方向表現法とその指向制御および重力傾度トルク利用への応用*

山田 克彦^{*1}, 吉河 章二^{*1}Orientation Expression and Its Application to Pointing Control
and Utilization of Gravity-Gradient TorqueKatsuhiko YAMADA^{*2} and Shoji YOSHIKAWA^{*2} Advanced Research R & D Center, Mitsubishi Electric Corporation,
8-1-1 Tsukaguchi-Honmachi, Amagasaki-shi, Hyogo, 661-8661 Japan

Attitude expression suitable for directing an axis of a spacecraft to a specified direction is discussed. An expression that features no singularity between attitude parameters and a direction cosine matrix is introduced. Both new and former expressions are summarized from a unified viewpoint and the kinematical relations are derived. Then, the application of the proposed expression to pointing control of a spacecraft and to utilization of gravity-gradient torque is investigated. In pointing control, the proposed expression provides simple PD-type control to stabilize an axis direction. In utilization of gravity-gradient torque, it derives a simple and exact attitude that achieves an arbitrary gravity-gradient torque. The validity of the expression is shown by numerical examples.

Key Words: Orientation Expression, Pointing Control, Gravity-gradient Torque, Momentum Unloading

1. ま え が き

人工衛星の姿勢制御において、ある軸を特定の方向に向ける必要の生じる場合がある。例えば人工衛星に搭載された望遠鏡の光軸の向きを制御する場合や、スピン衛星の回転軸をある方向に向ける場合などである。本報はそのようなときの軸の方向の表現法について考察したものである。ある軸を特定の方向に向けるのに必要な自由度は2自由度であるから、一般的には二つの Euler 角が用いられるが、運動学的関係が複雑になってしまう場合も少なくない。Euler 角を用いない方法も、Walsh ら⁽¹⁾や、Tsotras ら⁽²⁾によって試みられている。これらは軸がある向きになると、その方向を表すパラメータ値が発散するという点で特異性をもつものであるが、これに対して著者らはそのような特異性をもたない表現法を提案した⁽³⁾。これらの表現法は互いの関係が明確ではなかったが、ここではこれらの表現法を統一的な視点で整理するとともに、その運動学的な関係を比較検討する。さらに提案する表現

法を、人工衛星の指向軸制御と、重力傾度トルク指定に対して応用した例を示す。

人工衛星に働く重力傾度トルクは人工衛星の慣性モーメントから上限値が存在するが、その範囲内において、これを利用して自然外乱のキャンセル⁽⁵⁾⁽⁶⁾やホイールのアンローディング⁽⁷⁾⁽⁹⁾を行わせることができる。そのためにはある重力傾度トルクを実現するような人工衛星の姿勢を求める必要があるが、姿勢角に対して微小近似を用いるために適用範囲が限られる⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾か、微小角近似を用いないために関係式が複雑になり解を簡単な形では表現できない⁽⁹⁾という問題点があった。ここでは提案する表現法を用いることによって、重力傾度トルクを実現する人工衛星の姿勢が比較的容易に求められることを示す。

2. 方向の表現

2.1 問題の定義 慣性空間に固定された座標系(慣性系)の各軸方向の単位ベクトルを $\{e_{I1} \ e_{I2} \ e_{I3}\}$ 、人工衛星に固定された座標系(機体系)の各軸方向の単位ベクトルを $\{e_{B1} \ e_{B2} \ e_{B3}\}$ とし、人工衛星の基準姿勢において慣性系と機体系の各軸は向きが一致するものとして、機体系がある方向を向いているときに、 e_{I3} と e_{B3} の向きの違いを表す方法を考察する。 e_{I3} を、

* 原稿受付 2003年3月24日。

^{*1} 正員、三菱電機(株)先端技術総合研究所(〒661-8661 尼崎市塚口本町8-1-1)。

E-mail: Yamada.katsuhiko@wrc.melco.co.jp

e_{I1} と e_{I2} がなす平面上にある単位ベクトル $\mathbf{a}$ の回りに角度 ϕ だけ回転させると e_{B3} に重なるものとする。このとき一般的につぎの関係が成り立つ⁽³⁾。

$$\begin{aligned} e_{B3} = & \cos \phi e_{I3} + (1 - \cos \phi)(\mathbf{a} \cdot e_{I3})\mathbf{a} \\ & + \sin \phi \mathbf{a} \times e_{I3} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

慣性系と機体系の向きを一致させるのに次の手順をふむものとする(図1)。

・慣性系を $\mathbf{a}$ の回りに角度 ϕ だけ回転させて座標系 A を得る。座標系 A はその第3軸が機体系の第3軸と一致しているものとする。

・座標系 A の第3軸の回りに角度 ψ だけ回転させて機体系を得る。

ここで機体系の第3軸の向きだけではなく機体系全体の向きを角度 ψ によって規定するのは、機体系の慣性系に対する角速度を、運動学的関係式を導出するのに用いるからである。

