宇宙機間の相対位置の制御について*

山田 克彦^{*1}, 吉河 章二^{*1}, 西山 岳宏^{*2}

On Relative Position Control between Two Spacecraft

Katsuhiko YAMADA^{*3}, Shoji YOSHIKAWA and Takehiro NISHIYAMA^{*3} Advanced Research R & D Center, Mitsubishi Electric Corporation,
8-1-1 Tsukaguchi-Honmachi, Amagasaki-shi, Hyogo, 661-8661 Japan

Formation flight control of two spacecraft is considered in this paper. A trajectory of relative position change of one spacecraft with respect to the other is designed on the basis of the Hill's equation from the viewpoint of the minimum fuel consumption. The total fuel consumed along the trajectory is analytically obtained. Discrete two-degree-of-freedom control law is also proposed in order to realize the designed trajectory. The controller achieves deadbeat property of the closed loop system and guarantees the robustness to the controller gain decrease. Numerical studies are executed in order to verify the trajectory generation and the discrete control.

Key Words: Relative Motion Control, Hill's Equation, Fuel-Minimum Trajectory, Feedback Control

1. ま え が き

2 機以上の宇宙機が相対的に位置を保ちながら運動するフォーメーションフライトは、近年観測ミッションにおいてその重要性が注目されており、いくつかのプロジェクトが計画されている⁽¹⁾。しかし宇宙機が能動的に制御を行わないで相対位置を保つためには、同一軌道にあるか、レコード盤軌道のような特殊な相対関係を持つ場合しか解がなく⁽²⁾、一般的にはなんらかの制御を行う必要が生じる。相対的な位置制御には推薬を消費するので、ミッションを果たす場合のほかは、例えば同一軌道にあって推薬を消費せずに相対関係を維持し、ミッションのときだけ相対位置を変えることが考えられる。本報では、このように宇宙機が相対的に位置を変える場合の制御則について検討したものである。このような宇宙機の相対的な位置変更は、宇宙開発事業団の技術試験衛星 VII 形で試みられており、比較的近傍域では直線的な軌道に沿って位置変更を行っている⁽³⁾。また Tillerson らは宇宙機の相対運動を記

述する方程式をもとに、推薬最小となる軌道を LP 問題の解として求めている⁽⁴⁾。これに対して本報では、円軌道運動を行う宇宙機が相対的に位置を変える場合の運動軌道について、推薬消費が L_2 ノルムの意味で最小となる解を解析的に導出し、その性質について考察した。さらにその軌道を実現するための宇宙機の制御方法について検討を行った。ここで述べる方法は、軌道離心率や地球重力場の不均一性の影響を考慮していない点において基礎的な段階のものであるが、比較的簡単な形で位置変更軌道や軌道に対する制御則が得られるため、宇宙機の相対位置制御における一つの典型的な方法を提供するものと考えられる。

2. Hill 方程式

宇宙機の相対運動を記述する運動方程式として Hill 方程式を用いる⁽⁵⁾。すなわちターゲット衛星が円軌道運動をするものとし、ターゲット衛星の質量中心位置を原点とする軌道座標系 (x 方向をターゲット衛星の進行方向に、 z 方向を地心方向にとる) においてチェイサ衛星の質量中心位置を $(x \ y \ z)$ とするとき、 x, y, z は次式に従うものとする。

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{z} = f_x$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = f_y$$

* 原稿受付 2003 年 9 月 15 日。

^{*1} 正員、三菱電機(株)先端技術総合研究所 (〒661-8661 尼崎
市塚口本町 8-1-1)。^{*2} 三菱電機(株)先端技術総合研究所。

E-mail: Yamada.Katsuhiko@wrc.melco.co.jp

$$\ddot{z} + 2\omega\dot{z} - 3\omega^2 z = f_z \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし ω はターゲットの軌道角速度, f_x, f_y, f_z はチェイサの単位質量当たり働く力である。この力が働かない場合の、運動方程式の任意の初期条件に対する解は次のように表される (Clohessy-Wiltshire 解)。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{rr}(t) & \Phi_{rv}(t) \\ \Phi_{vr}(t) & \Phi_{vv}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \dot{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T, \quad \dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$$

$$\Phi_{rr}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6(\omega t - \sin(\omega t)) \\ 0 & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 4 - 3\cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{rv}(t) =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3\omega t - 4\sin(\omega t)}{\omega} & 0 & \frac{2(1 - \cos(\omega t))}{\omega} \\ 0 & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} & 0 \\ -\frac{2(1 - \cos(\omega t))}{\omega} & 0 & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{vr}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6\omega(1 - \cos(\omega t)) \\ 0 & -\omega \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{vv}(t) = \begin{bmatrix} -3 + 4\cos(\omega t) & 0 & 2\sin(\omega t) \\ 0 & \cos(\omega t) & 0 \\ -2\sin(\omega t) & 0 & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

さらに $\Phi_{rr}(t)$, $\Phi_{rv}(t)$, $\Phi_{vr}(t)$, $\Phi_{vv}(t)$ に対して次のように記号を定義する。

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{rr}(t) & \Phi_{rv}(t) \\ \Phi_{vr}(t) & \Phi_{vv}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_r(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{rr}(t) \\ \Phi_{vr}(t) \end{bmatrix}, \quad \Phi_v(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{rv}(t) \\ \Phi_{vv}(t) \end{bmatrix}$$

