衝突振動系の周期解の厳密な導出*
(初期値補正周期化法の提案)今 村 仁^{*1}Exact Derivation of All Periodic Solutions for Impact Oscillator
(Proposition of Initial Value Correction Periodize Method)Hitoshi IMAMURA^{*2}^{*2} Mechanical Engineering, Ibaraki University,
4-12-1 Nakanarusawa, Hitachi-shi, Ibaraki, 316-8511 Japan

In this paper, we propose the exact derivation method of all periodic solutions for forced impact oscillator systems, and clarified its mathematical structure. The key idea is to determine initial condition for periodic solution that enable the solution arising any current time to the future or past make periodic. By means of substitute derived initial condition to initial condition of general solution and evaluate it, periodic solution can be globally represented by superposition of periodic stationary solution of linear system and finite number of periodic functions which is induced from evaluate of infinite summation of periodic pseudo feedback responses in terms of impact nonlinearity. According to comparing this result and our former result that was induced by feedback superposition method, new insight about mathematical structure of periodic solutions is derived.

Key Words: Nonlinear Vibration, Impact Oscillator, Global Representation, Self Reference, Stationary Solution, Periodic Solution, Initial Value, Correction

1. 緒 言

所望の特性を有する機械構造物を設計し、高い信頼性を保証することは、機械工学における重要な課題である。しかしながら、機械構造物は一般に複数の要素から構成されるので、部材間の接合部にはガタや摩擦などの強い非線形性が存在し、その動特性の把握は多くの場合困難となる。周期解は、このような複雑な挙動を呈する非線形システムの動特性を把握する上で最も基本的な情報を担うものであり、その求解法については、これまでに膨大な研究がなされている。Duffing系に代表される滑らかな非線形性を有する力学系では、一般解が厳密には求められないにもかかわらず、周期解の時間関数形は微分方程式を満たす周期関数を近似的に導出することによって大域的に表現できる。しかしながら、非線形システムの中でも基本的かつ重要なクラスをなす区分線形系では、一般解が線形システムの解を接続することにより原理的には厳密に求められるにもかかわらず、解を接続する切り換え時刻を陽に求めることが不可能であるため、これまで周

期解の求解は周期的な解の接続を実現する初期条件を決定することに主眼が置かれ、周期解の時間領域における大域的な表現は明らかにされていなかった^{(1)~(4)}。そのため、この方法で厳密に求められるのは、切り換え時刻を陽に求めることができるごく一部の基本的な周期解の場合に限定される。そこで、このような制約を克服し、より広範な周期解の導出を可能とする方法を構築することは工学上重要となる。

著者らはこれまで非線形性をそれと等価な仮想的な外力とみなして1自由度区分線形系を厳密に線形化し、見掛けの重ね合わせの原理を適用して一般解を、線形系の解とこの仮想的な外力による応答との和として大域的に求める“擬フィードバック形式”に基づく解析法を提案してきた^{(5) (6)}。この方法の応用として、系に発生するすべての周期解の関数形を厳密に決定する“フィードバック重畳法”を提案し、予圧縮ばね系と衝突振動系の場合にその有効性を確認した^{(7) (8)}。これは、無限の過去に初期値を有する解として定常解を定式化し、それが周期解であるとき非線形性と等価な外力によって生成される周期的擬フィードバック応答の無限和を解析的に評価することにより、周期解を大域的に導出するものである。ところが、この方法により得られる定常解およびその特別の場合である周期解の

* 原稿受付 2003年10月20日。

^{*1} 正員、茨城大学工学部(〒316-8511 日立市中成沢町4-12-1)。

E-mail: imamura@mech.ibaraki.ac.jp

表現には、初期条件が陽に現れない。一般に非線形システムでは、初期値に依存して異なるタイプの解が発生し得るので、解の表現には何らかの形で初期値の情報が盛り込まれていなければならないはずである。したがって、初期値の情報は可算個の切り換え時間の系列の周期的部分列の中に繰り込まれたものと解釈すべきと考えられる。本論文では、この解釈の妥当性を検証するために、衝突振動系の場合に最も基本的な定常解である周期解を初期値を考慮して厳密に決定する新しい方法を提案する。これは、初期時刻より無限の未来および無限の過去までの時間領域全域で成り立つ解を周期化するように初期値を決定することにより、周期解の関数形を大域的に導出するものである。さらに、この方法が先にフィードバック応答の無限和を解析的に評価することにより求めたものと同一の結果を導くことを確認し、定常周期解では無限の過去から無限の未来までに生じる非線形性の影響は総体としては0となることを明らかにする。そしてこのことの自然な帰結として、周期解の大域的表現に初期値が陽に現れない理由が説明できることを示す。

2. 系の記述と問題の設定

2.1 運動方程式 図1に示す領域数1の衝突振動系を考察する。この系の無次元化された運動方程式は、以下の無次元化

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Km}}, \quad \beta = \frac{k}{K}, \quad \omega = \frac{\omega_f}{\sqrt{K/m}}, \quad t = \sqrt{\frac{K}{m}}\tau$$

