固有振動数による薄板の損傷同定に関する研究*

東 明彦^{*1}, 水口文洋^{*2}

A Study on Identification of Crack by Using Natural Frequency

Akihiko HIGASHI^{*3} and Fumihiro MIZUGUCHI^{*3} Japan Coast Guard Academy,

5-1 Wakaba, Kure-shi, Hiroshima, 737-8512 Japan

In this paper, an identification of a crack in a plate using characteristics of vibration is investigated. It is known that natural frequencies vary with growth of crack in the various structures. Then relationship between change of natural frequencies and change of stiffness of structures is clarified. We propose an estimation method by using natural frequencies, which are related to stiffness of structure. We apply the proposed estimation method to a rectangular plate with numerical analysis. The numerical analysis is performed with some mode of vibration. As a result, the proposed method can identify a location and length of a crack in a plate.

Key Words: Identification, Structural Analysis, Modal Analysis, Inverse Problem, Natural Frequency, Finite Element Method

1. 結 論

船舶や航空機など多くの機械構造物においては、今日ますます大型化、複雑化が進んでいる。このような大型機械構造物において、ひとたびき裂等の損傷が発生すると、損傷の拡大や損傷による構造物の強度の低下をまねくだけでなく、人命をも脅かす大事故へと発展する可能性がある。損傷の発生場所によっては、損傷の発生を目視で確認することができるが、複雑化、大型化している機械構造物の運転状態において、き裂等の損傷の全てについて検知することは非常に困難である。

これまでの構造物の損傷等の同定に関する研究は、非破壊検査等に代表されるように材料内部の欠陥を対象とするものが多く、大型機械構造物に多用されている薄板構造物のき裂等の損傷に関する研究は少ない。なかでも薄板構造物のき裂に関する研究として、き裂の大きさによって構造物の振動特性の1つである固有振動数の変化に関する研究^{①②}があるが、き裂の同定までを行った研究ではない。また、振動情報を用いたき裂の同定に関する研究としては、R.Y.Liang らによるはりのき裂について予測した報告^③があるが、平板構造物の場合には非常に複雑、困難となるため、平板について行った研究はほとんどない。また、平板のき裂の同定に関する研究としては、堀辺らによるニューラルネットワークを用いてき裂の同定を行った研究^④がある。さらに、

P.Cawley らによって、平板全域の様々な箇所にき裂がある場合について、固有振動数の変化に関するチャートを作成することによりき裂の同定を行った報告^⑤などがある。しかし、これらの方法では入力情報は振動情報だけでなく、対象物ごとに固有振動数の変化に関するチャートを作成する必要があるなど、非常に困難である。このように、き裂の同定に関する研究は、対象物がはりなどの簡単な場合が多く、平板の場合には複雑さが増すことからあまり行われていない。しかし、構造物の固有振動数が、き裂の発生によって変化するというこれはこれまでに行われている多くの報告により明らかである。

そこで、本研究では平板を対象とし、平板にスリット状のき裂が発生した場合を考え、このき裂の発生に伴って変化する固有振動数に着目し、き裂の発生位置や大きさを同定する方法について検討を行うこととする。そして、本研究で提案する手法を用いることによってき裂の発生位置や大きさなどの同定可能性について数値解析により検討を行うこととした。

2. 固有振動数の変化によるき裂推定法

構造物の振動解析を行う場合、構造物の運動方程式は一般的に次式で表される。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

ここで、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ は、それぞれ質量、減衰、剛性マトリックスを表し、 $\{x\}$ 、 $\{f\}$ は、それぞれ平板のたわみ、および、外力ベクトルを表す。また、減衰マトリックス $[C]$ は、次式で表される比例減衰

* 原稿受付 2003年10月14日。

^{*1} 正員、海上保安大学校(〒737-8512 呉市若葉町5-1)。^{*2} 海上保安大学校。

E-mail: higashi@jcg.ac.jp

マトリックスを用いることとする。

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2)$$

ここで、 α 、 β は比例減衰係数であり、減衰が小さいとして減衰の影響を無視すると、固有値問題は次式で与えられる。

$$([K] - \lambda[M])\{X\} = 0 \quad (3)$$

そこで、き裂の発生に伴う剛性 $[K]$ 、固有ベクトル $\{X\}$ 、および、固有値 λ の変化量を、それぞれ $[\Delta K]$ 、 $\{\Delta X\}$ 、 $\Delta \lambda$ で表し、き裂の発生に伴う質量の変化はないものとする、き裂発生後の固有値問題は次式で表されることとなる。

$$([K] + [\Delta K] - (\lambda + \Delta \lambda)[M])\{\{X\} + \{\Delta X\}\} = 0 \quad (4)$$