3. 最終状態を満たす解

3.1 推薬消費量を抑える準最適解

いまチェイサ衛星に対する制御力を

$$\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ f_z]^T$$

として、これは時刻 $t = \tau_i (i=1, 2, \dots, N)$ において大きさ f_i のインパルス力として与えられるものとする。すなわち

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N f_i \delta(t - \tau_i) \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(3)を式(2)に代入して解を求めると、 $t=T$ における状態 $\mathbf{x}(T)$, $\dot{\mathbf{x}}(T)$ は次のように表すことができる。

$$\mathbf{X}(T) = \Phi(T)\mathbf{X}(0) + \sum_{i=1}^N \Phi_v(T - \tau_i) \mathbf{f}_i,$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし $T \geq \tau_i$ とする。ここで $\mathbf{X}(T)$ を望ましい値にするように制御力 $\mathbf{f}_i$ を求める問題を考えよう。次のように記号を定義する。

$$\Phi_v = [\Phi_v(T - \tau_1) \ \Phi_v(T - \tau_2) \ \dots \ \Phi_v(T - \tau_N)]$$

$$\mathbf{F} = [f_1^T \ f_2^T \ \dots \ f_N^T]^T$$

$$\tilde{\mathbf{X}}(T) = \mathbf{X}(T) - \Phi(T)\mathbf{X}(0)$$

ここで N 回のインパルスに対して Φ_v は $6 \times 3N$ 次のマトリックス, $\mathbf{F}$ は $3N$ 次のベクトルである。このとき式(4)は次のように表すことができる。

$$\Phi_v \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{X}}(T) \quad \dots\dots\dots (5)$$

もしも制御力 $\mathbf{F}$ として L_2 ノルム (Euclid ノルム) $\|\mathbf{F}\|_2$ を最小となる解を選ぶことにすると、 $N \geq 2$ で Φ_v がフルランクであるときに解は次の形で表される。

$$\mathbf{F} = \Phi_v^T (\Phi_v \Phi_v^T)^{-1} \tilde{\mathbf{X}}(T) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし $\|\mathbf{F}\|_2$ が最小であることは推薬最小であることを意味しない。 $\mathbf{F}$ の第 i 成分を $F_i (i=1, \dots, 3N)$ とするとき、この各成分がスラストによって独立に出力されるものとすれば、推薬消費量を直接的に表すのは L_1 ノルム $\|\mathbf{F}\|_1$ となる。 $\|\mathbf{F}\|_1$ と $\|\mathbf{F}\|_2$ の定義式は次式で表される。

$$\|\mathbf{F}\|_1 = |F_1| + |F_2| + \dots + |F_{3N}|$$

$$\|\mathbf{F}\|_2 = \sqrt{|F_1|^2 + |F_2|^2 + \dots + |F_{3N}|^2}$$

ここで $\|\mathbf{F}\|_1$ と $\|\mathbf{F}\|_2$ との間には次の大小関係が成立する。

$$\|\mathbf{F}\|_2 \leq \|\mathbf{F}\|_1 \leq \sqrt{3N} \|\mathbf{F}\|_2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

かりに F_i が $[-1 \ 1]$ の間で一様分布するとすれば

$$\|\mathbf{F}\|_1 \approx \frac{3N}{2}, \quad \sqrt{3N} \|\mathbf{F}\|_2 \approx \sqrt{3} N$$

となるので $\sqrt{3N} \|\mathbf{F}\|_2$ は $\|\mathbf{F}\|_1$ を推定する比較的良好な尺度となる。またスラストの向きが取付角度や衛星の姿勢変動の影響で軌道座標系の各軸の方向を向いていないとすれば、 $\|\mathbf{F}\|_1$ であっても推薬消費量を正確に反映するわけではない。これらを考慮して、ここでは解の求めやすい $\|\mathbf{F}\|_2$ を最小化する準最適解を用いることにする。この場合の N 回のスラスト噴射による推薬消費量を次のようにおく。

$$q_N = \sqrt{3N} \|\mathbf{F}\|_2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(6)を用いれば時刻 $t = \tau_i$ における制御力 $\mathbf{f}_i$ は次のように表すことができる。

$$\mathbf{f}_i = \Phi_v^T(T - \tau_i) \{ (\Phi_v \Phi_v^T)^{-1} \tilde{\mathbf{X}}(T) \} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$\mathbf{f}_i$ にこの解を用いることにすれば、時刻 t における状態量 $\mathbf{X}(t)$ は次のように表すことができる。ただし $\tau_i \leq t$ を満たす最大の i を n とおく。

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{X}(0)$$

$$+ \sum_{i=1}^N \Phi_v(t-\tau_i) \Phi_v^T(T-\tau_i) \{ (\Phi_v \Phi_v^T)^{-1} \tilde{X}(T) \} \quad \dots\dots\dots (10)$$

次に連続的に入力の与えられる場合に解を表すことを考えよう。インパルスの与えられる時間間隔を各間隔で等しく $\Delta\tau$ とおいて $\tau_i = (i-1)\Delta\tau$ とする。このとき上式において

$$\Phi_v \Phi_v^T = \sum_{i=1}^N \Phi_v(T-(i-1)\Delta\tau) \Phi_v^T(T-(i-1)\Delta\tau)$$

