.72, No.16, pp.1427-1435, (1999)
- (10) Oya H., and Hagino K., "Robust Servo System Design Giving Consideration to Transient Behavior for a Linear System with Structured Uncertainties", *Proc. of the 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pp.692-697, Denver, Colorado, USA, (2001)
- (11) P. P. Khargonekar and M. A. Rotea, "Mixed H_2/H_∞ Control , A Convex Optimization Approach", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.36, No.7, pp.824-837, (1991)