と以下のスケール変換

$$x = \frac{X}{G}, \quad \eta = \frac{A}{KG} \quad (1a)$$

$$x = \frac{KX}{A}, \quad \gamma = \frac{KG}{A} \quad (1b)$$

により、次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x = \eta \cos(\omega t); \quad x < \gamma \quad (2a)$$

$$\dot{x}(t^+) = -r\dot{x}(t^-); \quad x = \gamma \quad (2b)$$

ここで、 K はばね定数が0となる場合を包含するために便宜的に導入した仮想的なばねのばね定数で、 $k = K$ のとき復元力の係数は1に正規化できる。式(1a)のスケール変換によれば $\gamma = 1$ に、式(1b)のスケール変換によれば $\eta = 1$ にできるので、式(2a)は両者を包括する表現である。 $\zeta \geq 0$ は粘性減衰係数、 $r(0 < r < 1)$ は質点を $x \leq \gamma$ の領域に拘束するストッパー（以下では“衝突境界”と呼ぶ）との衝突瞬間における反発係数であり、 t^- , t^+ はおのおの衝突直前・直後の時刻である。この系は、より複雑かつ一般的な構成を有する区分線

Fig. 1 Physical model of one side impact oscillator system

形系を研究するための基本モデルと考えられるが、それ自身、多様な動的挙動を呈することから、分岐やカオスに関連して近年詳しく調べられている^{(1)~(3)}。本論文では、ばね剛性 β が0でない場合を扱い、これが0となるケースは別報にて論じる。以下に述べる議論は、若干の記号の読み替えと解釈の変更によって、両側に衝突境界を有する衝突振動系

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x = \eta \cos(\omega t); \quad |x| < \gamma \quad (3a)$$

$$\dot{x}(t^+) = -r\dot{x}(t^-); \quad |x| = \gamma \quad (3b)$$

にも適用できる。

2.2 一般解 定常的な衝突を生じる解のみを考え、ゼノン軌道⁽⁹⁾（有限時間内に領域境界と無限回交差する解）または、質点が速度0で $x = \gamma$ に接したまま一定区間留まる停滞を伴う解⁽⁸⁾は本論文の考察から除外する。 $x(t_0) = \gamma$, $\dot{x}(t_0) > 0$ を初期条件とし、衝突境界と $t_1, \dots, t_{m-1}$ で衝突する、時刻 t_m までに成り立つ解を $x_{t_0, t_m}(t)$ と表記する。式(3)で表される両側に衝突境界を有する系では、衝突時刻列を $|x(t_i)| = \gamma$, $\dot{x}(t_i) \neq 0$ となる $t_i (i \in \mathbf{Z})$ と読み替えればよい。ここで、 $\mathbf{Z}$ は整数の集合である。以下では、初期時刻は衝突時刻 t_0 上にとるものとする。

2.2.1 接合法による定式化 衝突振動系(2)は、衝突と衝突の間では線形システムと等価であるので、任意の衝突時刻 $t_i^- (i \in \mathbf{Z})$ から次の衝突時刻 t_{i+1}^- における解は、領域ごとの解（部分解）を衝突ごとに接続していくことによって求められる⁽⁴⁾。

$$x_{t_i, t_{i+1}}(t) = \mathcal{L}(t - t_i; x(t_i^+)) \quad (4)$$

ここで $\mathbf{x}(t) \equiv [x(t), \dot{x}(t)]^T$ を状態ベクトル、 $[\]^T$ を転置行列を表す記号とすると、 $\mathbf{x}(t_0^-)$ を初期条件とする線形システムの一般解は次式で表される。

$$\mathcal{L}(t - t_0; \mathbf{x}(t_0)) \equiv \mathcal{T}(t - t_0) \{ \mathbf{x}(t_0) - \mathcal{T}(t_0) \} + \mathcal{T}(t) \quad (5)$$

また, $\mathcal{T}(t), \mathcal{F}(t)$ はおのこの

$$\mathcal{T}(t) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{T}(t) & \mathcal{F}(t) \\ \dot{\mathcal{T}}(t) & \dot{\mathcal{F}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}(t) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{T}(t) \\ \dot{\mathcal{T}}(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

で定義される線形システムの状態推移作用素と入力応答関数ベクトルであり, $\mathcal{T}(t)$ の各要素は $\beta - \zeta$ パラメータ空間で表 1 のように, $\mathcal{F}(t)$ は次式のように表される.

$$\mathcal{F}(t) = \frac{\eta}{\sqrt{(\beta - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}} \cos \left(\omega t + \tan^{-1} \frac{-2\zeta\omega}{\beta - \omega^2} \right) \quad (7)$$

しかしながら, 衝突時間間隔は次式の非線形差分方程式により陰的に規定され, この超越方程式を数値的に解くことによるのみ求められる.

$$t_{i+1} \equiv \min\{t|x(t; \gamma, -r\dot{x}(t_i^-)) = \gamma, t > t_i\} \quad (8)$$

したがって, 式(4) は, 隣接する衝突と衝突の間 ($t_i \leq t \leq t_{i+1}$) でのみ物理的な意味をもつ形式解である. 本論文では, 定常的に衝突し続ける有界な解を考察の対象とするので, 超越方程式 (8) が常に解を持つ場合に限定して理論を展開する.