と表すことができる。ここで $\Delta\tau \rightarrow 0 (N \rightarrow \infty)$ の極限をとって式(10)を連続化する。いま

$$C(t, T) = \int_0^t \Phi_v(t-\tau) \Phi_v^T(T-\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (11)$$

とおくことにすれば式(10)は次のように表される。

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + C(t, T)C^{-1}(T, T)\tilde{X}(T) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで $C(t, T)$ は形は複雑になるが解析的に求めることができるので、上式の解を各時刻ごとに求めることができる。この場合の時刻 τ における制御量を $\hat{f}(\tau)$ とすると、 $\hat{f}(\tau)$ は次式で表される。

$$\hat{f}(\tau) = \Phi_v^T(T-\tau)C^{-1}(T, T)\tilde{X}(T) \quad \dots\dots\dots (13)$$

このときの推薬消費量は次のように求められる。 N は時刻 $0 \sim T$ における噴射回数であるから、 N の大きなときには $N \approx T/\Delta\tau$ とみなされる。したがって離散的に表現すれば

$$q_N^2 = \frac{3T}{\Delta\tau} \sum \hat{f}(\tau) \Delta\tau \cdot \hat{f}(\tau) \Delta\tau \\ = 3T \sum \hat{f}(\tau) \cdot \hat{f}(\tau) \Delta\tau$$

よって $\Delta\tau \rightarrow 0$ の極限における推薬消費量を q_∞ とおくと次式が成り立つ。

$$q_\infty^2 = 3T \int_0^T \hat{f}(\tau) \cdot \hat{f}(\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (14)$$

上式の右辺に式(13)を代入することによって q_∞ は次式となる。

$$q_\infty = \sqrt{3T \tilde{X}(T)^T C^{-1}(T, T) \tilde{X}(T)} \quad \dots\dots\dots (15)$$

3・2 準最適解の性質 式(8)、(15)に基づいて準最適解の性質について考察する。簡単のために次の状況を対象とする。

$$X(0) = [x_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$X(T) = [x_f \ y_f \ z_f \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

すなわち2機の宇宙機は、初期時刻において同一軌道にあって x 方向にのみ距離が離れているものとし、時刻 T において目標とする距離だけ離れて相対速度は零になるものとする。このとき

$$\Phi(T)X(0) = X(0)$$

となることから、 $\tilde{X}(T)$ は次式となる。

$$\tilde{X}(T) = X(T) - X(0) = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

ただし $\Delta x = x_f - x_0$, $\Delta y = y_f$, $\Delta z = z_f$ とする。 $\tilde{X}(T)$ は初期位置と目標位置の偏差分だけが値を持つ。

この状況で $N \rightarrow \infty$ の連続入力の準最適解における式(15)の q_∞ を求めることを考える。Hill 方程式において (x, z) 成分と y 成分は分離されているので、 q_∞ における y 成分の寄与項を $q_{\infty y}$ とおく。 $q_{\infty y}$ は式(15)に基づいて計算することにより次式を満たす。

$$q_{\infty y}^2 = \frac{6\omega^3 T \{ \omega T + \sin(\omega T) \cos(\omega T) \} \mathcal{A}_y^2}{\omega^2 T^2 - \sin^2(\omega T)} \mathcal{A}_y^2 \dots\dots\dots (16)$$

$q_{\infty y}$ を ωT の関数とみなし、 ωT で微分すると次式となる。

$$\frac{d(q_{\infty y}^2)}{d(\omega T)} = - \frac{12\omega^5 T^3 \sin^2(\omega T) \mathcal{A}_y^2}{\{\omega^2 T^2 - \sin^2(\omega T)\}^2} \dots\dots\dots (17)$$

したがって $q_{\infty y}$ は ωT に対して単調減少となるが、 $\sin(\omega T) = 0$ となる点の近傍では、その減少がゆるやかであることがわかる。同様に (x, z) 成分の影響についても求めることができるが、その関数形は y 成分の場合のように単純ではないので、 $\omega T \ll 1$ および $\omega T \gg 1$ において近似的に表現する。式(16)から求められる y 成分の結果もあわせて示せば、 q_∞ はこれらの領域で次のように近似することができる。

$$\omega T \ll 1:$$

$$q_\infty \approx \frac{6}{T} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\omega T \gg 1:$$

$$q_\infty \approx \sqrt{\frac{4\mathcal{A}_x^2}{T^2} - \frac{24\omega\Delta x\Delta z}{T} + 6(\omega\Delta y)^2 + 58.8(\omega\Delta z)^2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

したがって T が小さいときの推薬消費量はほぼ T に反比例して減少し、 T が大きくなると Δy , Δz によってある一定値に漸近する。この場合、 Δx による推薬消費量は Δx や Δy による推薬消費量よりも大きくなることがわかる。すなわち、初期位置と目標位置に高度差があると推薬消費量が大きくなる。

