動力伝達用歯車の設計理論*
(第4報, 等価ラックとかみあい率)本 多 捷*¹Theory on Designing Gears for Power Transmission
(4th Report, An Equivalent Rack and Contact Ratio)Sho HONDA*²*² Mechanism CAE Lab., Toyota Central R & D Labs. Inc.,
Nagakute, Aichi-gun, Aichi, 480-1192 Japan

When the design point P_0 is given in the coordinate system C_s which consists of the line of centers and the axis of relative angular velocity, the plane S_r including the two peripheral velocities at P_0 , the design reference line g_r which is the intersection line between the plane S_n perpendicular to the relative velocity V_{rs0} at P_0 and the plane S_t and the design vertical C_n which is perpendicular to both g_r and V_{rs0} at P_0 are introduced. When a pair of paths of contact intersecting at the design point P_0 are given on the plane S_n , it is clarified that there is an equivalent rack which has the same pair of paths of contact and moves along g_r on the plane S_n and its dimensions (pitch, pressure angle, working depth, tooth thickness and so on) are calculated. Through designing the equivalent rack, the dimensions of gears, namely, the adequate inclination angles of the pair of paths of contact, the outside diameters and the face widths of the gear blanks, are designed to have tooth pairs with no topping and the required contact ratios which are calculated along the paths of contact in the region of mesh of the gear pair.

Key Words: Gear, Tooth Profile, Gear Geometry, Gear Design, Path of Contact, Rack, Contact Ratio

1. 緒 言

第1報では動力伝達用歯車の新設計法の概要を示し, 2軸の位置関係と角速度とによって決定する静止空間に, 任意の歯車対の接触点の軌跡とその法線の一般式が与えられたとき, 接触点近傍における接触領域と歯面形状, 作用限界点と歯面の曲率半径, 接触点の速度等が求められた⁽¹⁾. 第2報では動力伝達用歯車の5個の設計条件を示し, その第1条件である“2軸の配置と定回転比”および第2条件である“軸受荷重変動零”とを満たす接触点の軌跡とその法線の式の未知変数(設計基準点と接触点の軌跡の傾き角)の決定法を示した⁽²⁾. 第3報では第3条件である“設計基準点付近で滑らかな歯面を持つ接触点の軌跡”の傾き角の選択法を示した⁽³⁾. 本報では上記条件を満たす接触点の軌跡が設計基準点で交わる2本の有向直線として与えられたとき, 2本の接触点の軌跡がつくる平面上を移動するラックが存在することを明らかにし, そのラックを利用して, 第4条件である“設計基準点付近で所

要のかみあい率を持つ実質的な歯が存在する”ための接触点の軌跡の傾き角, そのときの歯車対の歯先面と歯幅, かみあい率の計算法を示す。

2. 対象歯車対の接触点の軌跡と本報の課題

対象とする接触点の軌跡は次のように与えられるものとする^{(1)~(3)}.

(1) 2軸 I, II とその軸角 Σ , オフセット $E \geq 0$ と角速度比 $i_0 \geq 1$ (一定) とが与えられ, 2軸と共通垂線とによって座標系 C_1, C_2 , 相対回転軸 S と共通垂線とによって座標系 C_s が定義され, 座標系相互間の座標値および有向直線の傾き角の変換が可能になっている。

(2) 軸受荷重変動を零とする接触点の軌跡 g_0 が, 設計基準点 $P_0(u_{c0}, v_{c0}, z_{c0}; C_s)$ およびその傾き角 $g_0(\phi_0, \phi_{n0}; C_s)$ によって座標系 C_s 上に与えられ, g_0 を含む作用面 G_{10}, G_{20} を用いて座標系 C_{q1}, C_{q2} が定義されている。

(3) 設計基準点 P_0 を通る2軸 I, II の軸直角平面と各歯車軸との交点を O_1, O_2 とするとき, 座標系 C_1, C_{q1}, C_2, C_{q2} を原点が O_1, O_2 となるまで各歯車軸方向に平行移動し, 座標系 O_1, O_{q1}, O_2, O_{q2} を定義すれば, 座標系 O_{q2}, O_2 によって g_0 上の任意点 $P(q_2,$