2.2.2 自己参照フィードバックによる定式化 衝突振動系(2)の衝突と衝突の間に成り立つ解(部分解)が線形システムの解(4)によって陽に求められることは, 直感的には厳密な理論解析を展開する上で大きなメリットとなることが期待される. しかしながら, これらの解を衝突ごとに接続してゆく操作は, 衝突瞬間の状態でリセットされた初期条件 $\mathbf{x}(t_i^+)$ をもつ区間 $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ での新たな線形システムの解を見ていることに他ならず, t_i 以前の非線形性の影響は新たな初期値 $\mathbf{x}(t_i^+)$ の中に集約され, t_i 以降, 表に出ない. したがって, 衝突時間間隔が式(8)によって超越的に規定される以上, そこから得られる情報は必然的に衝突状態間における個別の線形システムに局在化したものに限定される. 系の非線形性は衝突の前後にまたがる大域的な状況を考慮して初めて発現するので, 局所解をつないでゆく従来の表記法は, 解全体の構造を把握し, それと表裏をなす多様な非線形現象を包括的に理解する上では明らかに不十分である.

このような理論的な困難を打開するために, 著者らは衝突による非線形性を系への仮想的な外力とみなして, 運動方程式(2)を

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x = \eta \cos \omega t - \sum_{t_i \in Q} (1+r)\dot{x}(t_i^-)\delta(t-t_i) \quad (9)$$

$; x \leq \gamma$

Table 1 State transfer functions $\mathcal{T}(t)$ and $\mathcal{F}(t)$
 $\Omega^\pm = \sqrt{\pm(\beta - \zeta^2)}$

parameters	$\mathcal{T}(t)$	$\mathcal{F}(t)$
$\beta > \zeta^2 \geq 0$	$e^{-\zeta t} (\cos \Omega^+ t + \frac{\zeta}{\Omega^+} \sin \Omega^+ t)$	$e^{-\zeta t} \frac{1}{\Omega^+} \sin \Omega^+ t$
$\beta < \zeta^2, \beta \neq 0$	$e^{-\zeta t} (\cosh \Omega^- t + \frac{\zeta}{\Omega^-} \sinh \Omega^- t)$	$e^{-\zeta t} \frac{1}{\Omega^-} \sinh \Omega^- t$
$\beta = \zeta^2 \neq 0$	$e^{-\zeta t} (1 + \zeta t)$	$e^{-\zeta t} t$
$\beta = 0, \zeta \neq 0$	1	$\frac{1 - e^{-2\zeta t}}{2\zeta}$
$\beta = \zeta = 0$	1	t

のように厳密線形化し, 非線形性と等価な外力による線形システムの応答を見掛けの重ね合わせの原理を適用して解く“擬フィードバック形式”による大域的な解析法を提案してきた⁽⁶⁾. ここで, $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数, Q は超越方程式(8)の解である衝突時刻の系列の集合を表し, その特定の実現値の系列を陰的に規定されるパラメータとみなす. この方法によれば, 解 $\mathbf{x}_{t_0^-, t_m^-}(t)$ は, 線形システムの一般解と衝突によって発生するインパルス応答列 (“前方擬フィードバック過程”と呼ぶ)との重ね合わせによって次式のように大域的に表記できる.

$$\mathbf{x}_{t_0^-, t_m^-}(t) = \mathbf{u}(t - t_0)\mathcal{L}(t - t_0; \mathbf{x}(t_0^-)) + \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{u}(t - t_i)\mathcal{T}(t - t_i)\mathcal{F}\mathbf{x}_{t_0^-, t_i^-}(t_i^-) \quad (10)$$

ここで $\mathbf{u}(t)$ は単位ステップ関数, $\mathcal{L}, \mathcal{F}$ は次式で定義されるインパルス行列である ($\mathcal{F}$ は 4 節で用いる).

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(1+r) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+r \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(10) は超越的に規定される衝突時刻の系列 $t_0, \dots, t_m$ をパラメータとする形式解である点で部分解(4)の接続による表現と共通するが, 衝突時刻間に限定されずに大域的に成り立つことに顕著な特長を有する.

2.3 定常解の大域的な導出 本論文では, 定常解 (stationary solution) を定常的に衝突し続ける有界な解”と定義する. 無限の過去 ($t \rightarrow -\infty$) に初期値をとる解が未来永劫, 有界であれば, それは定常であると考えられる. 振幅が小さく衝突を生じない場合は定常的に 0 回衝突する解と考えられるので, 線形システムの定常解に帰着する. 線形システムの自由振動解が振動的に減衰するいわゆる “不足減衰” となるパラメータ領域 ($\beta > \zeta^2$) では, 状態推移作用素に関して次式

が成り立つ。

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \mathcal{J}(t - \tau) \right\} = 0 \quad (12)$$

これは、初期値の記憶が時間の経過と共に指数関数的に失われることを意味する。そこで、衝突振動系の一般解(10)で初期時刻を t_0 から t_{-n} にシフトし、 $m, n \rightarrow +\infty$ の極限をとると、右辺第1項に現れる線形システムの一般解は $\beta > \zeta^2$ では次式

