歯車形軸継手の歯当たり及び軸角変動用歯面隙間*

箱崎 義英^{*1}, 島地 重幸^{*1}Contact Tooth Bearing and Tooth Gap for Shaft Angle Fluctuation
on Gear CouplingYoshihide HAKOZAKI^{*2} and Shigeyuki SHIMACHI^{*2} Department of Mechanical Engineering, Iwate University,
4-3-5 Ueda, Morioka-shi, Iwate, 020-8551 Japan

Recent demands of the gear coupling are to reduce gear noise that is supposed to be caused by gear tooth gap for shaft angle fluctuation. In generally, large shaft angle increases tooth gap for shaft angle fluctuation. On the same time, load capacity is supposed to decrease. The tooth gap for shaft angle fluctuation is given by the analysis of tooth contact. The conventional analysis is an approximate one and is limited on its precision. An analysis of higher precision is necessary for recent critical demands on the gear coupling. This paper discusses analysis of clearance of matching tooth surface, where the profile of rack tooth surface has a straight line. Contact bearing pattern spreads in the direction to tooth tip and has edge contact. Those are different from the conventional assumptions.

Key Words: Machine Element, Gear, Coupling, Tooth Gap, Contact Tooth Number

1. 緒 言

電気車の電動機軸と車輪駆動軸との間には、歯車形軸継手が用いられている。この歯車形軸継手は、一般にインボリュート歯形を持つ円筒形内歯車と樽形外歯車とで構成されている。軸角変動の片側幅は 5° 前後であるが、近年、さらに大きい軸角に対応できるものが望まれている。

歯車形軸継手で軸角を変動させるためには、軸角ゼロ位置においてバックラッシュに相当する歯面隙間(以下、軸角変動用歯面隙間と呼ぶ)を与えておく必要がある。軸角を大きくするほど、この軸角変動用歯面隙間を大きくする必要がある。しかし、これが大きくなると電気車では振動や騒音が大きくなるため、軸角変動用歯面隙間を出来るだけ小さく設計することになる。現状では、軸角変動に対して必要な軸角変動用歯面隙間の量は、解析的に正確に求められていない。

軸角の大きい継手を設計するとき、もう一つの課題がある。軸角ゼロでのかみ合い歯数は多いが、軸角が大きくなると急激にかみ合い歯数が少なくなり、負荷能力の減少が心配される。歯車形軸継手歯車の形状解析と負荷能力評価については、高井ら⁽¹⁾の報告があるが、それは、当時の一般的な手法である近似解析によ

るものである。

このように、近年の軸角変動幅の増大への要求に伴う、負荷能力向上と振動騒音低減に対応するためには、諸仮定に基づく従来の近似的解析では不十分であり、歯車の歯面隙間状況を精度良く解析することが必要となっている。

本報告は、汎用されている形状の歯車形軸継手歯車対、すなわち、歯面の含軸断面が円弧の樽形外歯車とインボリュート歯形を持つ円筒形内歯車について、接触歯面隙間(歯当たり)および軸角変動用歯面隙間の解析結果を報告する。さらに、この歯車の歯面対は運動学的には点接触するが、解析結果を検証するため、歯面の点接触位置と軸角との関係を求めた結果についても述べる。

2. 接触歯面隙間の解析

図1に円筒形内歯車と樽形外歯車から成る歯車形軸継手を示す。円筒形内歯車は、インボリュート歯形のすぐ歯を持つものとする。また、樽形外歯車は、その含軸断面内の円弧をトレースするようにホブ工具を移動させて製作されるものとする。樽形外歯車の解析では、一般に行われるように、ホブ工具の移動によって歯すじが円弧であるラックが作られるとして解析する。