* 原稿受付 2003年10月30日。

*¹ 正員, (株)豊田中央研究所機構 CAE 研究室 (〒480-1192 愛知県愛知郡長久手町)。

E-mail: Shohonda@mosk.tytlabs.co.jp

$-R_{b2}, z_2; O_{q2}$, $P(u_2, v_2, z_2; O_2)$, 点 P_0 および g_0 の傾き角は次のように表されている。ただし θ_2 は歯車 II の回転角である。

$$\left. \begin{aligned} q_2(\theta_2) &= R_{b20} \theta_2 \cos^2 \phi_{b20} + q_{2p0} \\ R_{b2}(\theta_2) &= R_{b20} \\ z_2(\theta_2) &= R_{b20} \theta_2 \cos \phi_{b20} \sin \phi_{b20} \\ \chi_2(\theta_2) &= \chi_{20} = \pi/2 - \phi_{20} \\ u_2(\theta_2) &= q_2(\theta_2) \cos \chi_{20} + R_{b20} \sin \chi_{20} \\ v_2(\theta_2) &= q_2(\theta_2) \sin \chi_{20} - R_{b20} \cos \chi_{20} \\ P_0(q_{2p0}, -R_{b20}, 0; O_{q2}) \\ P_0(u_{2p0}, v_{2p0}, 0; O_2) \\ g_0(\phi_{20}, \phi_{b20}; O_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

(4) 点 P, P_0 および g_0 の傾き角を座標系 O_1, O_{q1} に変換して、次のように表されている。

$$\left. \begin{aligned} P\{q_1(\theta_1), -R_{b10}, z_1(\theta_1); O_{q1}\} \\ P\{u_1(\theta_1), v_1(\theta_1), z_1(\theta_1); O_1\} \\ P_0(q_{1p0}, -R_{b10}, 0; O_{q1}) \\ P_0(u_{1p0}, v_{1p0}, 0; O_1) \\ g_0(\phi_{10}, \phi_{b10}; O_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし $\theta_1 = i_0 \theta_2$: 歯車 I の回転角。

(5) 正転側と逆転側の接触点の軌跡は点 P_0 で交わる 2 本の有向直線として与えられ、座標系 C_s によって正転側を $g_{0D}(\phi_0, \phi_{n0D}; C_s)$, 逆転側を $g_{0C}(\phi_0, \phi_{n0C}; C_s)$ で表し、点 P_0 付近で滑らかな歯面を持つものとする。

上記のように与えられた接触点の軌跡が所要のかみあい率を持つ実質的な歯(歯先の尖らない台形形状の歯)を実現するためには、 g_{0D} と g_{0C} とを持つ歯の形状

(ϕ_{n0D}, ϕ_{n0C} , 歯丈, 歯厚)および歯車対の歯先面そして歯幅をどう設計すべきかが本報の課題である。

3. 設計基準線 g_t と設計基準垂線 C_n

3・1 平面 S_n が共通垂線を含まない場合(傘歯車, ハイポイドギヤ) 図1はハイポイドギヤの平面 S_H, S_p, S_n および点 P_0 における周速度 V_{10}, V_{20} のつくる平面 S_t , 平面 S_t と S_n の双方に垂直な平面 W_N の関係を概念的に示したものである。ここで平面 S_H は座標系 C_s の $v_c=0$ 平面, 平面 S_p は $u_c=u_{c0}$ 平面, 平面 S_n は P_0 における相対速度 $V_{rs0}=V_{10}-V_{20}$ に垂直な平面である⁽²⁾。

設計基準点 P_0 は平面 S_H 上に選ばれるから, V_{rs0} は平面 S_p 上にある。一方平面 S_t も V_{rs0} を含むから, 平面 S_t と平面 S_p とは相対速度 V_{rs0} を交線とし, この交線を設計基準接線 V_{rs0} と定義する。平面 S_t と平面 S_n とは直交していて, V_{10}, V_{20} の平面 S_n 上の速度成分 V_{gt0} を交線とし, この交線を設計基準線 g_t (V_{gt0} の方向に正)と定義する。平面 S_t は平面 S_p を V_{rs0} を軸として平面 S_n 上で g_t の傾き角 ϕ_{nt} だけ回転した平面で, 従来のピッチ平面に相当している。

平面 S_n と歯車軸 I, II との交点を O_{1n}, O_{2n} とするとき, 点 P_0 の周速度 V_{10}, V_{20} は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} V_{10} &= \omega_{10} \times O_{1n}P_0 \\ V_{20} &= \omega_{20} \times O_{2n}P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$O_{1n}P_0$ は平面 S_n 上にあるから V_{rs0} に垂直であり, 上式から V_{10} にも垂直であるから, 平面 S_t に点 P_0 で垂直になっている。全く同様に $O_{2n}P_0$ は, V_{rs0} と V_{20} に垂直であるから, 平面 S_t に点 P_0 で垂直になっている