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(t - t_{-n}; \mathbf{x}(t_{-n})) = \mathcal{J}(t) \quad (13)$$

のように線形システムの定常解 $\mathcal{J}(t)$ に収束する。この極限操作 $-n \rightarrow -\infty$ で初期時刻は無限の過去に移行するが、無限の過去という特定の時刻は存在せず、初期時刻はいくらでも遡ることができるので、無限の過去における初期値 $\mathbf{x}(t_{-\infty})$ の値は不定となる。しかしながら、定常解は無限度でも有界と考えられるので、式(13)の極限値は右辺の値に確定する。したがって、定常解 $(\mathbf{x}(t) \equiv [\mathcal{J}(t), \dot{\mathcal{J}}(t)]^t$ と表記する)は次式のように大域的に表せることになる。

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{J}(t) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t - t_i) \mathcal{J}(t - t_i) \mathbf{V} \mathbf{x}(t_i^-) \quad (14)$$

これは、無限の過去において形式的に次式が成立することを意味する。

$$\mathbf{x}(t_{-\infty}) = \mathcal{J}(t_{-\infty}) \quad (15)$$

式(14)は衝突振動系(2)に発生する周期解、カオス解を含むあらゆる定常解を、無限個の衝突時刻と衝突速度の系列で完全に規定する。

2.4 フィードバック総和法による周期解の大域的導出
著者は、以下に概要を示すフィードバック重畳法による周期解の大域的な導出法を提案した。 m, n を正整数とし、周期 $T (= 2\pi n / \omega)$ の間に衝突境界 ($x = \gamma$) と m 回衝突する周期解を $\mathbf{x}_m^n(t)$ と表記する。このような周期解が実現したとすると、無限の過去 ($t \rightarrow -\infty$) から無限の未来 ($t \rightarrow +\infty$) までの可算無限個の衝突時間系列は周期的交差時間系列

$$t_0 + kT, t_1 + kT, \dots, t_{m-1} + kT \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (16)$$

となる。したがって、周期解 $\mathbf{x}_m^n(t)$ では式(14)の無限個の擬フィードバック応答の総和はインパルス応答を周期的にシフトしたものの無限和に帰着し、その値は次式により求められる⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t - kT) \mathcal{J}(t - kT) = \mathcal{J}\left(t - T \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right) \quad (17)$$

ここで、 $[x]$ は x を超えない最大整数であり、 $\mathcal{J}(t)$ と p はおのおの次式で定義される。

$$\mathcal{J}(t) \equiv \frac{\mathcal{J}(t) - e^{-2\zeta T} \mathcal{J}(t - T)}{p} \quad (18)$$

$$p \equiv 1 - \{\mathcal{J}(T) + \dot{\mathcal{J}}(T)\} + e^{-2\zeta T} \neq 0 (\beta \neq 0) \quad (19)$$

式(17)による無限和の評価結果を用いて式(14)を書き換えると、周期解は次式のように大域的に表記できる⁽⁷⁾。

$$\mathbf{x}_m^n(t) = \mathcal{J}(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{J}\left(t - t_i - T \left\lfloor \frac{t - t_i}{T} \right\rfloor\right) \mathbf{V} \mathbf{x}(t_i^-) \quad (20)$$

式(20)は、周期解が線形システムの定常解である周期関数 $\mathcal{J}(t)$ と衝突速度 $\dot{\mathbf{x}}_m^n(t_0^-), \dots, \dot{\mathbf{x}}_m^n(t_{m-1}^-)$ を重みとする m 個の周期関数 (右辺第2項の総和) との和に分解できることを示している。また、この表現によれば、周期解 $\mathbf{x}_m^n(t)$ は衝突速度 $\dot{\mathbf{x}}_m^n(t_i^-)$ ($0 \leq i \leq m-1$) を介して解自身を自己参照する周期的な循環構造を有する。そこで、再帰的代入操作によりこの自己参照を展開・消去すると、あらゆる周期解を m 個の衝突時刻 $t_0, \dots, t_{m-1}$ のみで完全に規定する大域的な関数表現が以下のように得られる⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m^n(t) = & \mathcal{J}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{J}\left(t - t_k - T \left\lfloor \frac{t - t_k}{T} \right\rfloor\right) \mathbf{V} \\ & \times \left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{0 \leq q_1, \dots, q_{i-1} \leq m-1} \prod_{j=1}^{i-1} \left\{ \mathcal{J}(t_{q_{j+1}} - t_{q_j}) \right. \right. \\ & \left. \left. + T u(-(t_{q_{j+1}} - t_{q_j})) \right\} \mathbf{V} \mathcal{J}(t_{q_1}) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