以上は連続入力の場合であるが、次に $t=0$, T の2回の噴射を行う $N=2$ の場合を考えよう。この場合解は一意的なので最適性は持たないが、インパルス噴射の最も単純な場合として比較の対象とする。 q_2 における y 成分の寄与項を q_2 とおくと次式を満たす。

$$q_{2y}^2 = \frac{6\omega^2 [1 + \cos^2(\omega T)] \mathcal{A}_y^2}{\sin^2(\omega T)} \dots\dots\dots (20)$$

q_{2y}^2 を ωT で微分すると次式となる。

$$\frac{d(q_{2y}^2)}{d(\omega T)} = - \frac{24\omega^2 \cos(\omega T) \mathcal{A}_y^2}{\sin^3(\omega T)} \quad \dots\dots\dots (21)$$

したがって q_{2y}^2 は $\omega T = \{k + (1/2)\}\pi$ (k は非負の整数)において極小値をとり、 $\sin(\omega T) = 0$ となる点において発散する。これは式(5)のマトリックス Φ_v が特

異となるためである。また (x, z) 成分は両者が干渉して複雑になるが、 Δ_x だけが存在する場合には、これを比較的簡単に求めることができる。 q_2 における Δ_x だけの寄与項を q_{2x} とすると次式が成り立つ。

$$q_{2x} = \frac{12\omega^2 \left\{ 1 + 3 \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right\} \Delta_x^2}{\left\{ 8 \sin \left(\frac{\omega T}{2} \right) - 3\omega T \cos \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right\}^2} \cdots (22)$$

これより q_{2x} は次式を満たす ωT においてやはり発散する。

$$\tan \left(\frac{\omega T}{2} \right) = \frac{3}{8} \omega T \cdots \cdots \cdots (23)$$

上式を満たす $\omega T (> 0)$ の値は

$$\omega T = 8.84, 15.36, 21.75, \cdots$$

となり、 $\omega T = (2k+3)\pi$ (k は非負の整数) よりやや小さな値となる。実際 $N=2$ の場合には式(5)において

$$\det \Phi_v = - \frac{\sin(\omega T) \{ 3 \sin(\omega T) \omega T - 8 + 8 \cos(\omega T) \}}{\omega^3} \cdots \cdots \cdots (24)$$

となり、 $\sin(\omega T) = 0$ および式(23)を満たす ωT において $\det \Phi_v = 0$ となって 2 回だけの噴射では制御できない。 $N=2$ において z 成分の影響についても同様に求め、 $\omega T \ll 1$ の場合にこれを近似すると、 q_2 は次のようになる。

$$\omega T \ll 1: q_2 \approx \frac{2\sqrt{3}}{T} \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2} \cdots \cdots \cdots (25)$$

一方 $\omega T \gg 1$ の場合には T の値によっては発散するが、 q_{2y} が極小値をとる $\omega T = \{k + (1/2)\}\pi$ の場合に限定すれば次式が得られる。

$$\omega T = \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi, \omega T \gg 1: \\ q_2 \approx \sqrt{\frac{20\Delta_x^2}{3T^2} - \frac{16\omega\Delta_x\Delta_z}{T} + 6(\omega\Delta_y)^2 + 30(\omega\Delta_z)^2} \cdots \cdots \cdots (26)$$

この結果より次のことがわかる。 $\omega T \ll 1$ の場合には $N=2$ のほうが連続入力よりも推薬量が少なくすむ。 $\omega T \gg 1$ の場合には、 $\omega T = \{k + (1/2)\}\pi$ とすることによって、 Δ_z の影響による推薬消費量は $N=2$ のほうが少ない。 Δ_y については推薬消費量はほぼ同等、 Δ_x については連続入力のほうが少なくなる。したがって $N=2$ の場合でも推薬消費量の少なくなる場合があるが、 $N \rightarrow \infty$ とすることによって T の値による推薬消費量変化の少ない滑らかな軌道の得られる利点がある。

なお $N=2$ の場合のほうが $N \rightarrow \infty$ の連続入力の場合よりも推薬消費量が少なくなるのは、ここで求める準最適解が N を固定した場合の $\|\mathbf{F}\|_2$ を最小化する解

であるのに対して、式(8)のように $\sqrt{3N}$ を乗じて推薬消費量 q_N を求めているためである。

4. 軌道に対するフィードバック制御

4.1 軌道に対する離散的制御則 スラスタの推力は不確実性が大きいので、チェイサ衛星の制御にはフィードバック制御が必要となる。このとき各制御時刻において目標時刻における制御誤差 $\hat{\mathbf{X}}(T)$ を新たに計算し、式(9)や式(13)から制御力を求めてもよいが、ここではより計算量の少ない、与えられた軌道に対するフィードバック制御を考えよう。式(10)や式(12)の解は時刻 T における目標状態を実現する軌道を表しているが、とくに軌道の種類を限定せずに、時刻 t における軌道を $\hat{\mathbf{X}}(t)$ とし、この軌道を実現する制御力を $\hat{\mathbf{f}}(t)$ とする。この $\hat{\mathbf{f}}(t)$ として式(9)や式(13)が候補となるが、これらに限定されるわけではない。実際の制御力は一定間隔 $\Delta\tau$ でインパルス的に与えるものとし、時刻 $t = \tau_i = (i-1)\Delta\tau$ における制御力の大きさを $\mathbf{f}(\tau_i)$ とする。また各制御時刻において、チェイサ衛星の状態量 $\mathbf{X}(t)$ は検出されるものとする。 $\hat{\mathbf{X}}(t)$ と $\mathbf{X}(t)$ はそれぞれ次の方程式に従う。