Fig. 1 Relationship among planes S_H, S_p, S_n, S_t and W_N of bevel and hypoid gears

る。すなわち $O_{1n}P_0O_{2n}$ は一直線上にあり、これを設計基準垂線 C_n (O_{1n} から O_{2n} の方向に正) と定義する。 C_n と V_{rs0} と g_t とは点 P_0 で互いに直交し、 C_n と V_{rs0} とを含む平面が W_N (その法線が g_t) になっている。ハイポイドギヤの場合には、点 P_0 の3垂線 C_n と V_{rs0} と g_t とが座標系 C_s (相対速度の場を表す) の座標軸に対して傾いているために接触問題の扱いを極めて難しくしているといえる。その点ねじ歯車、ウォーム、円筒歯車の場合には C_n が座標系 C_s の v_c 軸に、傘歯車の場合には C_n が u_c 軸に平行になるため、問題を簡単にしている。設計基準線 g_t の傾き角 $g_t(\phi_0, \phi_{nt}; C_s)$ は次のように求めることができる。

図2は平面 S_n 上の設計基準垂線 C_n および設計基準線 g_t を描いたものである。点 O_{1n} , O_{2n} から平面 S_p (平面 S_n に垂直) へ下ろした垂線の足を O_{1np} , O_{2np} とすれば、 ϕ_{nt} は次のように求められる。ただし各方向線分は座標系 C_s の各軸正方向を正とする。

$$\left. \begin{aligned} \tan \phi_{nt} &= P_0O_{2np}/O_{2np}O_{2n} = O_{1np}P_0/O_{1n}O_{1np} \\ &= v_{cs2}/[\cos \phi_0 \{(z_{c0} + v_{cs2} \tan \phi_0) \tan \Gamma_s \\ &\quad - u_{c0}\}] \\ &= -v_{cs1}/[\cos \phi_0 \{(z_{c0} + v_{cs1} \tan \phi_0) \\ &\quad \times \tan (\Sigma - \Gamma_s) + u_{c0}\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

(1) ハイポイドギヤ

v_{cs2} , v_{cs1} , u_{c0} , z_{c0} は座標系 O_1 , O_2 を用いて次のよ

うに表すことができる⁽²⁾。

$$\begin{aligned} v_{cs2} &= E \tan \Gamma_s / \{\tan \Gamma_s + \tan (\Sigma - \Gamma_s)\} \\ u_{c0} &= E \sin (\Sigma - \Gamma_s) \sin \Gamma_s \tan \phi_0 / \sin \Sigma \\ z_{c0} &= (u_{2p0} + u_{c0} \cos \Gamma_s) / \sin \Gamma_s \\ u_{2p0} &= -v_{cs2} / \tan \varepsilon_{20} \quad (\varepsilon_{20} \neq 0) \\ v_{cs1} &= -E \tan (\Sigma - \Gamma_s) / \{\tan \Gamma_s + \tan (\Sigma - \Gamma_s)\} \\ z_{c0} &= \{u_{1p0} - u_{c0} \cos (\Sigma - \Gamma_s)\} / \sin (\Sigma - \Gamma_s) \\ u_{1p0} &= -v_{cs1} / \tan \varepsilon_{10} \quad (\varepsilon_{10} \neq 0) \end{aligned}$$

上式を用いて、式(4)から u_{c0} , z_{c0} , v_{cs1} , v_{cs2} を消去し、整理すれば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tan \phi_{nt} &= \cos \Gamma_s / \{-\cos \phi_0 / \tan \varepsilon_{20} \\ &\quad + \sin \Gamma_s \sin \phi_0\} \\ &= \cos (\Sigma - \Gamma_s) / \{\cos \phi_0 / \tan \varepsilon_{10} \\ &\quad - \sin (\Sigma - \Gamma_s) \sin \phi_0\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

g_t は平面 S_p に対して平面 S_n 上で ϕ_{nt} だけ傾いている。 ϕ_{nt} は z_c 軸の正方向に見て時計方向が正である。

(2) 傘歯車

式(5)の ε_{10} , $\varepsilon_{20} \rightarrow 0$ の極限として求められる。

$$\phi_{nt} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

平面 S_t は平面 S_p に重なっている。

(3) テーパーギヤ(円筒歯車)