ところが、このようにして求められた周期解の表現(21)には、初期値が陽に現れない。一般に非線形システムでは、初期値に依存して異なるタイプの解が発生し得るので、解の表現には何らかの形で初期値の情報が盛り込まれていなければならないはずである。定常解の導出過程における初期時刻を無限の過去に移行する極限で現れた式(15)の結果は、定常解の無限の過去での値は、線形システムのそれと同等であることを示唆する。したがって、初期値の情報は非線形性の影響と共に、超越的に規定される無限の過去から無限の未来までの無限個の衝突時間の系列の、周期解の場合には m 個に縮約された周期的部分列の中に繰り込まれたものと解釈すべきと考えられる。そこで、この解釈の妥当性を検証し、初期値と繰り込まれた衝突時間系列との関係を明らかにすることが、課題として提起される。

3. 線形システムの周期解導出過程再考

2・4節で提起した問題に解答を与えるためには、初期値と定常解との関係についてのより深い洞察が必要となる。そこで本節では、まず線形システム

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x = \eta \cos \omega t \quad (22)$$

で、ばね剛性 β が 0 でない場合の定常周期解の導出過程における、初期値と定常周期解の関係について再検討する。

2.3 節では、 $\beta > \zeta^2$ となるパラメータ領域で初期値の現在への影響は初期値を無限の過去へ移行することによって 0 にできることから、定常解 (steady solution) を無限に時間が経過した後に系が行き着く有界な解と捉え、次式の極限操作

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}(\tau)) \right\} = \mathcal{J}(t) \equiv \mathcal{X}(t) \quad (23)$$

により、周期関数 $\mathcal{J}(t)$ を線形システムの定常解として同定した。これは、定常解が無限の過去に初期値をとる解であることを意味するが、初期値の影響は無限時間経過後の現在では減衰により消失し、陽には現れない。これに対し、過減衰となるパラメータ領域 ($\beta < \zeta^2$) では状態推移作用素は無限遠で次式のように発散する。

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left\{ \lim_{\tau \rightarrow \mp\infty} |\mathcal{J}(t - \tau)| \right\} = +\infty \quad (24)$$

したがって、 $\beta < \zeta^2$ となるパラメータ領域では $\mathcal{J}(t)$ は steady solution にはなり得ず、stationary solution としてのサドル型不安定周期解のみとなる。

一般解から定常周期解 $\mathcal{J}(t)$ を導出する上記の過程は、以下のようにも解釈できる。一般解(5)で初期時刻 τ での解とそこから時間 T 経過後の解とが周期解では等しくなることより、定常解の初期値 $\mathcal{X}(\tau)$ に関する以下の非同次方程式が得られる。

$$[\mathcal{J} - \mathcal{J}(T)]\mathcal{X}(\tau) = [\mathcal{J} - \mathcal{J}(T)]\mathcal{J}(\tau) \quad (25)$$

$\mathcal{J}$ は 2×2 の単位行列である。 $\beta \neq 0$ では作用素 $\mathcal{J} - \mathcal{J}(T)$ に逆作用素

$$[\mathcal{J} - \mathcal{J}(T)]^{-1} = \frac{\mathcal{J} - e^{-2\zeta T} \mathcal{J}(-T)}{p} \quad (26)$$

が存在する。ここで p は作用素 $\mathcal{J} - \mathcal{J}(T)$ の行列式

$$p \equiv \det(\mathcal{J} - \mathcal{J}(T)) \neq 0 \quad (27)$$

であり、式(19)に一致する。式(25)を解くことにより、周期解を実現する初期値として次式が得られる。

$$\mathcal{X}(\tau) = \mathcal{J}(\tau) \quad (28)$$

したがって、線形システムにおける定常周期解実現初期値の決定は、非同次線形方程式(25)の解空間の決定問題に帰着する。式(28)を一般解(5)の初期値に代入すると、初期値応答

$$\mathcal{J}(t - t_0)\mathbf{x}(\tau) \quad (29)$$

が初期入力応答

$$-\mathcal{J}(t - t_0)\mathcal{J}(\tau) \quad (30)$$

を相殺し、線形システムの定常解は次式で表される周期解になる。

$$\mathcal{X}(t; \mathcal{J}(\tau)) = \mathcal{J}(t) \quad (31)$$

以上の結果は、一般解を定常化するように初期値を決定することによって、定常周期解が導出できることを示している。

4. 初期値補正周期化法

3 節では、線形システムの場合には、解を定常化するように初期値を決定することにより定常周期解が導出でき、それが無限の過去に初期値を置く解として得られた定常解の表現と一致することが示された。本節では、初期値を考慮して周期解を厳密かつ大域的に導出できる新しい方法を構築することによって、この考え方が衝突振動系の場合にも拡張できることを、ばね剛性 β が 0 でない場合に明らかにする。

4.1 時間領域全域における一般解の大域表現 初期時刻 t_0 より無限の未来 ($t \geq t_0$) までに成り立つ解 (前方解) は、一般解(10)でインパルス応答和の $m \rightarrow +\infty$ の極限をとることによって形式的に次式のように表される。

$$u(t - t_0)\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_0^-)) = u(t - t_0)\mathcal{J}(t - t_0; \mathbf{x}(t_0^-)) + \sum_{i=0}^{+\infty} u(t - t_i)\mathcal{J}(t - t_i)\mathcal{V}\mathbf{x}(t_i^-) \quad (32)$$