慣性系から座標系 A への座標変換マトリックス U_{AI} は、上式の ϕ を $-\phi$ で置換えて次式で表すことができる。

$$U_{AI} = \cos \phi I_3 + (1 - \cos \phi) \mathbf{a}^A \mathbf{a}^{AT} - \sin \phi \tilde{\mathbf{a}}^A \dots\dots\dots (2)$$

ただし I_3 は3次の単位マトリックスであり、ベクトル $\mathbf{a}$ を座標系 A で表して $\mathbf{a}^A$ とし、 $\mathbf{a}^A = [a_{A1} \ a_{A2} \ a_{A3}]^T$ とするとき $\tilde{\mathbf{a}}^A$ は次式を意味する。

$$\tilde{\mathbf{a}}^A = \begin{bmatrix} 0 & -a_{A3} & a_{A2} \\ a_{A3} & 0 & -a_{A1} \\ -a_{A2} & a_{A1} & 0 \end{bmatrix}$$

座標系 A から機体系への座標変換マトリックス U_{BA} は次式で表される。

$$U_{BA} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

したがって慣性系から機体系への座標変換マトリク

Fig. 1 Relationship between e_{I3} and e_{B3}

ス U_{BI} は次式となる。

$$U_{BI} = U_{BA} U_{AI} = (U_{BA} U_{AI} U_{BA}^T) U_{BA} \dots\dots\dots (4)$$

$W = U_{BA} U_{AI} U_{BA}^T$ において、ベクトル $\mathbf{a}$ を機体系で表現して $\mathbf{a}^B$ とすると

$$W = \cos \phi I_3 + (1 - \cos \phi) \mathbf{a}^B \mathbf{a}^{BT} - \sin \phi \tilde{\mathbf{a}}^B \dots\dots\dots (5)$$

となる。

定義からベクトル $\mathbf{a}$ は e_{I3} と e_{B3} の両方に直交するから、 $\mathbf{a}$ を慣性系と機体系で表したときにはその第3成分がともに零となって、次の形で表される。

$$\mathbf{a} = a_{I1} e_{I1} + a_{I2} e_{I2} = a_{B1} e_{B1} + a_{B2} e_{B2} \dots\dots\dots (6)$$

e_{I3} と e_{B3} の向きの違いを表すのに、Walsh らは Listing's law と呼ばれる方法でマトリックス U_{BI} の各成分からパラメータを定義しており⁽¹⁾、Tsotras らは e_{B1} と e_{B2} がなす平面に対する e_{I3} の射影成分でパラメータを定義している⁽²⁾。以下ではこれらのパラメータをベクトル $\mathbf{a}$ と角度 ϕ でとらえ直すとともに、新たなパラメータを導入する。

Walsh らの方法

Walsh らの方法では e_{I3} と e_{B3} の向きの違いを表すのに次のパラメータ p_1, p_2 を用いることになる。

$$p_1 = a_{I1} \tan \frac{\phi}{2}, \quad p_2 = a_{I2} \tan \frac{\phi}{2} \dots\dots\dots (7)$$

この方法の特徴は、Rodriguez のパラメータ⁽⁴⁾と同様に $\tan(\phi/2)$ を用いることと、 $\mathbf{a}$ の慣性系表現を用いることである。この p_1, p_2 を用いれば式(2)よりマトリックス U_{AI} は次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} U_{AI} = & \frac{1}{1 + p_1^2 + p_2^2} \\ & \times \begin{bmatrix} 1 + p_1^2 - p_2^2 & 2p_1 p_2 & -2p_2 \\ 2p_1 p_2 & 1 - p_1^2 + p_2^2 & 2p_1 \\ 2p_2 & -2p_1 & 1 - p_1^2 - p_2^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

したがってマトリックス U_{BI} の (i, j) 成分を U_{ij} とすると p_1, p_2 を次式で表すことができる。

$$p_1 = -\frac{U_{32}}{1 + U_{33}}, \quad p_2 = \frac{U_{31}}{1 + U_{33}} \dots\dots\dots (9)$$

また機体系の慣性系に対する角速度を $\boldsymbol{\omega}$ とし、これを機体系で表現して $\boldsymbol{\omega}^B = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ とする。このとき $\dot{U}_{BI}$ (マトリックス U_{BI} の各成分を時間微分したマトリックス) は次式となる。

$$\dot{U}_{BI} = -\boldsymbol{\omega}^B U_{BI} \dots\dots\dots (10)$$

一方、式(4)の各辺を時間微分することによって

$$\dot{U}_{BI} = \dot{U}_{BA} U_{AI} + U_{BA} \dot{U}_{AI} \dots\dots\dots (11)$$

式(10)と式(11)の右辺を等しくおくことによって p_1, p_2, ψ の時間微分を求めることができる。その結果は

次のようになる。

$$\dot{p}_1 = \frac{1+p_1^2+p_2^2}{2} (\cos \psi \omega_1 - \sin \psi \omega_2) \cdots \cdots (12)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{1+p_1^2+p_2^2}{2} (\sin \psi \omega_1 + \cos \psi \omega_2) \cdots \cdots (13)$$

$$\dot{\psi} = \omega_3 + \frac{2}{1+p_1^2+p_2^2} (p_1 \dot{p}_2 - p_2 \dot{p}_1) \cdots \cdots (14)$$