式(5)の $\varepsilon_{20} \rightarrow -\pi/2$, $\Gamma_s \rightarrow 0$ (外歯) または π (内歯) の極限として求められる。したがって

$$\phi_{nt} = \pm \pi/2 \quad (+: \text{外歯歯車}, -: \text{内歯歯車}) \dots\dots\dots (7)$$

3.2 平面 S_n が共通垂線を含む場合(ウォーム、ねじ歯車、円筒歯車) 図3はねじ歯車やウォームの

Fig. 2 Design vertical C_n and design reference line g_t of bevel and hypoid gears

Fig. 3 Relationship among planes S_H , S_p , S_n , S_t and W_N of crossed helical, worm and cylindrical gears

Table 1 Dimensions of hypoid gears

Shaft angle	$\Sigma (^{\circ})$	90
Ratio of angular velocities	i_0	4.1
Offset (below center)	E (mm)	35
Reference radius of gear	R_{20} (mm)	95

Fig. 4 An example of variation of inclination angle ϕ_{nt} of hypoid gears

設計基準線 g_t を概念的に示している。ここで平面 S_s は共通垂線を含み、相対回転軸 S に垂直な平面である。点 P_0 は共通垂線上に選ばれるから、平面 S_t は共通垂線に垂直となっている。平面 S_n は共通垂線を含むから、 C_n は常に共通垂線に一致している。したがって g_t (V_{rs0} と C_n のつくる平面 W_n の法線) は平面 S_t と S_n との交線となり、その傾き角 ϕ_{nt} は次のようになる。

$$\phi_{nt} = \pm \pi/2 (+ : \Gamma_s - \phi_0 \leq \pi/2, - : \Gamma_s - \phi_0 > \pi/2) \quad \dots\dots\dots (8)$$

円筒歯車は点 P_0 が C_s に一致 ($v_{c0}=0$) したときの $\Sigma=0$ または π の場合で、平面 S_t は S_H に一致する。

図4は表1に示す諸元を持つハイポイドギヤの設計基準線 g_t の平面 S_n 上の傾き角 ϕ_{nt} を示したものである。 ϕ_{nt} の変化は通常の ϕ_0 の範囲ではそれほど大きくない。

4. 等価ラック

4・1 等価ラックの定義 図5は相対速度 V_{rs0} の正方向から見た平面 S_n 上の等価ラックを示したものである。点 P_0 における周速度 V_{10} , V_{20} , 相対速度 $V_{rs0} = V_{s10} - V_{s20}$, g_t 方向速度 V_{gt0} , 平面 S_n 上の接点の軌跡 g_{0D} , g_{0C} および g_{0D} , g_{0C} を持つ歯面 D , C

Fig. 5 Equivalent rack on plane S_n

の接平面 W_D , W_C (ここでは平面 S_n との交線 w_{sD} , w_{sC} とで表されている) とが示されている。

周速度 V_{10} , V_{20} は, g_t 方向速度 V_{gt0} と平面 S_n に垂直な成分 V_{s10} , V_{s20} とによって次のように表すことができる。

$$V_{10} = V_{gt0} + V_{s10}$$

$$V_{20} = V_{gt0} + V_{s20}$$

点 P_0 における接平面 W_D および W_C の法線速度 V_{g0D} , V_{g0C} は V_{gt0} の g_{0D} , g_{0C} 方向成分であるから次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} V_{g0D} &= V_{gt0} \cos(\phi_{n0D} - \phi_{nt}) \\ V_{g0C} &= V_{gt0} \cos(\phi_{nt} - \phi_{n0C}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

一方, V_{gt0} , V_{g0D} , V_{g0C} は次のように表すことができる⁽²⁾。

$$\left. \begin{aligned} V_{gt0} &= R_{b2gt} \dot{\theta}_2 \cos \phi_{b2gt} \\ V_{g0D} &= R_{b20D} \dot{\theta}_2 \cos \phi_{b20D} \\ V_{g0C} &= R_{b20C} \dot{\theta}_2 \cos \phi_{b20C} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで

R_{b2gt} , R_{b20D} , R_{b20C} : g_t , g_{0D} , g_{0C} の歯車 II の基礎円半径

ϕ_{b2gt} , ϕ_{b20D} , ϕ_{b20C} : g_t , g_{0D} , g_{0C} の歯車 II の作用面上の傾き角

g_t や g_{0D} および g_{0C} は静止空間に固定された直線であるから、点 P_0 を含む直線上の任意点で式(10)から法線速度 V_{gt0} , V_{g0D} , V_{g0C} は常に一定となっている。したがって g_{0D} および g_{0C} 上の任意点の法線速度 V_{g0D} , V_{g0C} は常に式(9)で表されている。

