ばね剛性 0 の衝突振動系における対称周期解の厳密な大域表現*
(Cesàro の総和法による導出)今 村 仁*¹Exact Global Representation of All Symmetric Periodic Solutions
for Zero Stiffness Impact Oscillator
(Derivation by Cesàro's Summation Method)Hitoshi IMAMURA*²*² Department of Mechanical Engineering, Ibaraki University,
4-12-1 Nakanarusawa, Hitachi-shi, Ibaraki, 316-8511 Japan

A new analytical method to derive exact global form of all symmetric periodic solutions appearing in one degree of freedom forced zero stiffness impact oscillator is proposed. The author has been proposed a method to obtaining general solutions globally by linearize piecewise linear system to convert it's nonlinearity to virtual external force, and applying the principle of superposition for equivalent exact linearized system. According to this method, the function form of periodic solutions are represented by superposition of stationary periodic solution for linear system and finite number of periodic functions which are constructed by infinite number of responses caused by converted nonlinearity. However, since this infinite summation becomes a divergent series for zero-stiffness case, the value of this series is unknown. In order to overcome this difficulty, we formerly proposed a calculation method of these divergent series using Cesàro's summation, a kind of technique to extract physically reasonable finite value of divergent series. In this paper, we extend this formerly derived result to determine global form of all symmetric periodic solutions. The value of divergent series is calculated as (C.1) Cesàro's summation for viscous damped case, and (C.2) summation for undamped case, respectively. The validation of proposed method is confirmed by numerical example.

Key Words: Nonlinear Vibration, Impact Oscillator, Global Representation, Pseudo-Feedback Form, Zero Stiffness, Symmetric Periodic Solution, Divergent Series, Cesàro's Summation

1. 緒 言

区分線形系は、機械・構造物系に内在する非線形特性の基本的なモデルであり、各種プラントの耐震設計や精密機器の微細振動の解析でも重要な位置を占めており、これまでに多数の研究がなされている。しかしながら、系を構成する各線形領域の解を接続するタイミングである“切り換え時間”が超越方程式によって陰的に規定されるという固有の困難が存在する⁽¹⁾⁽²⁾。ため、その理論解析は十分になされていなかった。著者はこの問題を回避する方法として、系に内在する非線形性をそれと等価な仮想的な外力とみなす“擬フィードバック形式”による解析法を提案し⁽³⁾、一般解やその重要なクラスをなす周期解を含む定常解が、外力に変換された非線形性により励起される線形系の解を

厳密に求めることにより大域的に導出できることを、幾つかの基本的な系の場合に明らかにしてきた⁽⁴⁾⁽⁵⁾。ところが、この計算法(“フィードバック重畳法”と呼ぶ)では、ばね剛性が 0 の場合に収束しない関数項級数が現れ、その評価法が明らかでなかった⁽⁶⁾。そこで、フィードバック重畳法をばね剛性 0 の領域を含むより一般の区分線形系へ拡張するために、まず簡単な系の場合について検討を行った。前報では、質量・ダンパー系の強制励振による衝突振動問題を取り上げ、対称周期解の最も基本的な場合として外力の n 周期間に左右のストッパーと交互に 1 回づつ衝突する対称基本周期解を、発散級数の計算法の一つである Cesàro の総和法を用いて厳密かつ大域的に求めた⁽⁶⁾。またこの方法により、最も簡単な不連続区分線形系である予圧縮ばね系⁽³⁾の復元力項が 0 となる場合に相当する質量・ダンパー系について、対称基本周期解を厳密かつ大域的に求めた。本論文では、この計算法を一般化し、ばね

* 原稿受付 2004 年 4 月 12 日。

*¹ 正員、茨城大学工学部機械工学科(〒316-8511 日立市中成沢町 4-12-1)。

E-mail: imamura@mech.ibaraki.ac.jp

剛性が 0 となるパラメータ領域における衝突振動系に発生し得るすべての対称周期解の関数形を決定する方法を明らかにする。そして、対称周期解の導出過程で現れる収束しない無限級数は Cesàro の総和法を用いて厳密に評価でき、粘性減衰が存在する系では Cesàro の (C.1) 総和により、粘性減衰 0 の系では Cesàro の (C.2) 総和により計算できることを明らかにする。あらゆるタイプの対称周期解は、Cesàro の総和法によって導出された値を用いて、線形系の定常周期解である周期関数と、非線形性による影響を集約したある基本的な周期関数を衝突時刻だけシフトしたものの積構造によって大域的に表される。