ここで、き裂発生後の固有値問題を表す式 (4) に、式 (3) の関係を用いると、次式が得られる。

$$([K] - \lambda[M])\{\Delta X\} + ([\Delta K] - \Delta \lambda[M])\{\{X\} + \{\Delta X\}\} = 0 \quad (5)$$

そこで、 $[K]$ 、 $[M]$ は対称行列であることから、式 (3) は、 $\{X\}^T ([K] - \lambda[M]) = 0$ と表すことができる。よって、式 (5) の前から $\{X\}^T$ を乗ずると、 $\{X\}^T ([K] - \lambda[M]) \{\{X\} + \{\Delta X\}\} = 0$ であることから、次式が得られる。

$$\{X\}^T ([\Delta K] - \Delta \lambda[M])\{\{X\} + \{\Delta X\}\} = 0 \quad (6)$$

式 (6) より、き裂発生による固有振動数の変化は、次式で表されることとなる。

$$\Delta \lambda = \frac{\{X\}^T [\Delta K] (\{X\} + \{\Delta X\})}{\{X\}^T [M] (\{X\} + \{\Delta X\})} \quad (7)$$

一方、式 (5) において、 $[F] = ([K] - \lambda[M])$ 、 $[\Delta F] = ([\Delta K] - \Delta \lambda[M])$ と表すと、次式のように表すことができる。

$$[F]\{\Delta X\} + [\Delta F](\{X\} + \{\Delta X\}) = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\{X\}$ 、 $\{\Delta X\}$ についてまとめることにより、次式が得られる。

$$([F] + [\Delta F])\{\Delta X\} = -[\Delta F]\{X\} \quad (9)$$

ここで、上式において、き裂発生前の構造物の特性がわかっていれば、 $[K]$ 、 λ 、 $[M]$ が既知であるので $[F]$ は既知となる。さらに、き裂発生後の固有振動数の変化量がわかれば、 $\Delta \lambda$ が既知となるので、

き裂発生に伴う剛性の変化量 $[\Delta K]$ を適当にき裂を仮定し見積もることにより、 $[\Delta F]$ が求められる。また、 $\{X\}$ は既知であるので、式 (9) から $\{\Delta X\}$ を求めることができる。よって、得られた $\{\Delta X\}$ を式 (11) に代入することにより $\Delta \lambda$ が求められる。

すなわち、ここで求められた $\Delta \lambda$ が、実際の固有振動数の変化から求めた $\Delta \lambda$ と一致すれば、 $[\Delta F]$ 及び $[\Delta K]$ が適正に見積もられていることになる。このことは言い換えれば、き裂による剛性の変化、すなわちき裂の同定ができたことを意味する。

なお、本研究では平板の振動解析に有限要素法を適用し、これにより得られる質量、剛性マトリックスなどを用いて解析を行い、固有振動数の変化を求める。また、損傷による剛性の変化については、剛性が板厚に依存することから、損傷を想定した要素における剛性の大きさが非常に小さくなるものとして解析を行うこととした。

そこで、 i 次モードにおける実際の固有値の変化量と推定した固有値の変化量を、それぞれ $\Delta \lambda_{Mi}$ 、 $\Delta \lambda_{Ei}$ と表し、固有値の推定に用いた剛性の変化量の妥当性を評価するため、次式で表される評価関数を定義する。

$$e_i = \left(\frac{\Delta \lambda_{Mi} - \Delta \lambda_{Ei}}{\Delta \lambda_{Mi}} \right)^2 \quad (10)$$