この方法では p_1, p_2 に慣性系表現を用いたためにその時間微分に ψ が含まれることになるが、角速度 ω_3 は含まないという特徴がある。

Tsiotras らの方法

Tsiotras らの方法では、方向表現のパラメータが e_{13} の射影成分となるが、これは Walsh らと異なる座標系表現を用いることに相当する。 e_{13} と e_{B3} の向きの違いを表すパラメータを w_1, w_2 とすると、これらは次式で表される。

$$w_1 = a_{B1} \tan \frac{\phi}{2}, \quad w_2 = a_{B2} \tan \frac{\phi}{2} \cdots \cdots (15)$$

この w_1, w_2 を用いれば式(5)よりマトリックス W は次式で表すことができる。

$$W = \frac{1}{1+w_1^2+w_2^2} \times \begin{bmatrix} 1+w_1^2-w_2^2 & 2w_1w_2 & -2w_2 \\ 2w_1w_2 & 1-w_1^2+w_2^2 & 2w_1 \\ 2w_2 & -2w_1 & 1-w_1^2-w_2^2 \end{bmatrix} \cdots \cdots (16)$$

したがってマトリックス U_{B1} の各成分により w_1, w_2 を次式で表すことができる。

$$w_1 = \frac{U_{23}}{1+U_{33}}, \quad w_2 = -\frac{U_{13}}{1+U_{33}} \cdots \cdots (17)$$

また式(4)の各辺を時間微分することによって

$$\dot{U}_{B1} = \dot{W}U_{BA} + W\dot{U}_{BA} \cdots \cdots (18)$$

となるから、式(10)と式(18)の右辺を等しくおくことによって w_1, w_2, ψ の時間微分を求めることができる。その結果は次のようになる。

$$\dot{w}_1 = \frac{1}{2}(1+w_1^2-w_2^2)\omega_1 + w_1w_2\omega_2 + w_2\omega_3 \cdots \cdots (19)$$

$$\dot{w}_2 = \frac{1}{2}(1-w_1^2+w_2^2)\omega_1 + w_1w_2\omega_1 - w_1\omega_3 \cdots \cdots (20)$$

$$\dot{\psi} = \omega_3 - w_2\omega_1 + w_1\omega_2 \cdots \cdots (21)$$

この方法では w_1, w_2 に機体系表現を用いたためにその時間微分に ω_3 が含まれることになるが、角度 ψ は含まないという特徴がある。

2・2 提案する方向表現法 上記の二つの方向表現法は、座標系表現は異なるがいずれも $\tan(\phi/2)$ を用いているために、方向表現の値が発散する可能性が

ある。このことは式(9)や式(17)からも明らかであり、いずれも $U_{33} = -1$ となる場合に方向表現は値をもたない。このような特異性は、大きな姿勢角変動を考える場合に好ましくないもので、ここでは方向表現として、次の δ_1, δ_2 を考える⁽⁸⁾。

$$\delta_1 = a_{B1} \sin \phi, \quad \delta_2 = a_{B2} \sin \phi \cdots \cdots (22)$$

ここで a の機体系表現を用いるのは、衛星の角速度が機体系表現をとることが多く、その場合に運動学的関係が簡単になるからである。補助変数として次の δ_0 を定義する。

$$\delta_0 = \cos \phi \cdots \cdots (23)$$

定義より明らかなようにこれらの変数の間には次の関係が成り立つ。

$$\delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 = 1 \cdots \cdots (24)$$

これらの変数を用いれば W は次式で表すことができる。

$$W = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta_2^2}{1+\delta_0} & \frac{\delta_1\delta_2}{1+\delta_0} & -\delta_2 \\ \frac{\delta_1\delta_2}{1+\delta_0} & 1 - \frac{\delta_1^2}{1+\delta_0} & \delta_1 \\ \delta_2 & -\delta_1 & \delta_0 \end{bmatrix} \cdots \cdots (25)$$

したがってマトリックス U_{B1} の各成分により $\delta_1, \delta_2, \delta_0$ を次式で表すことができる。

$$\delta_1 = U_{23}, \quad \delta_2 = -U_{13}, \quad \delta_0 = U_{33} \cdots \cdots (26)$$

このように方向変数を $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ にとるときは U_{B1} の第3列ベクトルがそのまま方向変数になり、その絶対値が1を超えないという利点がある。 $U_{33} = -1$ ($\phi = 180^\circ$) の場合にも $\delta_1 = \delta_2 = 0$ となつて、式(7)や式(15)にみられるような値の発散は起きない。3章で述べるように、指向制御に δ_1, δ_2 を用いると $\phi = 180^\circ$ の近傍であっても値が発散しないので都合がよい。