2-1 接触歯面隙間と歯当たり 点接触歯面に負荷をかけると、弾性変形(いわゆるヘルツ変形)によ

* 原稿受付 2003年9月29日。

*¹ 正員、岩手大学工学部(〒020-8551 盛岡市上田4-3-5)。

E-mail: hako@iwate-u.ac.jp

Fig. 1 Gear coupling

Fig. 2 External gear and rack

り、接触点近傍に広がる面で歯面同士は接触する。接触しあうこの面の広がりやを歯当たりと呼ぶなら、歯当たりは、負荷の大きさ、歯面の相対曲率で代表される歯面間隙間、歯先・歯元の歯面の広がり限界などによって決まる。一般的には、単位負荷に対するこの歯当たり面積が広いほど、歯面の面圧強度についての負荷能力は高くなるので、歯面の負荷能力を評価する目安となる。

ところで、一般的な歯面同士の接触を近似する際に用いられる平面と楕球面の接触について考えると、弾性変形により接触しあう面の広がり形状と、平面と楕球面の等隙間曲線に囲まれる広がり形状は、必ずしも一致しない。しかし、両者は大略的には似ている。

そこで、本考察では、接触歯面間隙間の等隙間曲線に囲まれる面の広がりやを便宜上“歯当たり”と呼ぶことにする。

2.2 ラックの歯面 図2に継手の外歯車とこれを創成するラックの関係を示す。同図において、継手の外歯車軸を Z_p 、その上に原点 O_p を置いた座標系を定める。

$O_p-X_pY_pZ_p$: 空間に固定した座標系

座標軸 X_p に垂直な平面と、軸線 Y_p で接触し、しかもその母線が外歯車軸に直角な方向になるような筒

Fig. 3 Rack tooth surface

面Aを考える。また、その母線に直角な方向に歯すじ線を持ち、しかも歯すじ線に直角な断面の形状が標準ラック形状となるような歯面Bを考え、筒面Aに固着する。そして、この歯面Bを外歯車創成用のラック歯面、筒面Aを筒面ラックのピッチ面、軸線 Y_r をラックの基準線と呼ぶことにする。また、図2に示すように、 b を外歯車歯切りピッチ円半径、 ξ を転位量とする。さらに、座標軸 X_p と軸線 Y_r の交点 O_r を原点とする次の座標系を定める。

$O_r-X_rY_rZ_r$: 空間に固定した座標系

外歯車が θ_p 回転したとき原点 O_r にあったラック上の点は、ピッチ線に沿って点 O_{ro} まで移動する。ラック自体に固定した座標系も定めることにする。

$O_{ro}-X_{ro}Y_{ro}Z_{ro}$: ラックに固定した座標系

また、各座標軸方向の単位ベクトルを i, j, k とする。

ラックの基準線に垂直な平面によるラック面の断面及びラック歯すじ曲線に垂直な平面によるラック面の断面を図3に示す。同図において、ラック歯形上の点 P を表すため諸量を次のように定める。

$O_{rso}-X_{rso}Y_{rso}Z_{rso}$: 歯すじに固定した座標系

R : 円弧歯すじ曲率半径

β : 歯すじ接線と Z_{ro} の成す角

α : ラック歯面圧力角

q : ラック歯形直線の位置

l : ラック歯形方向に測った点 P の位置

θ_p : 創成のために回転する外歯車の回転角

とする。また、点 P は創成運動として回転する外歯車の回転角が θ_p であるときのラック歯形と外歯車の接触点である。

ラックの歯すじ曲線上の点 O_{rso} の位置を表すパラ

メータを s とする. s を座標 Z_{RO} の値, x を座標 X_{RO} の値とする. s での x および点 (s, x) での傾き角 β は

$$x = -R + \sqrt{R^2 - s^2} \quad (1)$$

$$\beta = \tan^{-1}(-s/(R-x)) \quad (2)$$

で与えられる. 従ってラックの歯すじ曲線を表す位置ベクトル r_{RCO} は次式で表される.

$$r_{RCO} = x i + s k \quad (3)$$

座標 $O_{RSO}-X_{RSO}Y_{RSO}Z_{RSO}$ 系内でラック歯面を表す位置ベクトル r_{RSO} は

$$r_{RSO} = -l \cos \alpha i + (q - l \sin \alpha) j \quad (4)$$

となる.