2. 系の記述と問題提起

2.1 物理モデルと運動方程式 本論文では、図 1 に示す物理モデルで表される強制振動系で、特にばね定数 k が 0 となる場合を考察する。質点 m と変位を拘束するストッパー（以後“衝突境界”と呼ぶ）とが等間隔になる位置に座標原点をとり、 $A \cos \omega_f \tau$ を外力、無次元化のために便宜的に導入する仮想的なばねのばね定数を K とすると、以下の無次元化

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Km}}, \quad \beta = \frac{k}{K}, \quad \omega = \frac{\omega_f}{\sqrt{K/m}}, \quad t = \sqrt{\frac{K}{m}} \tau$$

と以下のスケール変換

$$x = \frac{X}{G}, \quad \eta = \frac{A}{KG}, \quad (1a)$$

$$x = \frac{KX}{A}, \quad \gamma = \frac{KG}{A} \quad (1b)$$

により、この系は以下の運動方程式で特に $\beta = 0$ としたもので記述される。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x = \eta \cos(\omega t); \quad |x| < \gamma \quad (2a)$$

$$\dot{x}(t^+) = -r\dot{x}(t^-); \quad |x| = \gamma \quad (2b)$$

ここで、 $(\cdot) \equiv \frac{d}{dt}$ であり、衝突直前・直後の時刻をそれぞれ t^- , t^+ と表記する。また、 r ($0 < r < 1$) は質点を $|x| \leq \gamma$ の範囲に拘束する衝突境界との衝突瞬間における反発係数である。式(1a)のスケール変換によれば $\gamma = 1$ に、式(1b)のスケール変換によれば $\eta = 1$ にできるので、式(2)は両者を包含する表現である。

2.2 接合法による周期解求解過程と原理的制約 衝突振動系(2)は衝突と衝突の間では線形系と等価となるので、任意の衝突時刻 t_i^- ($i \in \mathbb{Z}$) から次の衝突時刻 t_{i+1}^- における解は、区分的な厳密解

$$\begin{aligned} x(t; x(t_i), \dot{x}(t_i^+)) &= \mathcal{L}(t - t_i; x(t_i), \dot{x}(t_i^+)) \\ &\equiv \mathcal{L}(t - t_i) \{x(t_i) - \mathcal{L}(t_i)\} \\ &+ \mathcal{F}(t - t_i) \{\dot{x}(t_i^+) - \dot{\mathcal{L}}(t_i)\} + \mathcal{L}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Fig. 1 Physical model of zero stiffness two side impact oscillator

Table 1 State transfer functions $\mathcal{T}(t)$ and $\mathcal{F}(t)$ for $\beta = 0$

damping factor	$\mathcal{T}(t)$	$\mathcal{F}(t)$
$\zeta \neq 0$	1	$\frac{1 - e^{-2\zeta t}}{2\zeta}$
$\zeta = 0$	1	t

を、衝突時刻ごとに接続してゆく“接合法”と呼ばれる解法により求めることができる⁽¹⁾⁽²⁾。ここで、 $\mathcal{T}(t)$, $\mathcal{F}(t)$ は線形システムの状態推移関数であり、特にばね剛性が 0 の場合には表 1 で表される。また、 $\mathcal{L}(t)$ は線形システムの周波数応答関数であり、次式で表される。

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\eta}{\sqrt{(\beta - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}} \cos\left(\omega t + \tan^{-1} \frac{-2\zeta\omega}{\beta - \omega^2}\right) \quad (4)$$

接合法は直接的な解法であるので、区分線形系の周期解の代表的な導出法としてこれまで多用されてきている。外力の n 周期間に左右の衝突境界と順序を問わず ℓ 回衝突する周期 $T = 2\pi n/\omega$ の周期解を $\mathcal{X}^n(t)$ と表記すると、衝突時刻では以下の条件が満たされなければならない。