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) = \Phi(t) \hat{\mathbf{X}}(0) + \int_0^t \Phi_v(t-\tau) \hat{\mathbf{f}}(\tau) d\tau \cdots (27)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \Phi(t) \mathbf{X}(0) + \sum_{i=1}^n \Phi_v(t-\tau_i) \mathbf{f}(\tau_i) \cdots \cdots (28)$$

これより $\delta\mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}(t)$ とすると、

$$\delta\mathbf{X}(t) = \Phi(t) \delta\mathbf{X}(0) + \int_0^t \Phi_v(t-\tau) \hat{\mathbf{f}}(\tau) d\tau \\ - \sum_{i=1}^n \Phi_v(t-\tau_i) \mathbf{f}(\tau_i) \cdots \cdots \cdots (29)$$

この方程式において、ある制御力をインパルス的に加える時刻を時刻零として、 $\delta\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ とするような制御力を与えることを考える。 $\delta\mathbf{X}(t)$ は 6 次のベクトルなので 1 回のインパルスだけでは $\delta\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ を実現することはできない。ここでは $t=0$, $\Delta\tau$ の 2 回のインパルスによって $\delta\mathbf{X}(2\Delta\tau) \rightarrow \mathbf{0}$ とすることを考えると

$$\delta\mathbf{X}(2\Delta\tau) = \Phi(2\Delta\tau) \delta\mathbf{X}(0) \\ + \int_0^{2\Delta\tau} \Phi_v(2\Delta\tau-\tau) \hat{\mathbf{f}}(\tau) d\tau \\ - [\Phi_v(2\Delta\tau) \quad \Phi_v(\Delta\tau)] \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}(\Delta\tau) \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots (30)$$

となることから、制御力は次のように求められる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}(\Delta\tau) \end{bmatrix} = [\Phi_v(2\Delta\tau) \quad \Phi_v(\Delta\tau)]^{-1} \Phi(2\Delta\tau) \delta\mathbf{X}(0) \\ + [\Phi_v(2\Delta\tau) \quad \Phi_v(\Delta\tau)]^{-1} \int_0^{2\Delta\tau} \Phi_v(2\Delta\tau-\tau) \hat{\mathbf{f}}(\tau) d\tau \cdots \cdots \cdots (31)$$

上式において右辺第 1 項はフィードバック制御項、右

辺第2項はフィードフォワード制御項となるが、この場合は時刻零での制御誤差 $\delta X(0)$ によって時刻 $\Delta\tau$ での制御力も定めることになるので、時刻 $\Delta\tau$ での制御誤差 $\delta X(\Delta\tau)$ が反映されず、あまり望ましい形ではない。そこでフィードバック制御ゲイン K を、 $\delta X(0)$ から $f(0)$ を得るように次式で定めることを考える。

$$\begin{aligned} K &= [I_3 \ 0_{3 \times 3}] [\Phi_v(2\Delta\tau) \ \Phi_v(\Delta\tau)]^{-1} \Phi(2\Delta\tau) \\ &= [I_3 \ 0_{3 \times 3}] [\Phi_v(\Delta\tau) \ \Phi_v(0)]^{-1} \Phi(\Delta\tau) \quad \dots\dots (32) \end{aligned}$$

上式において I_3 は3次の単位マトリックス、 $0_{3 \times 3}$ は 3×3 次の零マトリックスであり、

$\Phi_v(2\Delta\tau) = \Phi(\Delta\tau)\Phi_v(\Delta\tau)$, $\Phi_v(\Delta\tau) = \Phi(\Delta\tau)\Phi_v(0)$ などの関係を用いた、式(32)において、 P_1 , P_2 をともに 6×3 次のマトリックスとして

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = [\Phi_v(\Delta\tau) \ \Phi_v(0)]^{-1}$$

とおくことにすると、 P_1 , P_2 の定義から次式が成り立つ。

$$P_1 \Phi_v(\Delta\tau) = I_3, \quad P_1 \Phi_v(0) = 0_{3 \times 3} \quad \dots\dots (33)$$

$$P_2 \Phi_v(\Delta\tau) = 0_{3 \times 3}, \quad P_2 \Phi_v(0) = I_3 \quad \dots\dots (34)$$

$$\Phi_v(\Delta\tau) P_1 + \Phi_v(0) P_2 = I_6 \quad \dots\dots (35)$$

P_1 を用いて K は次式となる。

$$K = P_1 \Phi(\Delta\tau) \quad \dots\dots (36)$$

K を上式のように固定して、時刻 $t = \tau_i$ における制御力 $f(\tau_i)$ を次のように与える。

$$\begin{aligned} f(\tau_i) &= K \delta X(\tau_i) + P_1 \int_0^{\Delta\tau} \Phi_v(\Delta\tau - \tau) \hat{f}(\tau_i + \tau) d\tau \\ &\quad \dots\dots (37) \end{aligned}$$

上式でも右辺第1項がフィードバック制御項であり、右辺第2項がフィードフォワード制御項である。このフィードフォワード制御項の積分範囲は式(31)とは異なり $\Delta\tau$ にとる。これは次のサンプリングにおけるフィードバック制御項との干渉をさけるためである。 $\Delta\tau$ が十分に小さければ、フィードフォワード項自体が小さくなるので、フィードバック制御によってフィードフォワード項を補償することができ、フィードフォワード項を付加する必要はないものと考えられる。

