回転弾性球の衝突時挙動に対する平面運動解析*

曄 道 佳 明^{*1}, 平 田 彰^{*2}, 片 岡 真 澄^{*3}
高 橋 芳 弘^{*3}, 植 草 昌 彦^{*3}, 曾 我 部 潔^{*1}

Planar Motion Analysis for a Rotating Elastic Ball in Collision

Yoshiaki TERUMICHI^{*4}, Akira HIRATA, Masumi KATAOKA,
Yoshihiro TAKAHASHI, Masahiko UEKUSA and Kiyoshi SOGABE

^{**} Department of Mechanical Engineering, Sophia University,
7-1 Kioi-cho, Chiyoda-ku, Tokyo, 102-8554 Japan

It is generally well known that the motion of rotating elastic body in collision is complex but interesting. This is due to the deformation of the local contact part, the friction force acting on the contact surface and so on. It is difficult, however, to observe the state of affairs in collision because of instantaneous phenomenon. In this paper, two types of model for the motion of the rotating elastic ball in planar collision are proposed. One is a simple model which consists of two particles with spring and damper. Another one consists of distributed particles in circumference, spring and dampers. An experiment is also carried out to compare with numerical results and verify their validity, using a high speed camera. The simple model represents some characteristics of the motion. Numerical results using another model agreed with experimental ones both qualitatively and quantitatively.

Key Words: Mulyibody Dynamics, Unilateral Contact, Collision, Elasticity

1. 結 論

2 物体の接触, 衝突系の運動解析を行う際, 精度良い解析を実現するためには接触中の運動を的確に表現するモデリングが必要となる。マルチボディダイナミクスにおいて Unilateral Contacts と呼ばれるこの種の問題には多くの関心が寄せられ, モデリング, 定式化手法が検討されている。しかしながらその多くは剛体の接触問題^{(1)~(3)}を扱ったものである。

一方, 特に物体が弾性に富みかつ回転を有する場合には, その衝突, 接触時挙動は複雑で, モデリングそのものに物理的洞察を要することが多い。これは弾性体の微小な局所の変形が挙動全体に大きな影響を与えるからである。

この種の問題に対しては, エネルギーの保存を前提とした定式化⁽⁴⁾や, 殻要素を利用した離散的モデルの提案などが行なわれ, また, フォークト要素を用いた弾性体の接触時挙動に対応するモデルの提案⁽⁵⁾⁽⁶⁾も行なわれているものの議論が十分なされたとはいえない。

そこで本報では, 回転弾性球の平面内衝突時挙動を

例としてその衝突, 跳ね返り挙動を精度良く表すことができるモデリングについて検討する。

まず高速度カメラにより回転弾性球の衝突時挙動を撮像し, 接触中の物体がどのような動的特徴を有しているかを見極める。この結果を基に, 2 質量とフォークト要素の結合で表した簡易モデル, 多質量とフォークト要素で表現した多質点モデルを考え定式化を行う。そして, 衝突時の挙動を支配する諸因子について数値解析結果と実験結果を比較することによりモデルの妥当性を検討する。

上記検討は, タイヤやゴムローラなどに代表される弾性に富む機械要素の接触・衝突問題において, 高効率, 高精度を満たすモデリング, 定式化の指針を与えることが期待される。特に, これらの機械要素自身の運動を考慮する必要がある場合, 例えば自動車の急制動, 急旋回時などの過渡的な運動のシミュレーション手法などに多くの知見を与えるものと考えらる。