これは歯車の回転による g_{0D} , g_{0C} 上の接触点は, g_t を基準線としかつ同一接触点の軌跡 g_{0D} , g_{0C} を持ち (w_{SD} , w_{SC} を歯形とし), g_t 方向に V_{gt0} で移動するラックの接触点によって表されていることを意味している。このラックを等価ラックと定義すれば, 等価ラックはインボリュート平歯車のラックが一般化されたものである。軸受荷重変動が零の条件を満たすように接触点の軌跡の与えられたすべての歯車(円筒歯車からハイポイドギヤまで)の接触点の軌跡の近傍の接触の問題は, この等価ラックの接触の問題として扱うことができる。

4.2 等価ラックの諸元 等価ラックの諸元は次のようになる。

(1) 圧力角 (w_{SD} , w_{SC} の C_n に対する傾き角)

w_{SD} , w_{SC} は C_n に対してそれぞれ $\phi_{n0D} - \phi_{nt}$, $\phi_{nt} - \phi_{n0C}$ だけ傾いている。 $\phi_{n0D} = \phi_{n0C} = \phi_{nt}$ ($g_{0D} = g_{0C} = g_t$) が等価ラックの圧力角零を表している。ハイポイドギヤの場合には g_t は限界軌跡 g_{2s} ではないから⁽³⁾, 等価ラックの圧力角零は点 P_0 が作用限界点となることを意味しない。

等価ラックの傾き角 ϕ_{n0D} , ϕ_{n0C} は本研究では次の条件を満たすように選択する。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{n0D} - \phi_{n0C} &\approx 40^\circ \\ \phi_{n0D} - \phi_{nt} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

式(11)は等価ラックが, 設計基準垂線 C_n に対して適度に傾く台形状であるための条件である。

(2) ピッチ p_{gt} と法線ピッチ p_{g0D} , p_{g0C}

設計基準線 g_t が等価ラックの基準線を示し, そのピッチ p_{gt} と法線ピッチ p_{g0D} , p_{g0C} とは次のように表すことができる。ただし N_2 は歯車IIの歯数である。

$$\left. \begin{aligned} p_{gt} &= 2\pi R_{b2gt} \cos \phi_{b2gt} / N_2 \quad (g_t \text{ 方向}) \\ p_{g0D} &= p_{gt} \cos (\phi_{n0D} - \phi_{nt}) \\ &= 2\pi R_{b20D} \cos \phi_{b20D} / N_2 \quad (g_{0D} \text{ 方向}) \\ p_{g0C} &= p_{gt} \cos (\phi_{nt} - \phi_{n0C}) \\ &= 2\pi R_{b20C} \cos \phi_{b20C} / N_2 \quad (g_{0C} \text{ 方向}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(3) 作用歯丈 h_k

図5において w_{SD} から1ピッチ ($1p_{g0D}$) 離れた位置を w_{SDA} とし, w_{SC} と w_{SD} , w_{SDA} との交点をそれぞれ R_{CD} , R_{CDA} とすれば, 等価ラックの歯先幅が零の最大歯丈 $h_{cr}(R_{CD}R_{CDH})$ は $R_{CD}R_{CDH}$ が g_t に直交していることに注意すれば, 次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} h_{cr} &= R_{CD}R_{CDH} \\ &= p_{g0D} \cos (\phi_{nt} - \phi_{n0C}) / \sin (\phi_{n0D} - \phi_{n0C}) \end{aligned}$$

したがって等価ラックの作用歯丈 h_k (C_n 方向) は次の

ようになる。

$$h_k = h_{cr} - 2t_{cn} / \{ \tan (\phi_{n0D} - \phi_{nt}) + \tan (\phi_{nt} - \phi_{n0C}) \} - 2C_L \dots\dots\dots (13)$$

ここで

t_{cn} : 等価ラック上の工具歯先幅

C_L : クリアランス

適当な工具歯先幅 t_{cn} , クリアランス C_L を与えれば, 適当な歯先幅を持った等価ラックの作用歯丈 h_k を式(13)によって定めることができる。本設計法ではこの等価ラックの歯先幅によって間接的に歯車対の歯先幅を保証することになる。

(4) 設計基準点 $P_0(w_{SD})$ に対する w_{SC} の位相角

図5において C_n 上の点 P_0 周辺に $h_k = Q_{1n}Q_{2n}$ となるように Q_{1n} , Q_{2n} をとり, アデンダム A_{d2} , A_{d1} を次のように定義する。