4・2 制御則の安定性 式(37)の制御則が安定になることは次のようにしてわかる。式(29)において $\Delta\tau$ ごとの離散的なふるまいを考えて、 $\tau_i = (i-1)\Delta\tau$ とすると、 $\Delta\tau$ 間における変動は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \delta X(\tau_{i+1}) &= \Phi(\Delta\tau) \delta X(\tau_i) \\ &+ \int_0^{\Delta\tau} \Phi_v(\Delta\tau - \tau) \hat{f}(\tau_i + \tau) d\tau - \Phi_v(\Delta\tau) f(\tau_i) \\ &\quad \dots\dots (38) \end{aligned}$$

上式に式(37)を代入すると

$$\begin{aligned} \delta X(\tau_{i+1}) &= \{\Phi(\Delta\tau) - \Phi_v(\Delta\tau) K\} \delta X(\tau_i) \\ &+ (I_6 - \Phi_v(\Delta\tau) P_1) \int_0^{\Delta\tau} \Phi_v(\Delta\tau - \tau) \hat{f}(\tau_i + \tau) d\tau \\ &\quad \dots\dots (39) \end{aligned}$$

この式において右辺第2項はフィードフォワード制御項の残差分であり、マトリックスの零空間を $\mathcal{N}$ 、値域を $\mathcal{R}$ で表すと、

$$\mathcal{N}(I_6 - \Phi_v(\Delta\tau) P_1) = \mathcal{R}(\Phi_v(\Delta\tau) P_1) = \mathcal{R}(\Phi_v(\Delta\tau))$$

となることから、式(39)の積分項のうち $\Phi_v(\Delta\tau)$ の値域に属する部分は零になる。逆に $\Phi_v(\Delta\tau)$ の値域に属さない部分はフィードフォワード残差となって残ることになる。この残差分を零とするには、式(9)のように離散的な入力により軌道を決めて、その入力のタイミングにおいて制御を行うようにすればよい。しかしこの残差分があっても系の安定性には関係せず、安定性に寄与するのは $\{\Phi(\Delta\tau) - \Phi_v(\Delta\tau) K\}$ の部分である。この項の固有値がすべて単位円内部であれば系は安定となる。式(33)～(35)の関係をを用いて $\{\Phi(\Delta\tau) - \Phi_v(\Delta\tau) K\}$ を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta\tau) - \Phi_v(\Delta\tau) K &= \Phi(\Delta\tau) - \Phi_v(\Delta\tau) P_1 \Phi(\Delta\tau) \\ &= \{I_6 - \Phi_v(\Delta\tau) P_1\} \Phi(\Delta\tau) = \Phi_v(0) P_2 \Phi(\Delta\tau) \\ &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_3 \end{bmatrix} [P_2 \Phi_r(\Delta\tau) \ 0_{3 \times 3}] = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ P_2 \Phi_r(\Delta\tau) & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ &\quad \dots\dots (40) \end{aligned}$$

これより次式が成り立つ。

$$\{\Phi(\Delta\tau) - \Phi_v(\Delta\tau) K\}^2 = 0_{6 \times 6} \quad \dots\dots (41)$$

上式より K が有限整定ゲインとなっていることがわかる。したがって $\{\Phi(\Delta\tau) - \Phi_v(\Delta\tau) K\}$ の6個の固有値はすべて零であり、系は安定である。このことは式(31)から予想されることではあるが、 $\Delta\tau$ ごとに常に同じフィードバックゲインを用いて有限整定が達成されることになる。

次にフィードバックゲイン K の成分について考えよう。式(33), (36)より明らかなように K は次のように表すことができる。

$$K = [P_1 \Phi_r(\Delta\tau) \ I_3] \quad \dots\dots (42)$$

したがってフィードバックゲイン K の速度偏差に対応する部分は単位マトリックスとなる。このことは速度偏差はその分だけインパルス力によって補償することを意味している。一方、位置偏差に対するゲインは $P_1 \Phi_r(\Delta\tau)$ となる。この各成分は解析的に求めることができるが、もしも $\omega \Delta\tau \ll 1$ であり、

$$\sin(\omega \Delta\tau) \approx \omega \Delta\tau, \quad \cos(\omega \Delta\tau) \approx 1 - \frac{1}{2}(\omega \Delta\tau)^2$$

と近似できる場合には、 $P_1 \Phi_r(\Delta\tau)$ の各成分を次のよ

うに簡単に表すことができる。

$$P_1 \Phi_r(\Delta\tau) \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta\tau} & 0 & -\omega \\ 0 & \frac{1}{\Delta\tau} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\omega\Delta\tau)^2 \right\} & 0 \\ \omega & 0 & \frac{1}{\Delta\tau} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (43)$$