2. 実 験

実験には, 良く知られているスーパーボール (Wham-O Corp. 登録商標, 弾性球と呼ぶ) を用いた。

本実験の主な目的は, 弾性球に種々の並進および回転を伴う面内運動を与えた場合の衝突時挙動, すな

* 原稿受付 2003 年 11 月 20 日。

^{*1} 正員, 上智大学理工学部 (〒102-8554 東京都千代田区紀尾井町 7-1)。

^{*2} 学生員, 上智大学大学院理工学研究科 [現: (株) 日本エアシステム]。

^{*3} 正員, 千葉工業大学工学部 (〒275-0016 習志野市津田沼 2-17-1)。

E-mail: y-terumi@sophia.ac.jp

わち球が床面に接触している短い時間内の重心位置と接触面中心とのずれである水平方向伸縮、重心位置の床面への接近量である垂直方向伸縮、球の外周の箇所により回転速度が異なることによる回転角度差である回転方向伸縮等の局所変形を高速度カメラを用いて撮影し、画像解析を施すことから解析することである。撮影は 2.22×10^4 (s/f) で衝突直前から衝突直後まで行った。その様子 (1 フレーム) を図 1 に示す。ここで球の表面には 16 分割した放射線状のラインが引いてあり、種々の水平方向速度、垂直方向速度、回転速度を与えて撮影を行い、1 回の衝突につき多数枚の静止画像を取り出した。

次に図 2 に示す 7 点 (A, C, D, E, F, L, R) の時刻 t と $t + \Delta t$ における運動の変位増分から重心の水平方向速度 $\dot{X}_G$ 、垂直方向速度 $\dot{Y}_G$ 、回転速度 $\dot{\phi}$ を、また、時刻 t の画像から水平方向伸縮 u 、垂直方向伸縮 $Y_G - r$ 、回転方向伸縮 θ 、接触幅 b を近似的に算出した。ただし、

$$\left. \begin{aligned} G(X_G, Y_G) &= ((X_R + X_L)/2, Y_R = Y_L) \\ B(X_B, Y_B) &= ((X_C + X_A)/2, 0) \\ \dot{X}_G &= (X_G^{t+\Delta t} - X_G^t) / \Delta t \\ \dot{Y}_G &= (Y_G^{t+\Delta t} - Y_G^t) / \Delta t \\ \dot{\phi} &= \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{Y_D^{t+\Delta t} - Y_G^{t+\Delta t}}{X_D^{t+\Delta t} - X_G^{t+\Delta t}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{Y_D^t - Y_G^t}{X_D^t - X_G^t} \right) \right\} / \Delta t \\ \theta &= \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{Y_E^{t+\Delta t} - Y_G^{t+\Delta t}}{X_E^{t+\Delta t} - X_G^{t+\Delta t}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{Y_E^t - Y_G^t}{X_E^t - X_G^t} \right) \right\} \\ &\quad - 22.5\pi / 180 \\ u &= X_G - X_B \\ b &= X_C - X_A \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

である。本実験では、上述の放射線状のラインを図 2 のようにマークし回転方向伸縮の読み取りに用いている。ここで、 r は球の半径、点 G は重心点、点 R, L は重心点と水平位置にある両端の点、点 A, C は床との接触部位の両端点、点 F, E はそれぞれ点 A, L に隣り合う左側分割線上の端の点である。また文字の右肩の添え字は時刻を示し、 $\Delta t = 2.22 \times 10^{-4}$ (s) である。実験に用いた試料 (球および床面) を表 1 に示す。

実験より接触中には上記各伸縮の発生している様子が確認された。また得られた動画像からは、接触中に弾性球と床面との間に顕著な滑りが生じる挙動、見かけ上滑りを伴わずに転がる挙動、さらに図 3 に示すようなよく知られた挙動、すなわち運動方向の逆転を伴う衝突と跳ね返りを多数回繰り返す挙動など多様な挙動が存在することが確認された。

Figure1 Photo of instantaneous ball motion in Collision

Figure2 Configuration in Collision

Table 1 Material property

	Ball	Ground
Material	Superball※	Mild steel
Mass (g)	48.89	—
Radius (mm)	23.3	—
Young's modulus (Mpa)	3	2.07×10^5
Poisson's ratio	0.46	0.28
Coefficient of friction	0.9	