ここで、上式で表される評価関数 e_i の値が 0 に近づくほど適正な剛性の推定ができていることとなり、予測したき裂の位置や大きさがほぼ妥当であることを意味している。また、式 (10) では、振動モードごとの評価であるため、複数の振動モードを用いてき裂の同定を行う場合には、複数の振動モード (N 個) に対して求めた評価関数値の和を用いて評価することとし、次式で定義する。

$$E = \sum_{i=1}^N e_i \quad (11)$$

3. 評価関数の妥当性

3.1 解析モデル

本研究では構造物の基本要素である平板を解析対象とし、図 1 に解析モデルを示す。また、平板の材料定数等を表 1 に示す。ここで、本研究において対象とする平板のき裂は、図 1 に示すようにスリット状のき裂とし、き裂の幅は非常に狭く、形状は直線状のものとする。また、き裂の中心は $(x, y) = (0.1375\text{m}, 0.15\text{m})$ にあり、長さ 0.0275m のき裂が x 軸と平行に存在するものとする。

3-2 き裂の発生による固有振動数の変化

図 1 に示す解析モデルにおいて、き裂発生前、発生後の固有振動数について求めた結果を表 2 に示す。表中において、振動モード(a,b)のa及びbは、それぞれ平板の x, y 方向の振動の腹の数を示している。この結果を見ると、き裂が入ることによって固有振動数が変化することについては確認できる。

また、き裂の発生に伴う固有振動数の変化の程度が各振動モードによって大きく異なっていることがわかる。すなわち、き裂の位置によって生じる剛性の変化は、振動モードによって影響の度合いが異なっていることがわかる。このことから、き裂の推定に用いる振動モードについて、固有振動数の変化の大きい単一の振動モードに着目した場合と、複数の

Fig.1 Analytical model

Table1 The material constant values for analysis

Plate thickness (m)	2.30×10^{-3}
Young's modulus (GPa)	2.06×10^2
Mass density (kg/m^3)	7.85×10^3
Poisson's ratio	0.30
Length of crack (m)	0.0275

Table2 Analytical results of natural frequencies

Mode of vibration	Without crack f_0 Hz	With crack f_c Hz	Δf %
1 st (1,1)	140.15	139.46	0.492
2 nd (2,1)	170.50	170.50	0.001
3 rd (1,2)	297.10	295.90	0.404
4 th (3,1)	388.62	388.59	0.008
5 th (2,2)	430.80	430.68	0.279
6 th (3,2)	566.14	566.13	0.002
7 th (1,3)	575.17	575.00	0.030
8 th (4,1)	767.34	761.76	0.727
9 th (2,3)	811.94	811.92	0.002
10 th (3,3)	838.84	838.38	0.055

但し、 $\Delta f = (f_0 - f_c)/f_0$ である。

振動モードに着目した場合の検討を行うこととする。

3-3 解析結果および考察

前節で示した式 (10) や式 (11) の評価関数を用いることにより、き裂発生位置や大きさに対して、確実に妥当なき裂を決定できるかどうかについて調べることとする。

3-3-1 解析例 1

き裂の大きさが既知であるとした場合について、き裂の発生位置の同定可能性を調べた結果を図 2 に示す。これらの図において、縦軸は式 (10) や式 (11) で与えられる評価関数 e_i , E の値 (評価関数値) を示しており、横軸 L は真のき裂と仮定したき裂の中心間距離を表している。なお、ここでは真のき裂と仮定したき裂の方向は同じとしている。すなわち、横軸が 0 となると縦軸に示す評価関数値が最小となれば、真のき裂に仮定したき裂が最も近づいていることを示すこととなる。

そこでまず、単一モードを用いた場合の結果について示す。1 次モードのみを用いて評価関数値を求めた結果を図 2 (a) に示している。この図をみると、真のき裂と仮定したき裂の中心間距離を示す横軸の値が小さくなると、縦軸の評価関数値が徐々に小さくなることを示していることがわかる。また、2 次モードだけを用いて評価関数値を求めた結果を示す図 2 (b) においても、ほぼ同様の傾向のあることがわかる。しかし、図 2 (a) の○印で示す結果のように、モードによっては仮定したき裂が真のき裂位置へと近づいているにも関わらず、部分的に評価関数値が大きくなる場合のあることがわかる。

つぎに、複数の振動モードを用いた場合の結果について示す。ここでは例として 1 次モードから 3 次モードまでの振動モードを用いて式 (11) で表される評価関数値を求めた結果を図 2 (c) に示す。この図をみると、1 次モードだけで評価した場合よりも、仮定したき裂と真のき裂位置との中心間距離が近づくにつれ評価関数値が確実に減少していることがわかる。このことから、式 (10) で表される各振動モードの評価関数値で評価を行った場合より、式 (11) で表される複数の振動モードの評価関数値を用いて評価した方が、き裂の位置を確実に同定できることがわかる。