$P_0Q_{2n} = A_{d2}$ (歯車IIのアデンダム)

$P_0Q_{1n} = A_{d1} = h_k - A_{d2}$ (歯車Iのアデンダム)

ただし点 Q_{2n} が点 P_0 に対して O_{1n} 側にあるとき $A_{d2} \geq 0$ とする。このときアデンダム A_{d2} の選択によって決まる作用歯丈が作用限界点によって制限される場合は, アデンダム A_{d2} または接触点の軌跡 g_{0D} , g_{0C} の傾き角 ϕ_{n0D} , ϕ_{n0C} を修整する必要がある。

g_{0C} と w_{SC} との交点を P_c とすれば, P_0P_c は次のように求められる。

$$\begin{aligned} P_0P_c &= -\{A_{d2} + (h_{cr} - h_k)/2\} \\ &\quad \times \sin (\phi_{n0D} - \phi_{n0C}) / \cos (\phi_{n0D} - \phi_{nt}) \end{aligned}$$

ただし P_0P_c は g_{0C} の方向に正である。

点 P_0 の回転角 $\theta_2 = 0$ であるから, 点 P_c の位相角 θ_{2wsc} は次のようになる。

$$\theta_{2wsc} = (P_0P_c / p_{g0C}) (2\theta_{2p}) \dots\dots\dots (14)$$

ここで

$2\theta_{2p}$: 歯車IIの角ピッチ

w_{SC} は w_{SD} に対して θ_{2wsc} だけ遅れた位置にある。これによって点 $P_0(w_{SD})$ に対する w_{SC} の位置が決定したことになる。 w_{SD} に対する w_{SC} の位相角は従来の歯車設計における“歯厚”の概念(g_t 上のラックの歯厚)を一般化したもので, 本研究では作用歯丈とアデンダムとを与えることによって決定する。

5. 歯車対の諸元かみあい率 m_{p0}

5.1 歯車対の歯先面 歯車対の歯先面は, 図5の点 Q_{1n} , Q_{2n} を通る任意の各軸周りの回転面が考えられるが, 本研究では次のように定める。

(1) 平面 S_n が共通垂線を含まない場合(傘歯車, ハイポイドギヤ)

点 $Q_{2n}(u_{cQ2n}, v_{cQ2n}, z_{cQ2n}; C_s)$ および点 $Q_{1n}(u_{cQ1n},$

$v_{cq1n}, z_{cq1n}; C_s)$ は図 2 から次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} u_{cQ2n} &= u_{c0} - A_{d2} \cos \phi_{nt} \\ v_{cQ2n} &= -A_{d2} \sin \phi_{nt} \cos \psi_0 \\ z_{cQ2n} &= z_{c0} - A_{d2} \sin \phi_{nt} \sin \psi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{cQ1n} &= u_{c0} + (h_k - A_{d2}) \cos \phi_{nt} \\ v_{cQ1n} &= (h_k - A_{d2}) \sin \phi_{nt} \cos \psi_0 \\ z_{cQ1n} &= z_{c0} + (h_k - A_{d2}) \sin \phi_{nt} \sin \psi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

これらを座標系 O_2, O_1 に変換することによって, 点 Q_{2n}, Q_{1n} の半径 $R_{2Q_{2n}}, R_{1Q_{1n}}$ はそれぞれ次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} & Q_{2n}(u_{2Q2n}, v_{2Q2n}, z_{2Q2n}; O_2) \\ & Q_{1n}(u_{1Q1n}, v_{1Q1n}, z_{1Q1n}; O_1) \\ & R_{2Q2n} = \sqrt{u_{2Q2n}^2 + v_{2Q2n}^2} \\ & R_{1Q1n} = \sqrt{u_{1Q1n}^2 + v_{1Q1n}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

本研究では、歯車 I, II の歯先面をそれぞれ点 Q_{1n} , Q_{2n} を通る円すい面とし、その円すい頂角 γ_f , Γ_f は接触点の軌跡 g_{0D} , g_{0C} が有効に実現できるように、 $\Gamma_f = \Gamma_s$, $\gamma_f = \Sigma - \Gamma_s$ に近い適当な値に選択するものとする(補遺参照)。ただし $\Sigma = \pi/2$ で i_0 が大きい場合 ($i_0 \geq 3$ 程度) には、 $\Gamma_f = \pi/2$, $\gamma_f = 0$ で十分である。