またこの場合にも、式(10)と式(18)の右辺を等しくおくことによって $\delta_1, \delta_2, \delta_0, \psi$ の時間微分を求めることができる。その結果は次のようになる。

$$\dot{\delta}_1 = \delta_0\omega_1 + \delta_2\omega_3 \cdots \cdots (27)$$

$$\dot{\delta}_2 = \delta_0\omega_2 - \delta_1\omega_3 \cdots \cdots (28)$$

$$\dot{\delta}_0 = -\delta_1\omega_1 - \delta_2\omega_2 \cdots \cdots (29)$$

$$\dot{\psi} = \omega_3 - \frac{\delta_2}{1+\delta_0}\omega_1 + \frac{\delta_1}{1+\delta_0}\omega_2 \cdots \cdots (30)$$

この表現の場合、補助変数として δ_0 が必要となるが、変数の時間微分を簡単な形で表すことができ、3章の指向制御系の構成も単純になる。

なお ψ において $\phi = 180^\circ$ のときに値が発散するが、これはここで述べる表現方法に共通の現象で、 e_{13} と e_{B3} が逆向きになって回転軸方向の単位ベクトル a が不定となり、座標系 A の向きも定まらないことによ

る。ただし本報で主題とする軸の方向表現においては、 $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ を用いることによって $\phi=180^\circ$ における値の発散を回避することができる。

3. 指向制御則

人工衛星に固定された機体系の軸(軸に沿った単位ベクトルを $\mathbf{e}_{B3}$ とする)の向きを慣性系のある軸(軸に沿った単位ベクトルを $\mathbf{e}_{I3}$ とする)の向きと一致させる指向制御の問題を考える。人工衛星の質量中心回りの慣性テンソルを $\mathbf{J}$ 、人工衛星に対するスラスト制御入力を $\mathbf{u}$ とすると、人工衛星の運動方程式は次式となる。

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ただし $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ は $\boldsymbol{\omega}$ の慣性系における時間微分を表す。制御の目的は $\mathbf{e}_{B3}$ の向きを $\mathbf{e}_{I3}$ と一致させることなので、 $k_p > 0$ として次の Lyapunov 関数 V を考える。

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + k_p(1 - \delta_0) \quad \dots\dots\dots (32)$$

制御入力 $\mathbf{u}$ を機体系で表して $\mathbf{u}^B = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ とする。すなわち

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_{B1} + u_2 \mathbf{e}_{B2} + u_3 \mathbf{e}_{B3} \quad \dots\dots\dots (33)$$

運動方程式のもとに V の時間微分をとり、式(29)を用いると次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} - k_p \dot{\delta}_0 \\ &= (u_1 + k_p \delta_1) \omega_1 + (u_2 + k_p \delta_2) \omega_2 + u_3 \omega_3 \quad \dots (34) \end{aligned}$$

したがって制御入力を $k_d > 0$ として

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_p \delta_1 - k_d \omega_1 \\ u_2 &= -k_p \delta_2 - k_d \omega_2 \quad \dots\dots\dots (35) \\ u_3 &= -k_d \omega_3 \end{aligned}$$

とおけば

$$\dot{V} = -k_d \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \leq 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

となって $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{0}$ がわかり、制御則に戻って考えれば $\delta_1 \rightarrow 0$ 、 $\delta_2 \rightarrow 0$ がわかる。したがって δ_0 も ± 1 の一定値をとるが、Lyapunov 関数の形から $\delta_0 \rightarrow 1$ となることが予想される。このことは V の代わりに Lyapunov 関数として

$$V' = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + k_p(1 - |\delta_0|) \quad \dots\dots\dots (37)$$

をとれば、より明確になる。平衡点の近傍では δ_0 の符号は確定しており、平衡点が $\delta_0 > 0$ であれば式(35)の制御則が導出される。平衡点が $\delta_0 < 0$ のときは式(35)とは異なる次の制御則となる。

$$\begin{aligned} u_1 &= k_p \delta_1 - k_d \omega_1 \\ u_2 &= k_p \delta_2 - k_d \omega_2 \quad \dots\dots\dots (38) \\ u_3 &= -k_d \omega_3 \end{aligned}$$

したがって式(35)の制御則では $\delta_0 \rightarrow 1$ となるが、式

(38)の制御則によると $\delta_0 \rightarrow -1$ になり、ちょうど $\mathbf{e}_{B3}$ と $-\mathbf{e}_{I3}$ の向きが一致した、さかさまの姿勢となる。

このように δ_1, δ_2 の方向表現を用いれば簡単な指向制御則を素直な Lyapunov 関数から導くことができる。

4. 重力傾度トルク利用への応用

4.1 重力傾度トルクの値 重力傾度トルクは、人工衛星の姿勢に依存して人工衛星の質量中心回りに働くトルクであり、他の外乱トルクの影響を軽減するためや、姿勢制御用ホイールの蓄積角運動量を放出するために、積極的に利用されることがある。ここでは重力傾度トルクを望ましい値にするような姿勢の目標値を求める問題を考える。