同様に、初期時刻 t_0 より無限の過去 ($t < t_0$) までに成り立つ解 (後方解) は、線形システムの一般解と衝突に起因して発生する逆インパルス応答列 (“後方擬フィードバック過程”と呼ぶ) との和によって形式的に次式のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{u}(-(t - t_0))\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_0^-)) &= \bar{u}(-(t - t_0))\mathcal{J}(t - t_0; \mathbf{x}(t_0^-)) \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{-1} \bar{u}(-(t - t_i))\mathcal{J}(t - t_i)\mathcal{V}\mathbf{x}(t_i^-) \end{aligned} \quad (33)$$

ここで、時間を逆転した向きへの単位ステップ関数を $\bar{u}(-t) \equiv 1 - u(t)$ と定義した。したがって、初期時刻を t_0^- とする全時間領域で成り立つ解（“全域解”と呼ぶ）は以下のように形式的に表せる。

$$\begin{aligned} x(t; x(t_0^-)) &= \mathcal{L}(t - t_0; x(t_0^-)) \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{-1} \bar{u}(-(t - t_i)) \mathcal{J}(t - t_i) \mathcal{V} x(t_i^-) \\ &+ \sum_{i=0}^{+\infty} u(t - t_i) \mathcal{J}(t - t_i) \mathcal{V} x(t_i^-) \end{aligned} \quad (34)$$

$\bar{u}(-t) = 1 - u(t)$ であることを用いると、式(34)は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} x(t; x(t_0^-)) &= \mathcal{L}(t - t_0; x(t_0^-)) \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{-1} \mathcal{J}(t - t_i) \mathcal{V} x(t_i^-) \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t - t_i) \mathcal{J}(t - t_i) \mathcal{V} x(t_i^-) \quad (35) \\ &= \mathcal{L}(t - t_0; x(t_0^-)) + \sum_{i=0}^{+\infty} \mathcal{J}(t - t_i) \mathcal{V} x(t_i^-) \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \bar{u}(-(t - t_i)) \mathcal{J}(t - t_i) \mathcal{V} x(t_i^-) \quad (36) \end{aligned}$$

4.2 周期解実現初期値の決定 定常解では、前方解(32)、後方解(33)、および全域解(34)～(36)は有限な値をもつ。以下では、これらの表現をもとに周期解を実現する初期条件を決定する方法を示す。前方解(32)の t_m^- の値は次式となる。

$$\begin{aligned} x(t_m^-) &= \mathcal{J}(t_m - t_0) \{x(t_0^-) - \mathcal{J}(t_0)\} + \mathcal{J}(t_m) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{J}(t_m - t_i) \mathcal{V} x(t_i^-) \end{aligned} \quad (37)$$

周期解 $x_m^n(t)$ では $t_m = t_0 + T$, $x_m^n(t_m^-) = x_m^n(t_0^-)$ が成り立つことから、式(37)を書き換えると、周期解を実現する初期値の導出は、以下の非同次線形方程式(38)の解空間を決定する問題に帰着する。

$$\begin{aligned} [\mathcal{J} - \mathcal{J}(T)] [x_m^n(t_0^-) - \mathcal{J}(t_0)] \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{J}(t_0 - t_i + T) \mathcal{V} x_m^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (38)$$

$\beta \neq 0$ では $\mathcal{J} - \mathcal{J}(T)$ は逆作用素をもつので、式(38)を $x_m^n(t_0^-) - \mathcal{J}(t_0)$ について解くと、周期解を実現する初期値として次式が得られる。

$$\begin{aligned} x_m^n(t_0^-) &= \mathcal{J}(t_0) \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{Q}(t_0 - t_i + T) \mathcal{V} x_m^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (39)$$

式(38)を解く過程で、状態推移作用素 $\mathcal{J}(t)$ に関する加法定理

$$\mathcal{J}(a + b) = \mathcal{J}(a) \mathcal{J}(b) \quad (40)$$

と状態推移作用素の可逆性から導かれる関係式

$$e^{-2\zeta b} \begin{bmatrix} \mathcal{J}(-b) & -\mathcal{J}(-b) \\ -\mathcal{J}(-b) & \mathcal{J}(-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}(b) & \mathcal{J}(b) \\ \mathcal{J}(b) & \mathcal{J}(b) \end{bmatrix} \quad (41)$$

から、次式が成り立つことを用いた。

$$\text{adj}(\mathcal{J}(b)) \mathcal{J}(a) = e^{-2\zeta b} \mathcal{J}(a - b) \quad (42)$$

4.3 初期値補正による解の周期性化 周期解実現初期値(39)を全域解(35)の初期値に代入すると、初期値応答と初期入力応答の和に関して次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(t - t_0) \{x_m^n(t_0^-) - \mathcal{J}(t_0)\} \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{Q}(t - t_i + T) \mathcal{V} x_m^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (43)$$

一方、全域解(35)の右辺第2項の無限和(の符号反転)は、周期解 $x_m^n(t)$ では次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{J}(t - t_i - kT) \mathcal{V} x_m^n(t_i^-) \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{J}(t - t_i + kT) \right\} \mathcal{V} x_m^n(t_i^-) \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{Q}(t - t_i + T) \mathcal{V} x_m^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (44)$$