ラック歯形上の点 P は次式で表される.

$$\vec{O_P P} = \vec{O_P O_R} + b\theta_P j + r_{RCO} + R(j, \beta) r_{RSO} \quad (5)$$

但し, $\vec{O_P O_R} = (b + \xi) i$, また記法 $R(a, \theta)b$ は, 任意のベクトル b を単位ベクトル a の回りに任意の角 θ だけ回転させたときのベクトル c を表す. ベクトル c は

$$c = (b \cdot a)a + \{b - (b \cdot a)a\} \cos \theta + (a \times b) \sin \theta \quad (6)$$

で表される.

ラック歯面は, 歯すじ線上の位置を表すパラメータ s と歯形直線上の位置を表すパラメータ l の二つで表されたことになる.

2.3 ラックと外歯車の接触の条件 図4にラックの歯すじ曲線上の点 O_{RSO} を通り, 歯すじ線に垂直な平面内で, ラック歯形と接触点及び外歯車とラックの運動学的転がりピッチ点を示す. 外歯車の転がりピッチ円筒とラックの転がりピッチ平面とが転がり接触する点を C_N とする. ラック歯面の法線は常に, 歯すじ線に垂直な平面内にあり, 歯面法線は運動学的ピッチ点 C_N を通る. 従って歯面上の点 P の位置 l は次式で与えられる.

$$l = (b\theta_P + q) \sin \alpha + \{\xi + (i \cdot r_{RCO})\} \cos \alpha / \cos \beta \quad (7)$$

2.4 基準回転位置における外歯車歯面 創成運動として回転する外歯車の回転角が θ_P であるときのラックと外歯車の接触点 P が分かったので, 外歯車が回転しない基準回転位置での外歯車の歯面は,

$$\vec{O_{RO} P} = R(k, -\theta_P) \vec{O_i P} \quad (8)$$

で表される. パラメータ l を与えると式(7)から θ_P が求まるので, 外歯車歯面はパラメータ l とパラメータ s によって表されたことになる.

Fig. 4 Contact point on the rack tooth profile

Fig. 5 Involute tooth profile of internal gear

この外歯車を軸回りに角 θ_1 回転した外歯車の歯面上の点 P' の位置は

$$r_P = R(k, -\theta_P + \theta_1) \vec{O_i P} \quad (9)$$

で表される. このベクトル r_P は, 外歯車が回転しない基準位置から θ_1 回転したときの外歯車歯面を表す位置ベクトルである.

2.5 内歯車歯面 図5に内歯車軸に垂直な断面内での, 内歯車に固定した座標系におけるインボリュート歯形を持つ内歯車歯面を示す.

$O_G-X_GY_GZ_G$: 空間に固定した座標系

$O_{GO}-X_{GO}Y_{GO}Z_{GO}$: 内歯車に固定した座標系

r_{gs} : 内歯車の基礎円半径

ϵ_s : X_{GO} 軸からインボリュート曲線の始点 S_g までの角度

Fig. 6 External gear reference frame and internal gear reference frame

ϵ : インボリュート曲線上の点 Q を表すパラメータ

θ_2 : 内歯車の回転角

r_{gs} : 内歯車が θ_2 回転した位置で、軸 Z_{G0} からインボリュート始点 S_g に向かうベクトル

軸 Z_{G0} からインボリュート始点に向かうベクトル r_{gs} を与えることと、内歯車の回転角 θ_2 を与えることは同じことである。その内歯車歯面のインボリュート曲線の始点を表す位置ベクトル r_{gs} は次のように表される。

$$r_{gs} = r_{gs} \{ \cos(\epsilon_s + \theta_2) i + \sin(\epsilon_s + \theta_2) j \} \quad (10)$$