いま人工衛星が円軌道運動をするものとして、人工衛星の質量中心に原点をもち軌道に固定された座標系(軌道系)を考える。軌道系の各軸方向の単位ベクトルを $\{\mathbf{e}_{01} \ \mathbf{e}_{02} \ \mathbf{e}_{03}\}$ として、 $\mathbf{e}_{01}$ は進行方向、 $\mathbf{e}_{03}$ は地心方向とする。人工衛星の質量中心回りの慣性テンソル $\mathbf{J}$ を機体系と軌道系で表してそれぞれ $\mathbf{J}^B, \mathbf{J}^O$ とし、次のようにおく。

$$\mathbf{J}^B = \begin{bmatrix} j_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & j_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & j_{p3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^O = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (39)$$

人工衛星の軌道角速度を ω_0 とすると、人工衛星に働く重力傾度トルク $\mathbf{n}$ は次式となる。

$$\mathbf{n} = -3\omega_0^2 j_{23} \mathbf{e}_{01} + 3\omega_0^2 j_{13} \mathbf{e}_{02} \quad \dots\dots\dots (40)$$

したがって j_{13}, j_{23} を適切に設定することができれば、重力傾度トルクを制御に利用することも可能である。重力傾度トルクは人工衛星に固定した $\mathbf{e}_{B3}$ 軸の向きが $\mathbf{e}_{03}$ 軸と一致した状態では働かないので、 $\mathbf{e}_{B3}$ 軸を軌道系において望ましい向きに向ける必要がある。そこでここでは $\mathbf{e}_{B3}$ の望ましい向きからの違いを表すのに δ_1, δ_2 の方向表現を用いて検討を行う。この問題は著者らによって Euler 角を用いて考察されているが⁸⁽⁹⁾、方向表現法を工夫することで、より簡単かつ厳密な形で解の表示ができることを示す。

4.2 慣性乗積のとり得る値 まず慣性乗積 j_{13}, j_{23} が姿勢によってどんな値をとり得るかを考察する。軌道系から機体系への座標変換マトリックスを $\mathbf{U}_{B0}$ とすると

$$\mathbf{J}^O = \mathbf{U}_{B0}^T \mathbf{J}^B \mathbf{U}_{B0} \quad \dots\dots\dots (41)$$

という関係があるから、式(4)、(25)と同様に考えれば、 j_{13}, j_{23} は次式で表すことができる。

$$j_{13} = a \cos \psi + b \sin \psi \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$j_{23} = -b \cos \psi + a \sin \psi$$

$$a = \delta_2 \left(\frac{\delta_2^2 j_{p1} + \delta_1^2 j_{p2}}{1 + \delta_0} - j_{p1} + \delta_0 j_{p3} \right) \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$b = \delta_1 \left(\frac{\delta_2^2 j_{p1} + \delta_1^2 j_{p2}}{1 + \delta_0} - j_{p2} + \delta_0 j_{p3} \right)$$

上式より $j_{13}^2 + j_{23}^2$ は次式で表される.

$$\begin{aligned} j_{13}^2 + j_{23}^2 = & a^2 + b^2 = \delta_2^2(1 - \delta_2^2)j_{p1}^2 + \delta_1^2(1 - \delta_1^2)j_{p2}^2 \\ & + \delta_0^2(1 - \delta_0^2)j_{p3}^2 - 2\delta_1^2\delta_2^2j_{p1}j_{p2} - 2\delta_0^2\delta_1^2j_{p2}j_{p3} \\ & - 2\delta_0^2\delta_2^2j_{p1}j_{p3} \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

$j_{13}^2 + j_{23}^2$ の値は δ_1, δ_2 だけで決まるが, 以下ではこの値の上限値について検討する. 式(44)の左辺を

$$f_0 = j_{13}^2 + j_{23}^2$$

とおき, 式(44)の右辺において

$$p = \delta_1^2, \quad q = \delta_2^2$$

とおいて右辺を p, q の関数とみなして整理すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} f_0 = & -\{(j_{p2} - j_{p3})p + (j_{p1} - j_{p3})q\}^2 \\ & + (j_{p2} - j_{p3})^2 p + (j_{p1} - j_{p3})^2 q \quad \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

p, q のとり得る範囲は式(24)を考慮すると次式となる.

$$0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad 0 \leq p + q \leq 1 \quad \dots\dots\dots (46)$$

いま

$$x = (j_{p2} - j_{p3})p + (j_{p1} - j_{p3})q \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$y = (j_{p2} - j_{p3})^2 p + (j_{p1} - j_{p3})^2 q$$

とおくと, 式(45), (47)より

$$y = x^2 + f_0 \quad \dots\dots\dots (48)$$

となる. すなわち f_0 一定となる場合は $x-y$ 平面において放物線を描く. 一方, 式(47)より $p, q, p+q$ のそれぞれが一定値をとるときには, その関係は $x-y$ 平面において次の直線で表される.