(2) 平面 S_n が共通垂線を含む場合(ねじ歯車, ウォーム, 円筒歯車)

図3から点 Q_{2n} , Q_{1n} は共通垂線上にあるから, 歯先面は円筒面とし, その半径 $R_{2Q_{2n}}$, $R_{1Q_{1n}}$ は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} R_{2Q2n} &= |v_{2p0}| + A_{d2} \\ R_{1Q1n} &= |v_{1p0}| + (h_k - A_{d2}) \quad (\text{外齿}) \\ &= |v_{1p0}| + A_{d2} \quad (\text{内齿}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

5・2 歯車対の諸元かみあい率 m_{p0} 本研究における諸元かみあい率とは接触点の軌跡 g_0 が歯車 I と II の歯先円すいによって切取られる区間(かみあい長さ)の受持つ回転角の角ピッチに対する比をいう。したがって従来の歯面全体がかみあうと考える総かみあい率とは異なる概念である。

図6は接触点の軌跡 g_0 と点 Q_{2n} を通る歯車IIの歯先円すいととの交点 P_{2f} を描いたものである。

点 $P_{2f}(q_{2f}, -R_{b20}, z_{2f}; O_{q2})$ およびその回転角 θ_{2f} は式(1)を用いて次のように求められる。

(1) $\Gamma_f = \pi/2$ のとき

$$z_{2f} = z_{2Q2n} = R_{b20} \theta_{2f} \cos \phi_{b20} \sin \phi_{b20}$$

(2) $0 \leq \Gamma_f < \pi/2$ のとき

$$R_{2f} = R_{2Q2n} + (z_{2Q2n} - z_{2f}) \tan \Gamma_f$$

$$= \sqrt{q_{2f}^2 + R_{b20}^2}$$

ここで

$$q_{2f} = R_{b20} \theta_{2f} \cos^2 \psi_{b20} + q_{2p0}$$

$$z_{2f} = R_{b20} \theta_{2f} \cos \psi_{b20} \sin \psi_{b20}$$

Fig. 6 Intersection points P_{1f} and P_{2f} between g_0 and face cones of gears I and II

歯車Ⅰについても全く同様にして、 g_0 と歯先円すいとの交点 $P_{1f}(q_{1f}, -R_{b10}, z_{1f}; O_{q1})$ およびその回転角 θ_{1f} は、円すい頂点が z_1 軸方向にあることに注意して、次のように求められる。

(3) $\gamma_f = \pi/2$ のとき

$$z_{1f} = z_{1q1n} = R_{b10} \theta_{1f} \cos \phi_{b10} \sin \phi_{b10}$$

(4) $0 \leq \gamma_f < \pi/2$ のとき

$$R_{1f} = R_{1q1n} - (z_{1q1n} - z_{1f}) \tan \gamma_f = \sqrt{q_{1f}^2 + R_{b10}^2}$$

ここで

$$q_{1f} = R_{b10} \theta_{1f} \cos^2 \psi_{b10} + q_{1p0}$$

$$z_{1f} = R_{b10} \theta_{1f} \cos \phi_{b10} \sin \phi_{b10}$$

この結果接触点の軌跡 $\mathbf{g}_0$ 上に, P_{2f} および P_{1f} が決定するから, 諸元かみあい率 m_{p0} は次のように求められる.

$$m_{p0} = |\theta_{2f} - \theta_{1f}/i_0| / (2\theta_{2p}) \dots\dots\dots (19)$$

ここで

 $2\theta_{2p}$: 歯車IIの角ピッチ

m_{p0} が所要の値となるように, $\mathbf{g}_0(\psi_0, \phi_{n0}: C_s)$ を選ぶ必要がある.

5・3 歯車Ⅰ，Ⅱの歯幅および歯底面

(1) 軸方向齒幅

歯車Ⅰ，Ⅱの歯幅は接触点の軌跡 g_0 の有効部分 P_{1f} ， P_{2f} を静止空間に実現できればかみあい上は十分である。したがって歯車Ⅰ，Ⅱのかみあい上の必要歯幅は次のように求められる。