内歯車歯面上の点 Q の位置は歯形パラメータ ϵ を用い、次式で与えられる。

$$\overrightarrow{O_G Q} = R(k, \epsilon) r_{gs} \quad (11)$$

$$\overrightarrow{Q' Q} = \epsilon R(k, -\pi/2) \overrightarrow{O_G Q'} \quad (12)$$

$$\overrightarrow{O_G Q} = \overrightarrow{O_G Q'} + \overrightarrow{Q' Q} \quad (13)$$

2.6 外歯車歯面と内歯車歯面の隙間 Δ

図 6 に外歯車座標系 $O_P-X_P Y_P Z_P$ と内歯車座標系 $O_G-X_G Y_G Z_G$ を示す。外歯車軸 Z_P と内歯車軸 Z_G が軸角 δ で交わるものとする。また軸 X_P と軸 X_G は一致しているものとする。

内歯車座標系で見た外歯車歯面上の点 P は

$$R(i, \delta) r_p \quad (14)$$

であり、外歯車歯面を表す位置ベクトル r_p の内歯車座標系への射影を表すベクトル r_{pg} は

$$r_{pg} = R(i, \delta) r_p - k \{ k \cdot R(i, \delta) r_p \} \quad (15)$$

となる。また、歯車軸の交点 O_P 、 O_G からこの平面までの距離を h とすると

$$h = \{ k \cdot R(i, \delta) r_p \} \quad (16)$$

となる。

図 7 において、内歯車軸に垂直な平面内で点 P から内歯車歯面におろした垂線の足を Q 、その垂線が内歯

Fig. 7 Distance from external gear tooth surface to internal gear tooth surface

Fig. 8 Length along the involute curve

車の基礎円に接する点を Q' とする。内歯車軸との交点 O_{GZ} からインボリュート曲線の始点 S_g に向かうベクトル r_{gs} を角度 ϵ 回転させると接点 Q' に向かうベクトルになるが、このベクトルとベクトル $\overrightarrow{Q' P}$ は直交するから、

$$(\overrightarrow{Q' P} \cdot \overrightarrow{O_{GZ} Q'}) = \{ (r_{pg} - R(k, \epsilon) r_{gs}) \cdot R(k, \epsilon) r_{gs} \} = 0 \quad (17)$$

が得られる。この式を変形し、

$$\{ r_{pg} \cdot R(k, \epsilon) r_{gs} \} = r_{gs}^2 \quad (18)$$

が得られる。ベクトルの回転についての演算子式 (6) を適用し、

$$(r_{pg} \cdot k \times r_{gs}) \sin \epsilon + (r_{pg} \cdot r_{gs}) \cos \epsilon - r_{gs}^2 = 0 \quad (19)$$

を得る。この式は

$$A \sin \epsilon + B \cos \epsilon + C = 0 \quad (20)$$

の形を持ち、これを満たす ϵ は

$$\tan \epsilon/2 = (-A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}) / (C - B) \quad (21)$$

となるが、 $\epsilon > 0$ となるように複号を選んで、歯面の隙間 Δ は

$$\Delta = \overrightarrow{QQ'} - \overrightarrow{PQ'} = \epsilon \mathbf{r}_{gs} - \sqrt{\{r_{PG} - R(\mathbf{k}, \epsilon) \mathbf{r}_{gs}\}^2} \quad (22)$$

で求められる。

内歯車歯面上で隙間 Δ を表示するため、点 Q の位置を求めておくことにする。点 Q の内歯車軸方向の位置は h で与えられている。これと直交する方向、すなわち内歯車のインボリュートの起点 S_g から歯形曲線に沿って測定すると、図 8 に示すように、点 Q までの距離 D は、 $dD = r_{gs} \epsilon d\epsilon$ を積分して、

$$D = r_{gs} \epsilon^2 / 2 \quad (23)$$

である。

外歯車の歯面上の点 P を表すパラメータは l, s であり、その回転角は θ_1 である。また、内歯車の回転角は θ_2 であり、これらは任意に与えることが出来る。これらを与えれば、点 P から内歯車歯面上に下ろした垂線の足 Q の位置はパラメータ h, D で表され、その点での隙間 Δ が得られる。