Fig. 2 In the case where j_{p3} is intermediate moment of inertia

$p = \alpha$ (一定値) のとき

$$y = (j_{p1} - j_{p3})x - (j_{p2} - j_{p3})(j_{p1} - j_{p2})\alpha \quad \dots\dots (49)$$

$q = \alpha$ (一定値) のとき

$$y = (j_{p2} - j_{p3})x + (j_{p1} - j_{p3})(j_{p1} - j_{p2})\alpha \quad \dots\dots (50)$$

$p+q = \alpha$ (一定値) のとき

$$y = (j_{p1} + j_{p2} - 2j_{p3})x - (j_{p1} - j_{p3})(j_{p2} - j_{p3})\alpha \quad \dots\dots\dots (51)$$

このことから式(46)の p, q の範囲は $x-y$ 平面における $p=0, q=0, p+q=1$ で囲まれる三角形の領域となり, この領域と $y=x^2+f_0$ が交点をもつときには, そのような f_0 は人工衛星の姿勢 p, q によって実現可能となる. ここでは j_{p3} が j_{p1}, j_{p2} の中間の値をとる場合と, それ以外の場合にわけて, f_0 の値の上限を考察する.

・ j_{p3} が j_{p1}, j_{p2} の中間の値をとる場合

仮に $j_{p1} \geq j_{p3} \geq j_{p2}$ とする. このとき式(46)を満たす領域は図2にハッチングで示すような領域となり, したがって $y=x^2+f_0$ とこの領域が交わって f_0 が最も大きくなるのは, $y=x^2+f_0$ と $p+q=1$ が接する場合である. 式(51)より, このときの f_0 の値は次式となる.

$$f_0 = \frac{(j_{p1} - j_{p2})^2}{4} \quad \dots\dots\dots (52)$$

・ j_{p3} が最大または最小の値をとる場合

仮に $j_{p1} \geq j_{p2} \geq j_{p3}$ とする. このとき式(46)を満たす領域は図3にハッチングで示すような領域となり, したがって $y=x^2+f_0$ とこの領域が交わって f_0 が最も大きくなるのは, $y=x^2+f_0$ と $p=0$ が接する場合である. 式(49)より, このときの f_0 の値は次式となる.

$$f_0 = \frac{(j_{p1} - j_{p3})^2}{4} \quad \dots\dots\dots (53)$$

Fig. 3 In the case where j_{p3} is minimum moment of inertia ($j_{p1} > j_{p2} > j_{p3}$)

以上をまとめれば、 f_0 のとり得る値として次の結論を導くことができる。まず衛星全体の主慣性モーメント j_{p1} , j_{p2} , j_{p3} において任意の二つの差の絶対値を大きいものから順に

$$j_{af1} \geq j_{af2} \geq j_{af3}$$

とする。このとき式(52), (53)から次式が成り立つ。

$$f_0 \leq \frac{j_{af1}^2}{4} \dots\dots\dots (54)$$

すなわち、 f_0 の最大値は主慣性モーメントの差の最大値の二乗の 1/4 となる。主慣性モーメントのすべてが等しい場合には慣性乗積は発生し得ない。

4・3 与えられた慣性乗積を満たす姿勢 式(54)

を満たすような慣性乗積が与えられたときに、その慣性乗積を実現する人工衛星の姿勢を求めることを考える。人工衛星の姿勢は δ_1 , δ_2 , ψ の三つで決まるが、重力傾度トルクに影響する慣性乗積は j_{13} , j_{23} の二つなので、慣性乗積を実現するために δ_1 , δ_2 , ψ の三つは必ずしも必要とはしない。ここでは人工衛星の姿勢 δ_1 , δ_2 , ψ を、 $\delta_1^2 + \delta_2^2 = p + q$ が最小となるように求めることを考える。式(22)より $\delta_1^2 + \delta_2^2 = \sin^2 \phi$ となるので、 $\delta_1^2 + \delta_2^2$ を最小化することは、 e_{B3} と目標とする向きの間の角度を最小化することになる。ところで $j_{13}^2 + j_{23}^2 = f_0$ を満たす解 δ_1 , δ_2 を求めると式(43)より a , b が決まる。このとき与えられた j_{13} , j_{23} を満たすように式(42)から角度 ψ を求めることができる。したがって $\delta_1^2 + \delta_2^2 = p + q$ を最小化する δ_1 , δ_2 が求められればよい。

$j_{13}^2 + j_{23}^2 = f_0$ が解をもつのは、前述のように x - y 平面において $p=0$, $q=0$, $p+q=1$ で囲まれる三角形の領域と放物線 $y=x^2+f_0$ が交点をもつ場合である。その中で $p+q$ の値が最小となるのは、この領域内の点を通る式(51)の直線の y 切片が最小値または最大値をとる場合である(ただし主慣性モーメント j_{p1} , j_{p2} , j_{p3} はいずれも異なるものとする。主慣性モーメントのいずれか二つが等しい場合には三角形の領域は直線となり、以下に述べる場合の特別な場合として扱うことができる)。この y 切片の値は、 j_{p3} が j_{p1} , j_{p2} の中間の値をとる場合(図2)と j_{p3} が最大または最小の値をとる場合(図3)で異なるため、それぞれについて別個に検討を行う。