※Wham-O Corporation の登録商標

Figure3 Photo of Bouncing Ball with Elasticity

3. モデリングと定式化

3.1 簡易モデル 実験で確認された回転弾性球の運動を表現できる簡易モデルとして、衝突中には接触部分近傍に質量の偏りが発生すると考え、球の質量 m を重心と接触面中心に配分した 2 質点と、水平、

垂直および回転方向に作用する3つのフォークト要素からなる2次元モデルを提案する。すなわち図4に示すように非衝突時の重心の位置 G 点の衝突時の座標を $G(X_G, Y_G)$ 、接触部位の中心座標を $B(X_B, Y_B)$ 、球全体の回転角を ϕ 、接触点近傍の局所回転角を ψ とする。回転角は時計回りを正とする。さらに摩擦力を考慮するためスライダを挿入した。なお接触の開始および終了は、 G 点の Y_G が球の半径 r と等しくなったことで判定する。ここで、球の形状変化分を Δr とするとき一般に $\Delta r/r$ は十分小さく、また接触点付近での変形が支配的であり球全体では半径を一定とした球を想定できることなどから、本報では運動への影響は無視し得るものとして扱う。

垂直方向の剛性 k_n は、ヘルツの接触理論を動的問題に近似的に拡張し、

$$k_n = \sqrt[3]{\frac{16rN}{9e^2}} \quad (2)$$

として時々刻々更新する。ここで N 、 e は

$$N = c_n \dot{Y}_G + k_n (Y_G - r) \quad (3)$$

$$e = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_w^2}{E_w} \quad (4)$$

であり、 N は垂直方向に作用する力、 ν はポアソン比、 E は縦弾性係数、また、添え字 n, s, ϕ は垂直、水平、回転の各方向、 i は球、 w は床面を示す。また剛性 k_n, k_s, k_ϕ 、減衰 c_n, c_s, c_ϕ は、縦弾性係数と横弾性係数の比（ラメ定数） τ を用いて、

$$k_s = k_\phi = k_n \cdot \tau \quad (4)$$

$$c_s = c_\phi = c_n \sqrt{\tau}$$

$$\tau = \frac{3}{2(1 + \nu_i)}$$

とした⁽⁷⁾。ただし、 $c_n = 25\sqrt{mk_n}$ ($\zeta = 0.2$) とした。ここで各剛性、各減衰は垂直方向力 N の関数であり接触中に時々刻々変化することになる。

3.2 簡易モデルによる定式化 接触中の球の運動は「転がり」と「すべり」という2つに大別できる。

(i) 転がり発生時の運動方程式：

$$(1-w)m\ddot{X}_G = -c_s(\dot{X}_G - \dot{X}_B) - k_s(X_G - X_B) \mp f \quad (5)$$

$$wm\ddot{X}_B = c_s(\dot{X}_G - \dot{X}_B) + k_s(X_G - X_B) \quad (6)$$

$$I\ddot{\phi} = \{-c_\phi r(\dot{\phi} - \dot{\psi}) - k_\phi r(\phi - \psi) \pm f\} \cdot r \quad (7)$$

$$\dot{X}_G = r\dot{\phi} \quad (8)$$

$$I\dot{\psi} = \{c_\phi r(\dot{\phi} - \dot{\psi}) + k_\phi r(\phi - \psi)\} \cdot r \quad (9)$$

ここで f は転動の拘束力であり、式(5)～(9)より決定できる。また f の符号は $\dot{X}_G > 0$ のとき式(5)では負、式(7)では正となり、 $\dot{X}_G < 0$ のときはこの逆となる。 w は質量の偏りの割合で、ここでは $w=0.05$ とした。なお、 I は非衝突時の慣性モーメントであるが、衝突時

Figure 4 Analytical model (simple model)