3. 歯車の接触状況

3.1 $5\mu\text{m}$ 歯当たりと $5\mu\text{m}$ 歯当たり面積 A_c 歯面接触における弾性変形の程度や光明丹による歯当たり検査などを念頭に置き、あくまで、参考までに、切りの良い数値として $5\mu\text{m}$ の隙間を定め、接触点近傍での歯面隙間が $5\mu\text{m}$ 以下の部分、すなわち、等隙間値が $5\mu\text{m}$ の歯当たりを“ $5\mu\text{m}$ 歯当たり”と呼ぶことにする。また、接触点近傍の歯面隙間が $5\mu\text{m}$ 以下となる計算点に対して、内歯車歯面上での上下左右の間隔 $\delta h, \delta D$ から微小面積を求め、それらを歯車全周に対して累積することで“ $5\mu\text{m}$ 歯当たり面積 A_c ”を算定する。

3.2 かみ合い歯数 Z_c 剛体の歯面同士は点で接触し、歯面の広がり内にある同時接触点の個数を計算できる。しかし、現実の歯面は弾性変形のため接触している。これを無視することは出来ない。そこで、目安を得ると言う意味で、 $5\mu\text{m}$ 歯当たりを持つ歯面対の個数を累積し“ $5\mu\text{m}$ かみあい歯数 Z_c ”とする。

3.3 軸角変動用歯面隙間量 C_n 歯車形軸継手では、軸角 δ を与えたとき歯面が接触する場所は、両車軸の共通法線の近傍で点接触する。

軸角 δ がゼロの位置で接触しあっているものとする。この歯車相対回転位置を保持したまま、軸角を δ とすると、両車軸の共通法線の近傍にある歯面同士は食い込みあい、 Δ は負の値として求まる。内歯車歯面はインボリュート曲面である。その平行曲面もインボ

Table 1 Main dimensions of example

Module (mm)	4
Pressure angle (deg)	20
Number of teeth	40
Face width (mm)	20
Pitch circle diameter (mm)	160
Amount of addendum modification	0

Fig. 9 Equi-gap contact pattern ($R = 38\text{mm}, \delta = 0^\circ$)

Fig. 10 Equi-gap contact pattern ($R = 38\text{mm}, \delta = 5^\circ$)

リュート曲面であり、この平行曲面と外歯車歯面が点接触しあう形態となる。これらの歯面同士の点接触位置は、歯面が最も食い込む位置、 Δ が最小となる位置として求まる。軸角変動用歯面隙間は、全周歯における歯面同士食い込み量の最大値 ($-\Delta_{min}$) に対応している。全周歯については、式 (9) (10) の θ_1, θ_2 をそれぞれ歯のピッチ角ずつ回転させれば求まる。実際には、表歯面、裏歯面でそれぞれ ($-\Delta_{min}$) の隙間が必要であり、軸角変動用隙間 C_n は ($-2\Delta_{min}$) として与えられる。

Fig. 11 Contact tooth number

Fig. 12 5μm bearing area A_c ($R = 38\text{mm}$) Fig. 13 Transition of bearing area on rotation of one tooth pitch ($R = 38\text{mm}$, $\delta = 4^\circ$)Table 2 5μm bearing area A_c (mm^2)

δ	R (mm)		
	35	38	40
0°	328.1	347.8	353.0
3°	28.2	28.1	28.1
5°	14.1	13.8	10.2

3.4 数値計算例 数値例で用いるパラメータを表1に示す。

図9及び10に歯すじ曲率半径 $R = 38\text{mm}$ の場合の軸角 δ が 0° および 5° における歯面等隙間パターンを示す。図10は歯車の回転における歯面等隙間パターンの推移である。まず、図10上のように歯先部で接触する。そしてピッチ角分回転した後のパターンが図10中であり、さらに回転し図10下のように歯元部で接触する。5μm 歯当りに注目すると、