・ j_{p3} が j_{p1} , j_{p2} の中間の値をとる場合

仮に $j_{p1} \geq j_{p3} \geq j_{p2}$ とする。この場合に $p+q$ が最小値をとるのは次の二つのいずれかの場合である。

(1) $p+q$ = 一定となる直線と放物線との接点が三角形の領域内にある場合には、その接点において $p+q$ は最小化する。

(2) 上記の接点が領域外の場合には、 $p=0$ または $q=0$ の直線が放物線と交わる点において(接点の近傍の領域の境界において) $p+q$ は最小化する。

$p+q$ = 一定となる直線と放物線との接点が三角形の領域内にあるための条件を考える。 $p+q=a$ となる直線の方程式は式(51)で与えられるから、その接点において p , q は次の値をとる。

$$p=p_1 = \frac{j_{p1} + j_{p2} - 2j_{p3}}{4(j_{p2} - j_{p3})} - \frac{f_0}{(j_{p1} - j_{p2})(j_{p2} - j_{p3})}$$

$$q=q_1 = \frac{j_{p1} + j_{p2} - 2j_{p3}}{4(j_{p1} - j_{p3})} + \frac{f_0}{(j_{p1} - j_{p2})(j_{p1} - j_{p3})}$$

これが三角形の領域内にあるかどうかの条件より、 $p+q$ が最小化するときの p , q は、次の値をとることがわかる。

$j_{p1} + j_{p2} - 2j_{p3} > 0$ かつ

$f_0 \leq (j_{p1} + j_{p2} - 2j_{p3})(j_{p1} - j_{p2})/4$ のとき

($j_{p2} = j_{p3}$ の場合を含む)

$$p=0, \quad q=q_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4f_0}{(j_{p1} - j_{p3})^2}}}{2}$$

$j_{p1} + j_{p2} - 2j_{p3} < 0$ かつ

$f_0 \leq (j_{p1} + j_{p2} - 2j_{p3})(j_{p2} - j_{p1})/4$ のとき

($j_{p1} = j_{p3}$ の場合を含む)

$$p=p_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4f_0}{(j_{p2} - j_{p3})^2}}}{2}, \quad q=0$$

上記以外するとき

$$p=p_1, \quad q=q_1$$

・ j_{p3} が最大または最小の値をとる場合

仮に $j_{p1} \geq j_{p2} \geq j_{p3}$ とする。この場合は式(54)から、式(45)において $p=0$ を代入すると q は実根をもつので、 $p=0$ は必ず放物線 $y=x^2+f_0$ と交点をもつ。かつ $p+q$ = 一定となる直線の傾きが $p=0$ を表す直線の傾きよりも大きくなることから、 $p+q$ は $p=0$ と $y=x^2+f_0$ の交点のうち原点に近いほうの点において最小値をとる(このとき $p+q$ = 一定となる直線の y 切片の値が絶対値で最小となる)。したがって $p+q$ が最小となるときの p , q は次式となる。

$$p=0, \quad q=q_0$$

これらの結果をまとめて表すために、

$$\sigma_1 = \frac{j_{p1} - j_{p3}}{j_{p3}}, \quad \sigma_2 = \frac{j_{p2} - j_{p3}}{j_{p3}} \dots\dots\dots (55)$$

とおいて、 σ_1 - σ_2 平面において解の領域を示すことを考えよう。まず主慣性モーメント j_{p1} , j_{p2} , j_{p3} の間に

$$j_{p1} + j_{p2} > j_{p3}$$

$$j_{p2} + j_{p3} > j_{p1} \dots\dots\dots (56)$$

$$j_{p3} + j_{p1} > j_{p2}$$

の関係が成り立つことから、 σ_1 - σ_2 平面において物理

的に実現し得るのは

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < 1, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > -1 \quad \dots\dots\dots (57)$$

の領域である。また $\sigma_1 - \sigma_2$ 平面の第4象限は $j_{p1} > j_{p3} > j_{p2}$ となる領域を表しているが、このときには式(54)が

$$f_0 < \frac{(j_{p1} - j_{p2})^2}{4}$$

となるので、

$$\gamma = \frac{2\sqrt{f_0}}{j_{p3}} \quad \dots\dots\dots (58)$$

とおけば、解の存在する領域は次のように制限される。

$$\sigma_1 - \sigma_2 \geq \gamma$$

さらに第4象限において、解が例えば $p=0, q=q_0$ となるのは $j_{p1} + j_{p2} - 2j_{p3} > 0$ かつ $f_0 \leq (j_{p1} + j_{p2} - 2j_{p3})(j_{p1} - j_{p2})/4$ のときとなるが、これは $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$

Fig. 4 p, q solution in $\sigma_1 - \sigma_2$ plane

Fig. 5 Simulation results with $k_p > 0$ (upper) and $k_p < 0$ (lower)