歯車 I の歯幅： $|z_{12f} - z_{1f}|$

歯車IIの歯幅： $|z_{2f} - z_{21f}|$

ここで

$$P_{1f}(q_{21f}, -R_{b20}, z_{21f}; O_{q2})$$

$$P_{2f}(q_{12f}, -R_{b10}, z_{12f}; O_{q1})$$

実際の歯幅は、接触点の軌跡 $\mathbf{q}_{0D}$, $\mathbf{q}_{0C}$ の双方に共通

でなければならないし、さらに強度やばね定数の要請もあるから、 $P_{1f}P_{2f}$ からだけでは決まらない。

(2) 歯底面

図5の C_n 上で作用歯丈 h_k の外側に点 Q_{1n} からクリアランス c_L だけ離れた点 Q_{2nR} (図示せず)をとり、点 Q_{2nR} を通り頂角 Γ_f の円すいを本研究では歯車IIの歯底面とする。全く同様に Q_{2n} の外側に Q_{1nR} をとり、 Q_{1nR} を通り頂角 γ_f の円すいを歯車Iの歯底面とする。

6. 結 論

設計基準点 P_0 の周辺に所要のかみあい率を持つ実質的な歯が存在するための、接触点の軌跡の選択法を等価ラックの概念を導入して明らかにした。その結果を要約すれば次のとおりである。

(1) 設計基準点 P_0 で互いに直交する設計基準線 g_t (周速度の作る平面 S_t と平面 S_n との交線)、設計基準垂線 C_n (平面 S_n 上で g_t に垂直)と設計基準接線 V_{rs0} (相対速度が重なる)とが定義された。

(2) 設計基準点 P_0 で交わる2本の接触点の軌跡 g_{0D} と g_{0C} とが与えられたとき、平面 S_n 上を g_t に沿って移動する同一接触点の軌跡 g_{0D} 、 g_{0C} を持つ等価ラックが存在することが示され、その等価ラックの諸元(ピッチ、圧力角、作用歯丈、歯厚)が求められた。

(3) 歯車対の歯先面を等価ラックの歯先に対応する円すい面として与え、歯先円すいによって切取られる接触点の軌跡の有効部分(かみあい長さ)から歯車対のかみあい率が求められている。

(4) 上記かみあい長さからかみあいに必要な軸方向歯幅が、等価ラックの歯底に対応して歯底円すいが求められている。

補 遺

ハイポイドギヤのピッチ円すいと歯先円すい形状

本研究のように設計基準点 P_0 を与えれば、点 P_0 で外接するピッチ円すいは設計基準垂線 C_n を背円すい母線とする円すいとして次のように求められる。

歯車IIの背円すい距離 $O_{2n}P_0$ は、図2から

$$O_{2n}P_0 = v_{cs2} / (\cos \phi_0 \sin \phi_{nt}) \quad (v_{cs2} \neq 0)$$

したがってピッチ円すいの頂角 Γ_p は式(3)を用いて次のように求められる。

$$\sin(\pi/2 - \Gamma_p) = R_{20} / O_{2n}P_0$$

$$\cos \Gamma_p = \cos \phi_0 \sin \phi_{nt} / \sin(-\varepsilon_{20})$$

ここで

$$\sin(-\varepsilon_{20}) = v_{cs2} / R_{20}$$

$$R_{20} = \sqrt{u_{2p0}^2 + v_{2p0}^2}$$

全く同様にして歯車Iのピッチ円すい頂角 γ_p は

$$\cos \gamma_p = \cos \phi_0 \sin \phi_{nt} / \sin \varepsilon_{10}$$

ただし傘歯車の場合は ε_{10} 、 $\varepsilon_{20} \rightarrow 0$ の極限值として式(5)を用いて $\Gamma_p = \Gamma_s$ 、 $\gamma_p = \Sigma - \Gamma_s$ が求められる。

従来の設計法ではこのピッチ円すいに沿って歯を付けるから、歯先円すい頂角は $\Gamma_f \equiv \Gamma_p$ 、 $\gamma_f \equiv \gamma_p$ となるように選ばれていた。この方法の基礎には、歯面の作用限界線もまたピッチ円すいに沿って存在するという考えがあると思われるが、共役歯面の作用限界線は接触点の軌跡 g_{0D} 、 g_{0C} を法線として与えた一方の歯面の接触領域の形状に依存し、 Γ_p 、 γ_p とは直接には関係しない。歯面は接触点の軌跡の有効部分が含まれればよいから、 Γ_p 、 γ_p にこだわる必要はあまりないし、同様に等高歯かこう配歯かの議論も歯面の接触の問題の観点からはあまり意味はない。

文 献

- (1) 本多捷, 機論, 70-689, C (2004), 258-265.
- (2) 本多捷, 機論, 70-690, C (2004), 567-574.
- (3) 本多捷, 機論, 70-692, C (2004), 1190-1198.