Fig. 14 Tooth gap for shaft angle fluctuation

- 歯車形継手における5μm 歯当りは、 $\delta = 0^\circ$ では、歯たけ方向に長く伸びる。
- 軸角が大きくなると歯幅端に移る。
- 歯面隙間ゼロ位置（接触点）は、歯車の回転に伴い、歯たけ方向に移動する。

高井ら⁽¹⁾の報告では、軸角にかかわらず、軸角 0° の場合のような5μm 歯当りを仮定しているが、軸角 5° 程度に大きくなると、5μm 歯当たりパターンは従来の仮定とは大きく異なり、点接触が生じているとした接触評価をしなければならないことが分かる。

図11に5μm かみ合い歯数 Z_c を示す。軸角が 1° で急激に少なくなっているが、歯すじ曲率半径の影響は小さいことがわかる。

図12に歯すじ曲率半径を $R = 38\text{mm}$ とした場合のそれぞれの軸角 δ における5μm 歯当たり面積 A_c を示す。軸角 1° で5μm 歯当たり面積 A_c が急激に減少していることがわかる。これは図11から分かるように5μm かみ合い歯数 Z_c が軸角 1° で約半分となるためである。また、最大軸角で5μm 歯当たり面積 A_c が最小になる。

図13には歯のピッチ角分の回転の5μm 歯当たり面積 A_c の変化を示す。歯車を回転させると5μm 歯当たり面積 A_c は、5%程度は変動すると考えておかなければならない。

表2に歯すじの曲率半径を変えたときの5μm 歯当たり面積 A_c を示す。歯すじ曲率半径が大きい程、軸角増大に伴う5μm 歯当たり面積 A_c の減少幅が大きいことがわかる。

図14に軸角変動用歯面隙間量 C_n と軸角 δ の関係を示す。歯すじの曲率半径が $R = 38\text{mm}$ については、軸角 5° の位置で利用する場合には、軸角変動用歯面隙間 C_n は約0.76mm必要であることがわかる。加工精度への配慮だけでなく、理論的にも大きな軸角変動用歯面隙間 C_n が必要であることが分かる。

また、歯すじ曲率半径 R を小さくすると軸角変動用歯面隙間 C_n はわずかながら小さくなることがわかる。

Fig. 15 The contact tooth normal related to the internal gear axis and the external gear axis

Fig. 16 Pose of the contact tooth normal against the internal gear axis and the base circle

4. 歯面の接触法線

本章では、運動学的解析によって、歯面の点接触位置の変化と、前章までの歯面隙間解析結果とが整合するかを検証することにした。

内歯車軸 Z_G 、外歯車軸 Z_P 、両車軸の共通垂線 $k \times \xi_G$ 、歯面の接触法線 n_p の位置、姿勢などの関係を図 15, 16 に示す。両車軸の共通垂線に垂直な平面への接触法線の投影位置を示す距離 s 、および内歯車軸に垂直な平面への投影姿勢を示す角度 $(90^\circ - \alpha_e)$ の二つの量によって接触法線の位置を表す。

解析の詳細は付録に示す。

図 17 に歯すじの円弧半径 R をパラメータとし、中心からの距離 s に対する δ と $(90^\circ - \alpha_e)$ の関係を示す。内歯車軸方向への射影で見ると、接触法線は、円弧半径 R が小さくなると、 $(90^\circ - \alpha_e)$ が急激に大きくなる。このことは、歯面の点接触位置が両車軸の共通垂線上の歯面上の点から離れることであり、歯面の点接触位置が変化するという歯面の隙間解析結果とも整合している。

Fig. 17 Inclination angle α_e of contact tooth normal related to the shaft angle δ and the radius R of rack tooth trace curve