における質量の分布は不明であることから簡単のため式(7),(9)ではこれを用いた。

(ii) すべり発生時の運動方程式：

$$(1-w)m\ddot{X}_G = -c_s(\dot{X}_G - \dot{X}_B) - k_s(X_G - X_B) \quad (10)$$

$$wm\ddot{X}_B = c_s(\dot{X}_G - \dot{X}_B) + k_s(X_G - X_B) \pm \mu N \quad (11)$$

$$I\ddot{\phi} = \{-c_\phi r(\dot{\phi} - \dot{\psi}) - k_\phi r(\phi - \psi)\} \cdot r \quad (12)$$

$$I\dot{\psi} = \{c_\phi r(\dot{\phi} - \dot{\psi}) + k_\phi r(\phi - \psi) \mp \mu N\} \cdot r \quad (13)$$

ここで動摩擦力 μN の符号は $\dot{X}_B - r\dot{\psi} > 0$ のとき式(11)では正、式(13)では負となり $\dot{X}_B - r\dot{\phi} < 0$ では逆となる。

なお、すべりの状態から転がりの状態への移行は重心の水平方向速度 $\dot{X}_G$ と球全体の回転速度 $r\dot{\phi}$ が等しくなったときであり、逆に転がりの状態からすべりの状態への移行は静止摩擦力 $\mu_0 N$ より f が大きくなったときで、静止摩擦力が小さいほど転がり状態からすべり状態へ移行しやすくなる。

次に垂直方向の運動方程式は転がりやすべりの挙動とは関係なく

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{Y}_G &= -c_n\dot{Y}_G - k_n(Y_G - r) - mg \\ Y_G &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

で与えられるものとする。以上どの状態の運動方程式においても、接触中における水平方向伸縮は $X_G - X_B$ 、垂直方向伸縮は $Y_G - r$ 、回転方向伸縮は $\psi - \phi$ で表される。また、接触幅 b_{HERTZ} はヘルツの接触理論を用いることにし時間の関数とした。

$$b_{\text{HERTZ}} = 2\sqrt[3]{3N \cdot e \cdot r / 4} \quad (15)$$

なお「すべり」と「転がり」いずれの状態が発生するかは判定は、図5に示すフローチャートの判別によった。ただし後述の数値解析では、 $\dot{X}_G$ と $r\dot{\phi}$ とが完全に一致することはほとんどないと考えられるため、その差 ε が1%未満のとき、相対速度が零と判断するものとした。また簡単のため $\mu_0 = \mu$ とした。

3.3 多質点モデル 本モデルは質量を重心の位置 G 点と外周に多数個分布させ、それらをフォークト要素で結んだもので、前節で扱った各方向の伸縮といった局所変形に加えて、外周質点の位置を把握すること

Figure 5 Flow chart to judge the contact condition

Figure 6 Analytical model (Multiple masses model, $i=8$)

により球の変形状態を知ることができる。

図 6 に質点数 $i=8$ の場合のモデルを示す。ここで G 点に配置した質点を $G(X_G, Y_G)$ (以下では質点 G と呼ぶ)、外周に配置された質点を $A_a(X_a, Y_a)$ (以下では質点 A_a と呼ぶ)、質点 G と質点 A_0 間および外周質点間のフォークト要素の剛性および減衰係数を各々 k_G , k_s , c_G , c_s とし、添え字 a は質点番号で $a=0, 1, 2, \dots, i-1$ とする。ここで質点 A_0 は初期状態(接触前)には質点 G を基準として等角度で配置するものとすれば、その座標は、

$$(X_a, Y_a) = (X_G + r \cos(2\pi a/i), Y_G + r \sin(2\pi a/i)) \quad (16)$$

と表され、また A_a の衝突時初期速度は、衝突した瞬間の重心速度と回転速度の接線方向分速度を加えて、

$$(\dot{X}_a, \dot{Y}_a) = (\dot{X}_G - r\dot{\phi} \sin(2\pi a/i), \dot{Y}_G + r\dot{\phi} \cos(2\pi a/i)) \quad (17)$$