かつ $\sigma_1^2 - \sigma_2^2 \geq \gamma^2$ と表すことができる。

以下同様に解の存在する領域を区分すると、最終的に図4の結果が得られる(図は $\gamma < 1$ の場合)。図4においてハッチングをつけた領域が姿勢の解の存在する領域で、白地の部分は物理的に実現不可能か、 f_0 の値が大きすぎて解の存在しないことを表している。

p, q が得られたとき、 $\delta_1, \delta_2, \delta_0$ を非負にとることにすれば

$$\delta_1 = \sqrt{p}, \quad \delta_2 = \sqrt{q}, \quad \delta_0 = \sqrt{1 - q - p} \quad \dots\dots\dots (59)$$

となる。これより式(43)を用いて a, b が定まり、式(42)を解いて ψ を求めることができる。

5. 数値計算例

式(35)と式(38)の指向制御則を用いて指向制御のシミュレーションを行った例と、図4に示す解を用いて与えられた重力傾度トルクを満たすような姿勢の解を求めた例を示す。

指向制御では、人工衛星の主慣性モーメントを $j_{p1} = 500[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$, $j_{p2} = 200[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$, $j_{p3} = 400[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ にとり、制御ゲイン k_d, k_p を $k_d = 200[\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}]$, $k_p = 50[\text{N} \cdot \text{m}]$ とする。初期角速度と初期姿勢を $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.1[\text{rad/s}]$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\delta_0 = 1$ とするときの指向制御のシミュレーション結果を図5に示す。図5上図は式(35)を用いた場合で $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\delta_0 = 1$ に収束しており、図5下図は式(38)を用いた場合で $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\delta_0 = -1$ に収束している。

Fig. 6 Target values of j_{13} and j_{23} (upper), δ_1 and δ_2 (middle), and ψ (lower)

次にこの主慣性モーメントで、 $\mathbf{J}^0$ の慣性乗積の目標値を $j_{13}=100 \sin \theta [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$, $j_{23}=100 \cos 2\theta [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ とし、 θ を $0^\circ \sim 360^\circ$ まで変化させる。この場合常に式(54)の条件は満たされているので、慣性乗積を実現する姿勢の解は存在する。このときの j_{13} , j_{23} の目標値と、それを実現する δ_1 , δ_2 , ψ の値を図4によって求めた結果を図6に示す。図6では θ の値の増加に応じて δ_1 , δ_2 の値が連続的に変化するようにその符号を選んでいる。図に示すいずれの場合にも目標とする j_{13} , j_{23} の値が実現されており、望ましい慣性乗積を実現する δ_1 , δ_2 , ψ の解が図4から得られていることを数値的に確認できる。

6. ま と め

本報は人工衛星のある軸を指定した方向に向けるときの、軸の方向の表現法について考察したものである。Euler角を用いない軸の方向の表現法として、すでに提案されている方法と、値の発散しないあらたに提案する方法とを、統一的な視点で整理し、各表現法の運動学的な関係式を導いた。また提案する表現法を用いたときの、人工衛星の指向軸制御と、重力傾度トルク指定に対する応用を示した。指向軸制御においては簡単なフィードバック制御で安定な制御系を実現できること、重力傾度トルク指定では与えられた重力傾

度トルクをみたす姿勢を比較的容易に求め得ることを示し、数値計算例においてこの方法の有効性を確認した。

文 献

- (1) Walsh, G. C., Montgomery, R. and Sastry, S. S., Orientation Control of the Dynamic Satellite, *Proceedings of the American Control Conference*, (1994), 138-142.
- (2) Tsiotras, P., Corless, M. and Longuski, J. M., A Novel Approach to the Attitude Control of Axisymmetric Spacecraft, *Automatica*, **31**-8 (1995), 1099-1112.
- (3) Hughes, P. C., *Spacecraft Attitude Dynamics*, (1986), 12, John Wiley & Sons.
- (4) 文献(3)の33ページ.
- (5) Woo, H. H., Morgan, D. and Falangas, E. T., Momentum Management and Attitude Control Design for a Space Station, *J. Guidance, Control, Dynamics*, **11**-1 (1988), 19-25.
- (6) Wie, B., Byun, K. W., Warren, V. W., Geller, D., Long, D. and Sunkel, J., New Approach to Attitude/Momentum Control for the Space Station, *J. Guidance, Control, Dynamics*, **12**-5 (1989), 714-722.
- (7) Tong, D., Spacecraft Momentum Dumping Using Gravity Gradient, *J. Spacecraft Rockets*, **35**-5 (1998), 714-717.
- (8) 山田克彦・吉河章二, 2個のホイールによる宇宙機のスピン運動の実現, システム制御情報学会論文誌, **15**-11 (2002), 615-623.
- (9) 山田克彦・吉河章二・柏瀬俊夫・松英稔久, 重力傾度トルクによるホイールのアンローディング, 機論, **67**-653, C (2001), 79-86.