5. 結 言

平面ラックを円筒状に丸めたような円筒形のラックにより外歯車が創成され、これとインボリュート内歯車がかみ合うとして解析した結果、

1. 従来の歯面負荷強度計算では $5\mu\text{m}$ 歯当たりは、円筒と平面の接触のように、軸角によらず歯たけ方向に一樣な接触幅でのびているとされていた。しかし、解析の結果、軸角が 5° 程度になると、球面と平面の接触に近い $5\mu\text{m}$ 当たりとなることが分かった。
2. $5\mu\text{m}$ かみ合い歯数 Z_c は、軸角が大きくなると、 1° から 2° で急激に小さくなり、しだいに一定値に近づく。また、 $5\mu\text{m}$ かみ合い歯数 Z_c に対する歯すじ曲率の影響は小さい。
3. 軸角変動用歯面隙間 C_n は、軸角に対して二乗関数的に大きくなり、ピッチ円直径が約 160mm の継手に対して、軸角が 5° では 0.7mm から 0.8mm 程度となり、加工精度への配慮だけでなく、理論的にも大きな軸角変動用歯面隙間 C_n が必要であることが分かった。
4. インボリュート系の歯面を持つ歯車形継手では、空間に固定された一直線上で両歯面が点接触する。その直線（接触歯面法線と一致）の位置を解析した結果、軸角や歯すじ曲率により、その位置は変化し、一定でないことが分かった。

文 献

- (1) 高井昭, 斎田伸幸, 保延誠, 高西忠司, 日立評論, 42-8, (1960), 54-59

付 録

歯面隙間の数値解析の結果、内歯車軸方向に投影した歯面の点接触位置は両車軸の共通垂線の近傍にあるが、軸角を変化させると、その位置も変化することが注目された。そこで、運動学的解析によって、歯面の点接触位置の変化と、前章までの歯面隙間解析結果とが整合するかを検証することにした。

内歯車軸、外歯車軸、両車軸の共通垂線、接触法線の関係を示す図 15, 16 において、内歯車軸と外歯車軸の共通垂線 $\mathbf{k} \times \boldsymbol{\xi}_G$ に対する接触法線 $\mathbf{n}_p$ の傾き α_ϵ について考える。

内歯車歯面を創成するラックを内歯車・ラック、章 2 に示した外歯車を創成するラックを円筒ラック、さらに内歯車・ラックのような平らな形状のラックを平ラックと、便宜上、呼ぶことにする。以下では、内歯車・ラックと平ラックは同形であるとする。また、内歯車・ラックと平ラックには、左右両側面の歯面があるが、そのうちの片側にのみ注目する。さらに、力のバランスに注意すれば分かるように、また現実にもそうであるが、内歯車軸と外歯車軸は交わりあっている。

図 3 の上図は円筒ラックの歯すじに垂直な断面 $\mathbf{X}_{\text{RSO}} - \mathbf{Y}_{\text{RSO}}$ のラック歯形線 (CL) を示すが、この線 (CL) で円筒ラック歯面と接触する平ラック歯面を考えることができる。内歯車軸に対して外歯車軸が δ 傾いた位置で、ラックの片側歯面に注目すると、隣り合う平面状歯面の間隔は一定であるので、平ラック歯面を内歯車・ラック歯面に重ね合わせること出来る。平ラックと円筒ラックの接触線 (CL) 上の歯面で外歯車歯面を創成するとき、歯面の接触法線は $\mathbf{X}_{\text{RSO}} - \mathbf{Y}_{\text{RSO}}$ 平面内にあり、しかも外歯車と内歯車の相対運動の瞬間軸 C を通る。平ラック歯面法線方向はラックが並進運動しても空間内では一定であるから、接触法線は一本であり、しかも空間内に固定される。

原点 O_p で内歯車軸 $\boldsymbol{\xi}_G(Z_G)$ と外歯車軸 $\mathbf{k}(Z_p)$ は交わるものとする。

接触法線と両歯車軸の位置関係を求めることにする。解析は外歯車の解析に用いた座標系内で考えることにする。まず、外歯車歯面について考える。図 4 において、面法線は $\mathbf{n}_p$ は以下のように表される。

$$\mathbf{n}_p = \cos\beta \sin\alpha \mathbf{i} - \cos\alpha \mathbf{j} + \sin\beta \sin\alpha \mathbf{k} \quad (24)$$