また、式(35)の右辺第3項の両側無限和は、周期解 $x_m^n(t)$ では以下のように m 個の周期関数の和に書き換えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{m-1} u(t - t_i - kT) \mathcal{J}(t - t_i - kT) \mathcal{V} x_m^n(t_i^-) \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t - t_i - kT) \mathcal{J}(t - t_i - kT) \right\} \\ \times \mathcal{V} x_m^n(t_i^-) \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{Q} \left(t - t_i - T \left[\frac{t - t_i}{T} \right] \right) \mathcal{V} x_m^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (45)$$

式(44)、(45)で、式(17)に示す無限和の評価結果を用いた。式(44)に示す書き換えの結果より、式(43)と式(44)とは相殺するので、式(45)を用いて全域解(35)を書き換えると、2.4節で無限の過去から無限の未来までに生成される周期的擬フィードバック応答の無限

Fig. 2 Solution periodize process by initial value correction

和を解析的に評価することによって得られた周期解の大域表現(20)が得られる。解を周期化するように補正された初期値により周期解が導出される過程を、図2に模式的に示した。後方解(33)の $t_{-m} = t_0 - T$ での値が周期解 $\mathcal{X}_m^n(t)$ では $\mathcal{X}_m^n(t_{-m}) = \mathcal{X}_m^n(t_0^-)$ となることを用いて、式(38)以降で展開した議論を適用することによっても、同様の大域表現(20)が得られる。式(20)に含まれる m 個の自己参照的な衝突速度を再帰的展開により消去すると、 m 個の衝突時刻のみをパラメータとする表現(21)に帰着する。

4.4 一般解周期化補正と擬フィードバック応答和の等価性 上述した周期解の導出過程を、初期値の補正の影響の観点から再検討してみる。前方解(32)の右辺第2項の前方擬フィードバック過程は、次式

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{+\infty} u(t-t_i) \mathcal{F}(t-t_i) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \\ &= - \sum_{i=-\infty}^{-1} u(t-t_i) \mathcal{F}(t-t_i) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t-t_i) \mathcal{F}(t-t_i) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \quad (46) \end{aligned}$$

のように非有界成分(右辺第1項)と周期的定常成分(右辺第2項)との和に分解できる。これは、 t_0 より未来で周期的に生成される擬フィードバック応答の無限和である前方擬フィードバック過程が、式(46)右辺第1項の影響により周期関数にならないことを意味する。周期解 $\mathcal{X}_m^n(t)$ が実現するためには、上記の非有界成分を打ち消すような t_0 より未来に向かう作用が必要不可欠。これは無限の過去から t_{-1} までに

生成された無限個の周期的擬フィードバック応答の和(式(46)右辺第1項の符号反転)が、前方擬フィードバック過程(46)を t_0 より未来で周期化する補正項の役割を担うことを意味する。ところが、式(43)と(44)が同等であることより、初期値応答と初期入力応答の和と、無限の過去から t_{-1} までに生成される前方擬フィードバック過程の t_0 以降への影響とは、以下のように交換可能であることがわかる。

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(t-t_0) \{ \mathcal{X}_m^n(t_0^-) - \mathcal{F}(t_0) \} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{F}(t-t_i-kT) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \quad (47) \end{aligned}$$

したがって、初期値応答と初期入力応答の和が解を周期化する補正項であり、そのような初期値のとりべき条件が式(39)で与えられることになる。

後方解(33)右辺第2項における後方擬フィードバック過程と、後方解をベースにした全域解(36)に関する同様の考察によって、式(47)に対応する初期値応答と初期入力応答の和と、無限の未来から t_0 までに生成される後方擬フィードバック過程の t_0 より過去への影響に関する、以下の交換可能関係が得られる。

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(t-t_0) \{ \mathcal{X}_m^n(t_0^-) - \mathcal{F}(t_0) \} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{F}(t-t_i-kT) \bar{\mathcal{V}} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \quad (48) \end{aligned}$$

したがって、交換関係(47),(48)より、初期値応答と初期入力応答の和は、解を未来と過去の全域にわたって周期化する補正項であることが結論できる。

初期値応答と初期入力応答の和と、前方・後方擬フィードバック過程に関する2つの交換関係(47),(48)が等価であることより、周期的な擬フィードバック応答の総和に関して次の恒等式が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t-t_i-kT) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) = 0 \quad (49)$$

これは、無限の過去から無限の未来までの非線形性の影響は、定常周期解では総体として0となることを意味する。この性質(“総和零値性”と呼ぶものとする)は任意の時刻 t で成り立つので、特に無限遠でも成り立つ。この事実から、定常解の無限遠での値が解析的に評価できる。定常解の無限の未来での値は、定常解(14)の任意の衝突瞬間 t_j^- における値で以下の極限をとることによって得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_m^n(t_\infty) &\equiv \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_m^n(t_j^-) \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \left[\mathcal{F}(t_j) + \sum_{i=-\infty}^{j-1} \mathcal{F}(t_j-t_i) \mathcal{V} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \right] \\ &= \mathcal{F}(t_\infty) \quad (50) \end{aligned}$$