次に外周質点の質量配分割 w_a は本モデルの慣性モーメントを球の慣性モーメントに一致させることか

ら $w_a = 0.4$ と決めた。従って質点 G , A_a の質量は $M_G = 0.6m$, $M_a = 0.4m/i$ とした。なお便宜上、質点 G 回りの i 個の剛性 k_G 全てが並列に、また外周の i 個の剛性 k_s 全てが直列に繋がっているものと仮定し、これらの等価剛性にラメ定数 τ を導入して $k_s = i^2 \tau k_G$ とした。また減衰係数 c_G , c_s の ζ を減衰比として以下のように表される。

$$c_G = 2\zeta \sqrt{k_G m_G m_0 / (m_G + m_0)}$$

$$c_s = 2\zeta \sqrt{k_s m_0^2 / 2m_0}$$

3.4 多質点モデルによる定式化 まず質点 G の運動方程式は、質点 G , A_a 間のフォークト要素による力を P_a とすれば

$$M_G \ddot{X}_G = \sum_{a=0}^{i-1} P_a \cos \theta_a \quad (18)$$

$$M_G \ddot{Y}_G = -M_G g + \sum_{a=0}^{i-1} P_a \sin \theta_a \quad (19)$$

ここで質点 G と A_a 間の距離を r_a 、これら 2 質点を結ぶ方向の速度を各々 v_G , v_a とすると、 P_a , v_G , v_a は以下ようになる。

$$P_a = c_G (v_a - v_G) + k_G (r_a - r) \quad (20)$$

$$v_G = \dot{X}_G \cos \theta_a + \dot{Y}_G \sin \theta_a \quad (21)$$

$$v_a = \dot{X}_a \cos \theta_a + \dot{Y}_a \sin \theta_a \quad (22)$$

ただし、

$$\sin \theta_a = \frac{Y_a - Y_G}{r_a}, \quad \cos \theta_a = \frac{X_a - X_G}{r_a},$$

$$r_a = \sqrt{(X_a - X_G)^2 + (Y_a - Y_G)^2}$$

である。

次に外周質点 A_a が床面と非接触の場合、および接触する場合についての運動方程式は以下のように導出される。

(i) 床面と非接触の場合

図 7 に示すように質点 A_a と A_{a+1} を結ぶ方向と水平方向とのなす角を β_a 、質点 A_a の速度 V_a の水平方向となす角を φ_a とおくと、質点 A_a の質点 A_{a+1} 方向の速度 w_a は

$$\begin{aligned} w_a &= V_a \cos(\beta_a - \varphi_a) \\ &= \dot{X}_a \cos \beta_a + \dot{Y}_a \sin \beta_a \end{aligned} \quad (23)$$

同様に V_a の A_{a-1} 方向の速度 u_a は

$$\begin{aligned} u_a &= V_a \cos(\beta_{a-1} - \varphi_a) \\ &= \dot{X}_a \cos \beta_{a-1} + \dot{Y}_a \sin \beta_{a-1} \end{aligned} \quad (24)$$

質点 A_{a+1} , A_a 間のフォークト要素による力 Q_a は、この 2 質点間の距離を d_a とすると

$$Q_a = c_s (u_{a+1} - w_a) + k_s (d_a - d_0) \quad (25)$$

ただし、 d_0 は初期配置時における質点 A_{a+1} , A_a 間の距離で $d_0 = 2r \sin(\pi/i)$, $\sin \beta_a = (Y_{a+1} - Y_a)/d_a$,

$\cos \beta_a = (X_{a+1} - X_a)/d_a$, $d_a = \sqrt{(X_{a+1} - X_a)^2 + (Y_{a+1} - Y_a)^2}$ である。したがって、非接触である場合の質点 A_a に関する運動方程式は、

$$M_a \ddot{X}_a = Q_a \cos \beta_a - P_a \cos \theta_a - Q_{a-1} \cos \beta_{a-1} \quad (26)$$

$$M_a \ddot{Y}_a = Q_a \sin \beta_a - P_a \sin \theta_a - Q_{a-1} \sin \beta_{a-1} - mg \quad (27)$$