したがって $\omega\Delta\tau$ が小さいときには位置偏差の $1/\Delta\tau$ 程度のインパルス力を必要とする。

4.3 ゲイン低下に対するロバスト性 スラスタの推力には限界があるのでフィードバックゲイン K を式(42)よりも低めに設定せざるを得ない場合も考えられる。ここではこの場合の安定性について考えよう。 α を $0 < \alpha \leq 1$ として閉ループ系におけるマトリックス

$$\Phi(\Delta\tau) - \alpha\Phi_v(\Delta\tau)K$$

の6個の固有値を調べる。この特性方程式

$$\det\{zI_6 - (\Phi(\Delta\tau) - \alpha\Phi_v(\Delta\tau)K)\} = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

を展開して整理すると固有値の二つは次式を満たすことがわかる。

$$z^2 - 2(1-\alpha)\cos(\omega\Delta\tau)z + 1 - \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (45)$$

したがってこの固有値は次式で与えられる。

$$z = (1-\alpha)\cos(\omega\Delta\tau) \pm j\sqrt{1-\alpha-(1-\alpha)^2\cos^2(\omega\Delta\tau)} \quad \dots\dots\dots (46)$$

この場合 $|z| = \sqrt{1-\alpha}$ となるので、この固有値に関しては $0 < \alpha \leq 1$ において安定である。残りの四つの固有値に関しては、 $\omega\Delta\tau \ll 1$ の条件のもとで $(\omega\Delta\tau)^3$ 以上の項を無視すれば、次式を満たす4根となる。

$$f(z)^2 + (1-\alpha)(\omega\Delta\tau)^2 z f(z) - 4(\omega\Delta\tau)^2 \alpha(1-\alpha)z^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

ただし $f(z) = z^2 - 2(1-\alpha)z + 1 - \alpha$ とおく。上式より $\omega\Delta\tau$ 分を摂動とみなして解を摂動的に求めることを考える。式(47)を形式的に解いて高次の摂動項を無視することになると次式が得られる。

$$f(z) = \pm 2\omega\Delta\tau\sqrt{\alpha(1-\alpha)}z \quad \dots\dots\dots (48)$$

したがって

$$z^2 - 2\{1 - \alpha \pm \omega\Delta\tau\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\}z + 1 - \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

から得られる四つの根が求める固有値となる。これらを $z_i (i=1, 2, 3, 4)$ とおくと、次のようになる。

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 1 - \alpha + \omega\Delta\tau\sqrt{\alpha(1-\alpha)} \\ &\quad \pm j\sqrt{1-\alpha-(1-\alpha+\omega\Delta\tau\sqrt{\alpha(1-\alpha)})^2} \\ z_{3,4} &= 1 - \alpha - \omega\Delta\tau\sqrt{\alpha(1-\alpha)} \\ &\quad \pm j\sqrt{1-\alpha-(1-\alpha-\omega\Delta\tau\sqrt{\alpha(1-\alpha)})^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (50)$$

ただし $\omega\Delta\tau$ は十分に小さく上式の根号内は正とする。すなわち

$$\omega\Delta\tau \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad \dots\dots\dots (51)$$

この場合にも各根において $|z| = \sqrt{1-\alpha}$ となるので、 $\omega\Delta\tau \ll 1$ のもとでは $0 < \alpha \leq 1$ における閉ループ極の絶対値はすべて $\sqrt{1-\alpha}$ 程度となって、安定であることがわかる。

4.4 準最適軌道に対する制御則 式(37)は一般に目標状態までの時間軌道が与えられたときに、それを実現する制御則を与えている。ここでは軌道が式(12)の連続入力の準最適軌道である場合について、具体的な制御則を求める。式(37)の積分項に準最適軌道における解を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\int_0^{\Delta\tau} \Phi_v(\Delta\tau - \tau) \hat{f}(\tau_i + \tau) d\tau \\ &= \int_0^{\Delta\tau} \Phi_v(\Delta\tau - \tau) \Phi_{\tilde{f}}(T - \tau_i - \tau) d\tau \\ &\quad \times C^{-1}(T, T) \tilde{X}(T) \\ &= C(\Delta\tau, T - \tau_i) C^{-1}(T, T) \tilde{X}(T) \end{aligned}$$

これを式(37)に代入して準最適軌道に対する制御則が次式で得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\tau_i) &= K \delta \mathbf{X}(\tau_i) \\ &\quad + P_1 C(\Delta\tau, T - \tau_i) C^{-1}(T, T) \tilde{X}(T) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (52)$$

5. 数値計算例

5.1 準最適軌道の推薬消費量 まず式(10)、(12)で表される準最適軌道の推薬消費量の到達時間 T に対する関係を調べる。ターゲット衛星が円軌道運動をするときの軌道角速度を $\omega = 0.001$ [rad/s] とし、チェイサの初期値を

$$\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

とする。最終値を二つの場合について次のように定めて、準最適軌道を求める。

$$\text{Case 1: } \mathbf{x}(T) = [1 \ 000 \ 1 \ 000 \ 0]^T \quad [\text{m}]$$

$$\dot{\mathbf{x}}(T) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\text{Case 2: } \mathbf{x}(T) = [1 \ 000 \ 1 \ 000 \ 1 \ 000]^T \quad [\text{m}]$$

$$\dot{\mathbf{x}}(T) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

Case 1 と Case 2 の違いは目標値の z 成分だけであるが、 z 成分の有無によって式(19)、(26)に示したように推薬消費量は大きく影響を受けるので、軌道も異なったものとなることが予想される。各 Case において、目標位置に到達するまでの時間 T を変化させて、 $N = \infty, 10, 2$ の各場合について推薬消費量 q_∞, q_{10}, q_2 および式(18)、(19)に示される q_∞ の近似値、式(25)、(26)に示される q_2 の近似値を求めて図1, 2に示す。