3-3-2 解析例 2

一般的にき裂の大きさは未知であることから、き裂の大きさが未知であるとした場合において、き裂の発生位置が正確に決定できるかどうかについて調べた結果を図 3 に示す。

(a) (1,1) mode

(b) (1,2) mode

(3) $N=3((1,1),(2,1) \text{ and } (1,2) \text{ mode})$ Fig. 2 Relationship between location and E or e_i

図 3 において、縦軸や横軸の値は図 2 と同様である。また、図 3 (a), (b) は、それぞれき裂の大きさを真のき裂の大きさに対して $5/3$ 倍、 $7/3$ 倍とした場合の結果を示している。これらの図をみると、き裂の大きさを大きく見積もった場合においても、真のき裂位置に近づけば評価関数値が徐々に小さくなることがわかる。すなわち、き裂の大きさについて未知であっても、適当な大きさのき裂を仮定することによって、き裂位置の同定が可能であることがわかる。

そこで、真のき裂の位置に達したときに、き裂の大きさを正確に同定できるかどうかについて求めた

(a) (1,1) mode, Ratio of crack = $5/3$ (b) (1,1) mode, Ratio of crack = $7/3$ Fig. 3 Relationship between location and e_i

(a) (1,1) mode

(b) $N=3((1,1),(2,1) \text{ and } (1,2) \text{ mode})$ Fig. 4 Relationship between crack size and e_i or E

結果を図 4 に示す。図 4 において、縦軸の値は図 2、図 3 と同様に評価関数値を示しているが、横軸は真のき裂の大きさに対する仮定したき裂の大きさの比である。ここでは、 x 方向については真のき裂の中心位置と予測したき裂の中心位置は同じであるものとして解析を行っている。また、図 4 (a), (b) は、それぞれ、単一の振動モードでの評価として 1 次モードのみを用いた場合と、複数の振動モードでの評価として 1 次から 3 次モードまで用いた場合の結果を示している。

これらの図をみると、図 4 (a) では、真のき裂の大きさよりも小さくなったところにおいて、最小の評価関数値が得られていることから、単一の振動モードのみを用いた評価関数からは正確なき裂の同定が行えないことがわかる。一方、図 4 (b) では、き裂の大きさや位置に関して真のき裂と同じになったところで最小の評価関数値となっていることがわかる。このことから、複数の振動モードを用いて評価関数値を求めることによってき裂の推定を行うことにより、確実に真のき裂の同定が可能であることがわかる。そこで、本研究では複数の振動モードを用いて式 (11) で表される評価関数値を用いて評価することによって、き裂の同定を行うこととする。

4. き裂の推定

4.1 き裂の推定法

本研究におけるき裂の推定法の概要を図 5 に示す。この図に示すように、まず入力として、き裂発生前の状態を表す情報、すなわち構造物のモデル、固有振動数、および、固有ベクトルを与え、き裂の

Fig.5 Flow chart of estimation method

(a) Change of crack position for iteration

(b) Change of crack size for iteration

(c) Change of E for iteration

Fig.6 Results of estimation of crack

発生によって変化した固有振動数を入力として与えることとする。つぎに、適なき裂を想定し、そのときの剛性を予測することによって $[\Delta K]$ を推定する。以上の情報を用いて、固有ベクトルの変化量 $\{\Delta X\}$ を解析的に求め、得られた結果を用いて固有値の変化量 $\{\Delta \lambda_{Ei}\}$ を求めることとする。そして、これらの結果を用いて式 (11) より評価関数値 E を求めることとする。そして、この評価関数値が収束するまで、き裂の大きさ及び位置を変化させな

がら繰り返し解析を行うことによって、真のき裂を同定することとする。

4.2 き裂の推定結果および考察

図 1 に示した解析モデルを用いてスリット状のき裂の同定について数値解析を行った。ここでは、初期値として任意の大きさのき裂を任意の位置に適当に仮定し、先に示した推定法を適用することによってき裂の同定可能性について検討を行った。その結果として、仮定したき裂の位置や大きさが繰り返し解析を行うことによるき裂の同定仮定、すなわち、大きさ及び位置の変化の推移状況と、き裂の同定過程における評価関数値の推移状況について調べた結果を図 6 に示す。