となる。このとき質点 A_a は床面と接していないため垂直抗力 N_a は $N_a = 0$ とする。

(ii) 床面と接触する場合

床面と接触している状態、すなわち $Y_a < 0$ の場合は $Y_a = 0$ とし、式(27)を考慮することから

$$N_a = -(Q_a \sin \beta_a - P_a \sin \theta_a - Q_{a-1} \sin \beta_{a-1} - mg) \quad (28)$$

次に水平方向には摩擦力が作用するから

$$M_a \ddot{X}_a = Q_a \cos \beta_a - P_a \cos \theta_a - Q_{a-1} \cos \beta_{a-1} - \text{sign}(\dot{X}) \mu N_a \quad (29)$$

このとき、接触幅 b_m は接触している外周質点 X_a のうちの最大値と最小値の差 $X_{\max} - X_{\min}$ とする。

なお、(i) または (ii) のどちらの運動方程式を採用するかは判別は、全ての外周質点 A_a について刻み時間 Δt ごとに行い、 $Y_a > 0$ かつ $N_a \leq 0$ であれば (i)、それ以外であれば (ii) とした。

4. 数値解析結果と実験結果との比較検討

4.1 衝突中の挙動の比較 本節では衝突中の挙動に対する検討を行う。数値解析では、弾性球が床面に衝突する直前の垂直方向速度、水平方向速度、回転方向速度の実験結果を初期条件とした。この条件を表 2(a)に、実験と計算結果による局所変形の比較を図 8, 9 に示す。ここで外周の質点数は $i = 96$, $k_G = 4.29$ (kN/m) とした。これらの値は、球に自重による静荷重を加えた場合のヘルツの接触理論より求まる重心の床への接近量および接触幅と本モデルで計算したそれらの値がほぼ等しくなるような i と k_G の組み合わせより決定した。このとき球の自重をヘルツの式より求めた接近量で割った値 ($K_{HERZ} = 6.60$ kN/m) を k_G の目安とした。運動方程式の解法にはルンゲクッタ法(4次)を用い、刻み時間は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-7}$ (s) とした。

図 8(a)は衝突中の接触幅を示したもので、横軸は衝突開始後の時間である。簡易モデルによる接触幅はヘルツの接触理論より近似的に求めたが、実験値に比べ衝突開始直後の値が大幅に異なっており、この付近での適用には難しい面が伺えるものの接触中全体としては定性的に一致していることがわかる。一方、多質点型モデルでは定性的、定量的に実験結果とほぼ一致していることがわかる。また接触している時間は実験結果に比べ簡易モデルでは短め、多質点モデルでは長めとなっているが、その差は両モデルともほぼ 10%以

内に収まっていることもわかる。

一方、図 8(b), (c)は水平方向伸縮、垂直方向伸縮を重心の位置から求めたものである。簡易モデル、多質点型モデルによる両伸縮値は実験値と定性的に一致しており、特に垂直方向伸縮は定量的にもよく一致することがわかる。本結果における多質点モデルの水平方向伸縮が連続的でない理由は、主に質点の配置数によって接触面積が不連続に扱われることによる。

図 8(d)は回転方向伸縮を示したものである。ここで多質点モデルでは各外周質点間の伸縮量が異なるため実験で測定した個所と同位置(外周質点 A_{60} と A_{66}) で比較を行った。多質点モデルでは定性的、定量的に実験結果の特徴を良く捉えているが、簡易モデルでは、定性的には似た傾向を示すものの、定量的には大きな差が生じている。これは衝突時には形状が球形ではなく弾性球には各所に法線方向伸縮が発生し回転に影響するが、これを簡易モデルでは考慮できないためと考えられる。