Fig. 1 Fuel consumption in Case 1

Fig. 2 Fuel consumption in Case 2

q_∞ の近似値では式(18)と式(19)が交わる T の値を T_c として, $T \leq T_c$ では式(18)を, $T > T_c$ では式(19)を示す. q_2 の近似値も同様である. 図1, 2より, $N=2$ の場合には $\omega T = \{k + (1/2)\}\pi$ となる付近で推薬消費量が極小値をとり, とくに Δ_2 の存在する Case 2 では $N=10, \infty$ の場合よりも極小値付近において推薬消費量が少なくなること, 式(18), (19)は q_∞ を精度よく近似し, 式(25), (26)は極小値付近での q_2 を精度よく近似すること, $N=10$ の場合は $N=\infty$ の場合に近づくことなどがわかる.

5・2 準最適軌道の形状 次に Case 1 と Case 2 のそれぞれについて, 目標位置に到達するまでの時間 T を変化させて, xz 平面における軌道と, 軌道の y 方向成分の時間に対する関係を求める. $N=\infty, 10, 2$ の各場合について, T を $\omega T = \pi/2, 3\pi/2$ にとったときの結果を図3, 4に示す. 図3は xz 平面内の軌道を表し, 図4は y 方向の軌道の時間に対する関係を表す. これらの結果より次のことがわかる. 目標位置が z 成分を持たない Case 1 の場合, xz 平面の軌道は初期にほぼ $+z$ 方向の初速度をもって軌道高度をさげ, 軌道運動を利用して $+x$ 方向の移動を達成する. 一

Case 1

Case 2

Fig. 3 Trajectories in the xz -plane Fig. 4 Trajectories in the y -direction

方, 目標位置が z 成分を持つ Case 2 の場合には, 時間 T が短い場合 ($\omega T = \pi/2$) にはほぼ直線的な移動となるが, 時間が長くなると ($\omega T = 3\pi/2$), ほぼ $-z$ 方向に初速度を与えてやはり軌道運動を利用して目標位置にいたる. y 方向の運動は Case 1 と Case 2 で同一であり, 時間 T が短いと時間に対して直線的な移動となるが, 時間 T が長くなると軌道運動を利用した正弦波状の運動となる.

5・3 準最適軌道に対するフィードバック制御

次に式(12)の準最適軌道に対するフィードバック制

Fig. 5 Simulation results of Case 2 (solid line : simulation, broken line : trajectory)

御の結果を示す。Case 2 の初期条件と最終条件のもとに到達時間 T が $\omega T = 3\pi/2$ を満たし、サンプリング時間が $\Delta t = T/10$ のときの位置と速度のシミュレーション結果を図 5 に示す。図 5 において実線が制御結果、破線が軌道を示す。図 5 より明かなように位置制御の結果はほとんど誤差を生じていない。サンプリング時間が比較的に長いためにサンプリング間での速度誤差は生じているが、準最適軌道に対する追従性はよい。

6. ま と め

本報では円軌道運動を行う 2 機の宇宙機がフォーメーションを組んでミッションを達成する場合を対象に、相対的に位置を変更するための軌道の構成法と、位置変更軌道に沿うように宇宙機の制御を行うときの制御法について検討を行った。軌道の構成法においては、Hill 方程式から推薬消費量を抑えることのできる軌道の解を導き、その解を位置変更軌道の候補として、同一軌道で進行方向に距離の離れた 2 機の宇宙機の、一方が他方に対して相対的に位置を変更する場合の推薬消費量を求めた。また軌道の制御法においては、制御誤差を 2 回の制御において零に収束させることのできる有限整定のフィードバックゲインを求め、そのゲインがゲイン低下に対してロバストであることを導いた。さらに相対位置変更時のシミュレーションを行い、制御のサンプリング間隔が長い場合にも制御誤差を収束し得ることを確認した。本報で提案する方法は、2 機の宇宙機がフォーメーションを構成する際の基本方式を提供するものと考えられる。

文 献

- (1) Bauer, F. H., Hartman, K., How, J. P., Bristow, J., Weidow, D. and Busse, F., Enabling Spacecraft Formation Flying through Spaceborne GPS and Enhanced Automation Technologies, *Proceedings of the 12th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation*, (1999), 369-383.
- (2) 中須賀真一, 宇宙機のフォーメーションフライト, システム/制御/情報, **45**-10 (2001), 574-579.
- (3) 小山浩・功刀信・河野功・李野正明, 自動ランデブ・ドッキング実験の結果(航法誘導制御系の軌道上実証), 宇宙開発事業団会議報告: ETS-VII 「おりひめ」「ひこぼし」実験成果報告会前刷集, (2000-3), 66-72.
- (4) Tillerson, M., Inalhan, G. and How, J. P., Co-ordination and Control of Distributed Spacecraft Systems Using Convex Optimization Techniques, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **12** (2002), 207-242.
- (5) Kaplan, M. H., *Modern Spacecraft Dynamics & Control*, (1976), 109-115, John Wiley & Sons.