式(50)の最右辺の導出で、総和零値性(49)が無遠慮でも成り立つことを用いた。同様に、定常解の無限の過去での値は、定常解(14)の時間を反転した表現

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t) = & \mathcal{S}(t) \\ & + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \bar{u}(-(t-t_i)) \mathcal{S}(t-t_i) \bar{\mathcal{V}} \mathcal{X}(t_i^-) \end{aligned} \quad (51)$$

を考え、その任意の衝突瞬間 t_j^- における値で以下の極限をとることによって得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_m^n(t_{-\infty}) & \equiv \lim_{j \rightarrow -\infty} \mathcal{X}_m^n(t_j^-) \\ & = \lim_{j \rightarrow -\infty} \left[\mathcal{S}(t_j) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathcal{S}(t_j - t_i) \bar{\mathcal{V}} \mathcal{X}_m^n(t_i^-) \right] \\ & = \mathcal{S}(t_{-\infty}) \end{aligned} \quad (52)$$

これは、無限の過去における定常解の初期値が形式的に線形システムのそれと同等になることを示した式(15)の結果を裏付けるものとなっている。定常解の無限の未来での最終値は、時間を逆転したシステムにおける無限の過去における初期値に対応するので、式(50)、(52)の結果は、定常解では無限遠での値が線形システムのそれと同等の不定性を有することを意味する。擬フィードバック形式は、非線形性の影響を等価なフィードバックに置き換えて線形化するものであるので、無限回線形化され尽くした無限の未来と無限の過去は、それ以上線形化することなく、既にそれ自体で線形であると解釈できる。

以上の考察は、定常周期解の大域表現(20)(または(21))に初期値が陽に現れない理由を説明するものとなっている。式(43)から式(45)を経由して式(20)を導出するまでの議論によれば、時刻 t_0^- で周期解を実現する初期値は、一般解の初期値に代入することによって無限の過去からの衝突の影響が重ね合わされた等価な和(43)に置き換えられ、式(44)と相殺することによって表面化しない。一方、無限の過去における初期値、無限の未来における最終値は、式(50)、(52)の結果が示すように、線形システムのそれと形式的に同等となるので、線形システムで初期値応答(29)と初期入力応答(30)が互いにキャンセルするのと同様の理由によって消失する。したがって、無限の過去に初期値をもつ解としての定常解の表現にも、初期値の影響は陽には現れない。これが、周期解の大域表現に、初期値の情報が陽に含まれないことの理由である。初期条件を陽に指定せずに異なるタイプの解を記述するには、衝突のあり方を規定する(一般には)無限個の衝突時

刻の系列がそれを補う役割を担うと考えられるが、周期解の場合には、その大域表現(21)が示すように、 m 個の衝突時刻のみに縮約される。以上により、周期解の大域表現に初期値の影響が陽に現れないことが理論的に明らかになった。

5. 結 言

最も基本的な区分線形系である衝突振動系の周期解を大域的に導出できる“初期値補正周期化法”を提案し、 $\beta \neq 0$ の場合における周期解の大域的な関数表現が得られた。これは、先に無限の過去からの擬フィードバック応答の無限和を計算することによって求めたものと同一の結果となる。また、定常周期解では初期値応答と初期入力応答の和が、初期時刻より無限の過去または無限の未来までの擬フィードバック応答の無限和と交換可能であることを示した。このことは、定常周期解では無限の過去から無限の未来までの非線形性の影響は総体として 0 となることを示唆する。以上により、求められた周期解の大域表現に初期値が陽に現れないことが理論的に裏付けられた。

文 献

- (1) Shaw, S.W. and Holmes, P.J., “A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator”, *J. Sound and Vibr.*, 90, (1983), 129–155.
- (2) Foale, S., Bishop R., “Bifurcations in Impact Oscillations”, *Nonlinear Dynamics* 6 (1994), 285–299
- (3) Budd, C., Dux F., “Chattering and Related Behaviour in Impact Oscillators”, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A347 (1994), 365–389
- (4) 清水辰次郎, 非線形振動論, (1965), 114–122, 培風館
- (5) 今村仁, 鈴木浩平, “区分的線形振動系における一般解の大域表現と標準形(非線形性が不連続な場合)”, *機論*, 57-541, C(1991), 2811–2818.
- (6) 今村仁, 鈴木浩平, “衝突振動系の一般解に現れる再帰的フィードバック構造”, *機論*, 66-645, C(2000), 1468–1474.
- (7) 今村仁, 鈴木浩平, “区分線形振動系の周期解の標準形(フィードバック重畳法の提案)”, *機論*, 64-617, C(1998), 36–44.
- (8) 今村仁, 鈴木浩平, “衝突振動系の定常応答と周期解の一般形(停滞を伴わない場合)”, *機論*, 67-653, C(2001), 23–29.
- (9) 井村順一, “ハイブリッドシステムの制御理論構築を目指して—いかに捉えるか?—”, *システム, 制御, 情報*, 43, 12 (1999), 651–659.