図 9 は各方向の伸縮速度を示したものである。回転弾性球の衝突時挙動における特徴の一つと考えられる速度の正から負または負から正への移行が簡易、多質点モデルとも表現できていることがわかる。特に垂直方向速度は実験値と定性的、定量的にも良好な一致を

Figure 7 Free body diagram of A_a , A_{a-1} and A_{a+1}

Table 2 Initial condition

Condition	(a)	(b)	(c)
Horizontal velocity (m/s)	1.7	1.0	1.0
Vertical velocity (m/s)	-2.3	-1.0	-1.0
Rotational velocity (rps)	-21.7	10.0	30.0

Figure 8 Comparison of numerical results with experimental ones during contact

Figure 9 Comparison of numerical results of velocity with experimental ones during contact

示していることから、この方向の剛性値や減衰係数値はほぼ妥当といえる。

Figure 10 Mode shapes of ball with condition in Table 3

図 10 は多質点モデルによる球の衝突時における 4.3×10^{-3} (s) ごとの変形状態を示したもので、直線は質点 G と質点 A_0 を結んだものである。時間経過につれて接触幅、質点 G や最上部の沈みが増加してゆき、衝突開始後 $11.29 \times 10^{-4} \sim 17.20 \times 10^{-4}$ (s) 付近でそれらの値が最大となり、以後それらが回復していく様子や、円周方向の局所的な回転方向伸縮が生じている様子もわかる。

図 11 は表 2 (b), (c) の初期条件のもとに多質点モデルで計算した球のモードを示したものである。図において質点 G と直線で結ばれた外周質点は A_0 と初期状態で地面と接触している A_{72} であり、時間間隔は $\Delta t = 8.0 \times 10^{-4}$ (s) である。図 11(a) では外周質点 A_{72} の位置は時々刻々変化しておりすべり運動が発生している様子が、一方図 11(b) では A_{72} の位置はあまり変化せず転がり運動が生じている様子がわかる。

4.2 衝突前後の速度に関する比較 図 12 は初期条件（水平方向速度、回転方向速度）を種々に変えた場合の衝突前後における速度の関係を示したもので、図中における直線は最小二乗法により求めた近似直線である。

図 12(a) は衝突前の回転方向速度を基準とした衝突前後の水平方向速度の関係である。実験値、簡易モデル、多質点モデルによる計算値はほぼ同領域に分布しており、衝突後の水平方向速度は衝突前の水平方向速度と回転方向速度に依存していることがわかる。

(a) Slipping motion [condition (b)]

(b) Rotating motion [condition (c)]

Figure 11 Mode for the condition in Table 2(b),(c)

図 12(b)は、衝突前の水平方向速度を基準とした衝突前後の回転速度の関係である。実験結果の近似直線に比べ、簡易モデルの近似線の傾きは大きくずれている。衝突後の回転速度は複雑に変化するため、これを精度よく表現するためには簡易モデルでは無理があることがわかる。

図 12(c)は、衝突前後の垂直方向の速度の関係で、実験結果と多質点モデルの結果はよく一致している。これらに比べ簡易モデルの結果は小さな値となっているが、近似直線の傾きは概ね一致している。この傾きは跳ね返り係数を示しており、約 0.8 である。

4.3 挙動全体の比較 本節ではある条件下で生じる繰り返し跳ね返り挙動について検討する。表 3 中 (a), (b)の衝突直前の条件下における球の重心位置の軌跡をそれぞれ図 13(a), (b)に示す。

図 13(a)に示す実験結果では、並進（水平）方向に対して逆回転で衝突し、並進方向に大きく減速して跳ね上がり、次の衝突後には大きく前進するという特徴がある。このためには 1 度目の衝突後の回転方向が順回転に変化し、これが 2 度目の衝突後の並進方向速度を大きくする役割を果たしていると考えられる。この現象に対する 2 つのモデルの数値解析結果は、どちら