まず、き裂の位置に関する同定過程を図 6 (a) に示している。この図を見ると、ここでは 2 つの異なる場所に初期値としてき裂を仮定した場合の結果を表しているが、それぞれ初期値として与えたき裂の場所に関係なく、き裂の位置は、真のき裂の位置へと解析が進むにつれ向かうと共に、最終的には真のき裂の位置と一致することがわかる。つぎに、き裂の大きさに関する同定過程について図 6 (b) に示している。ここでは、初期値としてき裂の大きさをパターン 1 の場合 7/3 倍、パターン 2 の場合 5/3 倍として与えている。この図を見ると、解析が進むにつれき裂の大きさが変化しており、最終的には真のき裂の大きさと一致していることがわかる。そこで、本研究で定義した評価関数の値に関して解析が進むにつれてどのように変化しているか調べた結果を図 6 (c) に示す。この図を見ると、繰り返し解析を行うことによって評価関数の値が小さくなっていることがわかる。すなわち、このことは本研究で提案したき裂の推定法において、評価関数値が小さくなるようにき裂の位置や大きさを変化させながら剛性を推定し解析を行った結果であることから、評価関数値についても計算回数が増えるにつれて徐々に小さな値となることがわかる。また、最終的には、真のき裂が同定できた時点において、評価関数の値は収束することから、この値が収束したときにき裂が同定できたことを意味することとなる。

以上のことから、固有振動数の変化に着目することによって、本研究で提案した固有振動数の変化に応じて適当に剛性を予測し、定義した評価関数を用いたき裂の推定法により、き裂の同定ができることがわかる。

5. 結 論

本研究では、構造物にき裂等の損傷が発生した場

合に構造物の固有振動数が変化することに着目し、固有振動数の変化からき裂の同定可能性について検討を行った結果、以下のような結論を得た。

(1) き裂の発生に伴う固有振動数の変化は、その構造物の剛性の変化に起因することから、き裂発生時の固有振動数の変化に相当する構造物の剛性の推定を行うことによりき裂の同定を行う方法を示した。さらに、推定した剛性の妥当性について判断するための評価関数を定義した。

(2) 定義した評価関数を用いて評価する際、個々の振動モードで評価するよりも複数の振動モードを用いて評価する方がき裂の位置や大きさの変化に対して妥当な結果が得られ、真のき裂を同定することが可能であることを示した。

(3) 位置や大きさについて適当に仮定したき裂を初期値として、提案したき裂の推定法を適用することによって、き裂の位置及び大きさに関して同定できることから、本手法によりき裂が同定可能であることを示した。

今後、提案した推定法について実験により検証を行うと共に、実験の際に生じる測定誤差に対する同定精度の向上に関し、さらに研究を行う必要がある。

文献

- (1) B.Stahl, L.M.Keer, Vibration and Stability of Cracked Rectangular Plates, *Int. J. Solids Structures*, 8(1972), 69.
- (2) 山口, スリットの入った片持長方形板の自由振動, 機論, 52-480, C(1986), 2068-2074.
- (3) 沖津・下田・平, スリットを有する長方形板の振動解析, 機論, 52-482, C(1986), 2617-2622.
- (4) 山田・小林・横田, 境界要素法によるスリットを有する平板の過渡応答解析, 機論, 57-533, C(1991), 15-21.
- (5) R.D.Adams, P.Cawley, C.J.Pye, B.J.Stone, A Vibration Technique for Non-Destructively Assessing the Integrity of Structures, *J. Mechanical Engineering Science*, Vol.20, No.2(1978), 93-100.
- (6) R.Y.Liang, F.K.Choy, J.Hu, Detection of Cracks in Beam Structures Using Measurements of Natural Frequencies, *J. Franklin Institute*, 4(1991), 505.
- (7) 堀辺・岡村, ニューラルネットワークによるき裂を有するはりの逆問題解析, 機論, 64-617, C(1998), 1-6.
- (8) P.Cawley, R.D.Adams, The Location of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies, *Journal of Strain Analysis*, Vol.14, No.2(1979), 49-57.