図 15 において内歯車歯面が接触条件を満たすには法線が、内歯車の基礎円筒と接する必要がある、その接点を T とする。ピッチ点 C_N から点 T までの距離を l_T とし、原点 O_p から点 T に向かうベクトルは

$$\overrightarrow{O_p T} = \overrightarrow{O_p C_N} - l_T \mathbf{n}_p \quad (25)$$

$$\overrightarrow{O_p C_N} = b\mathbf{i} + \{s - (\xi - R + \sqrt{R^2 - s^2}) \tan\beta\} \mathbf{k} \quad (26)$$

また、 $\mathbf{n}_p$ は内歯車の面法線でもあるから

$$\boldsymbol{\xi}_G \cdot \mathbf{n}_p = 0. \quad (27)$$

この条件を満たすように $\boldsymbol{\xi}_G$ を、変数 γ を用いて次のように表しておく。

$$\mathbf{A} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}_p / \sqrt{(\mathbf{k} \times \mathbf{n}_p)^2} \quad (28)$$

として

$$\boldsymbol{\xi}_G = R(\mathbf{n}_p, \gamma) \mathbf{A}. \quad (29)$$

点 T から内歯車軸に下ろした垂線の足を G とし、原点 O_p からの距離を m_G とする。このとき距離 GT は内歯車の基礎半径 r_G である。

$$\overrightarrow{GT}^2 = (\overrightarrow{O_p C_N} - l_T \mathbf{n}_p - m_G \boldsymbol{\xi}_G)^2 = r_G^2 \quad (30)$$

また、

$$\overrightarrow{GT} \cdot \boldsymbol{\xi}_G = 0, \quad \overrightarrow{GT} \cdot \mathbf{n}_p = 0, \quad \mathbf{n}_p \cdot \boldsymbol{\xi}_G = 0 \quad (31)$$

より、

$$l_T = (\mathbf{n}_p \cdot \overrightarrow{O_p C_N}), \quad m_G = (\boldsymbol{\xi}_G \cdot \overrightarrow{O_p C_N}). \quad (32)$$

従って、式 (29) より

$$(\boldsymbol{\xi}_G \cdot \overrightarrow{O_p C_N}) = \pm \sqrt{\overrightarrow{O_p C_N}^2 - (\mathbf{n}_p \cdot \overrightarrow{O_p C_N})^2 - r_G^2} \equiv C_C \quad (33)$$

$\boldsymbol{\xi}_G$ が変数 γ を用いて式 (29) のように表されるので、式 (20) の形の式が得られる。いま、

$$A \sin \gamma + B \cos \gamma + C = 0$$

$$A \equiv (\overrightarrow{O_p C_N} \cdot \mathbf{n}_p \times \mathbf{A})$$

$$B \equiv (\overrightarrow{O_p C_N} \cdot \{\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_p) \mathbf{n}_p\}) \quad (34)$$

$$C \equiv (\overrightarrow{O_p C_N} \cdot \mathbf{n}_p)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_p) - C_C$$

とすると、式 (21) の関係から γ を求めることが出来る。これを式 (29) に代入すれば、 $\boldsymbol{\xi}_G$ が定まる。

内歯車軸と外歯車軸の成す角 δ は

$$\cos \delta = (\boldsymbol{\xi}_G \cdot \mathbf{k}) \quad (35)$$

また、図 16 において両車軸の共通垂線 $\mathbf{k} \times \boldsymbol{\xi}_G$ に対する接触法線 $\mathbf{n}_p$ の傾き α_ϵ は

$$\cos \alpha_\epsilon = (\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k} \times \boldsymbol{\xi}_G / \sqrt{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}_G}) \quad (36)$$

で与えられる。