(a) Horizontal velocity after contact

(b) Rotational velocity after contact

(c) Vertical velocity after contact

Figure 12 Relationship of velocity between before and after collision

も並進方向速度の減速、加速といった特徴が表現できているものの 2 回目の衝突以降の挙動には定量的な差が生じた。

一方、図 13(b)は前述の図 3 と同種の挙動であり、

Table 3 Initial condition

	(a)	(b)
Horizontal position (m)	0.0726	0.1955
Height (m)	0.1051	0.44574
Horizontal velocity (m/s)	-2.42	-1.62
Vertical velocity (m/s)	-3.2	-2.61
Rotational velocity (rps)	20.7	22.5

(a) Forward motion

(b) Backward and forward motion

Figure 13 Behavior of a ball during multiple collisions

逆回転で衝突し、その衝突後に順回転で後進し、次の衝突後にまた再び逆回転で前進するという、弾性に富む物体特有の挙動である。2つのモデルによる数値解析結果はこの特徴を捉えてはいないものの定量的な一致は得られなかった。

5. 結論

本論文では、回転弾性球の衝突時平面内挙動を解析するためのモデルとして簡易モデルと多質点モデルを提案し、定式化を行った。簡易モデルは、回転球が衝突する際、局所的な回転方向伸縮が系の運動に支配的に影響を与えることを実験結果から考察して得られたものであり、重心質量による並進運動に加えて、接

触部に配置された質量により回転運動も表現できる。一方多質点モデルは、球の各方向の変形を詳細に扱うことによって、例えば回転方向伸縮の場合、その歪み分布を外周上で表現できるなど、高精度な解析を可能にする。

実験結果とこれらのモデルによる数値解析結果の比較より得られた結果を要約すると

- (1) 衝突時の局所変形の定性的な傾向を知るためには簡易モデルで十分である。
- (2) 多質点モデルは球の衝突時の挙動を支配する因子と考えられる局所変形すなわち水平、垂直、回転の各方向伸縮を表現でき、計算結果は実験値と定性的、定量的に良好な一致を示す。
- (3) 簡易モデル、多質点モデルによれば弾性球に特有な繰り返し跳ね返り挙動を表現できる。
- (4) 多質点モデルによれば運動中の弾性体の変形状態を知ることができる。

以上のように、簡易モデル、多質点モデル共に、ここで扱った回転弾性球の衝突時挙動を解析するモデルとして実用上有効であることが示された。一方、複数回の繰り返し衝突を含む運動については、衝突回を重ねるごとに、定量的な表現が困難となった。この改善のためには、最適な諸定数の設定方法、さらに接触中のエネルギー消費などに着目した詳細な接触モデルの構築、また実験における衝突開始点と終了点の正確な判定方法の確立等が必要と考えられる。

参考文献

- (1) 例えば、R. M. Brach, "Rigid Body Collisions", J. of Applied Mechanics, Vol. 56, (1989), pp133-138.
- (2) 例えば、C. Glocker and F. Pfeiffer, "Dynamical systems with unilateral contacts", Nonlinear Dynamics, Vol. 3, (1992), pp245-259.
- (3) 例えば、河本、他3名, 回転槽内における2物体群の挙動解析, 機論(c), 67-661(2001), 2981-2988.
- (4) 例えば、V. D. Barger and M. G. Olsson, Classical Mechanics-A Modern Perspective, 培風館, (1973), 164-168.
- (5) 例えば、本江、他3名, ゴルフボール衝突特性(衝突モデルの妥当性), 日本機械学会機械力学計測制御部門講演会 講演論文集 (2003), CD-ROM.
- (6) 例えば、山本、他2名, 階層型接触モデルに関する動力学考察, 第52回理論応用力学講演会講演論文集 (2003), 563-564.
- (7) 粉体工学会, 粉体シミュレーション入門, 産業図書, (1998), 33.