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}; x(t_i), \dot{x}(t_i^+)) &= x(t_{i+1}), \\ -r\dot{x}(t_{i+1}; x(t_i), \dot{x}(t_i^+)) &= \dot{x}(t_{i+1}; x(t_{i+1}), \dot{x}(t_{i+1}^+)) \\ |x(t_i)| &= \gamma \quad (0 \leq i \leq \ell - 1) \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)を満たす衝突時刻 $t_0, \dots, t_{\ell-1}$ を求めることができれば、それを区分的な厳密解に代入することにより、これらを接続したものとして周期解が求められたことになる。しかしながら、衝突時刻 $t_0, \dots, t_{\ell-1}$ ($t_0 = t_0 + T$) は一般には数値的にしか求めることができず、 $\ell = 2$ で左右の衝突境界と交互に 1 回づつ衝突する最も基本的な対称周期解（対称基本周期解と呼ぶ）の場合にしか衝突時刻を厳密に求められない。また、周期解を実現する接続条件が求められるのみであるので、このようにして選ばれた初期値を持つ区分的な厳密解(3)が

衝突ごとにつながるという以上に、周期解の時間領域における構造を大域的には規定できない。さらには、個別の区分的な厳密解は、あくまで超越的に規定される衝突時刻をパラメータとする“線形システム”の“一般解”であるので、それらを衝突ごとに接続した表現には、周期解を構成するために必要十分な成分以外の冗長な成分が含まれている。

2.3 対称周期解の定数項の決定 接合法の有する前述したような原理的制約を克服するために、著者らは“擬フィードバック形式”と呼ばれる等価な自己参照システムに系を書き換えることにより、周期解の関数構造を大域的に導出する方法(“フィードバック重畳法”と呼ぶ)を提案した⁽⁴⁾。この解析法では、衝突振動系の一般解は、衝突の影響をオミットした線形システム(“基底線形システム”と呼ぶ)の一般解と衝突による非線形性に起因して発生するインパルス応答(“擬フィードバック応答”と呼ぶ)の系列との和によって次式のように大域的に表記できる⁽⁵⁾。

$$x(t; x(t_0), \dot{x}(t_0^-)) = u(t - t_0) \mathcal{L}(t - t_0; x(t_0), \dot{x}(t_0^-)) - (1+r) \sum_{i=0}^{m-1} u(t - t_i) \mathcal{F}(t - t_i) x(t_i^-) \quad (6)$$

ここで $u(t)$ は、次式

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (7)$$

で定義される単位ステップ関数である。また、 $t_i (i \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ は整数の集合) を、解が $|x(t_i)| = \gamma$ となる衝突時刻の系列の特定の実現値とする。式(6)の初期値を無限の過去に移行したとき、解が無限の未来まで有界なまま定常的に衝突し続けるならば、それは定常解(stationary solution)であると考えられる。初期値のこのような無限の過去への移行操作の結果、基底線形システムの応答はその定常成分である $\mathcal{S}(t)$ に置き換えられ、非線形性による影響を表す擬フィードバック応答列の和は定常的なインパルス応答の無限和となる。著者らはこのような考え方で、ばね剛性が 0 でない場合におけるカオスを含む全ての定常解($\mathcal{X}(t)$ と表記する)が次式のように大域的に表されることを明らかにした⁽⁵⁾。

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{S}(t) - (1+r) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u(t - t_i) \mathcal{F}(t - t_i) \mathcal{X}(t_i^-) \quad (8)$$

周期解は式(8)で衝突時刻の系列が周期的となる特別な場合に帰着する。

ところが、系(2)の極限 $\gamma \rightarrow +\infty$ により得られる線形系では、ばね剛性 β が 0 となる場合、一般解には以

下に示すように初期変位に依存する不定性を有する。ばね剛性 0 の線形系で、 $\zeta \neq 0$ のときの一般解は

$$x(t; x(t_0)) = \{x(t_0) - \mathcal{S}(t_0)\} + \frac{1 - e^{-2\zeta(t-t_0)}}{2\zeta} \{\dot{x}(t_0) - \dot{\mathcal{S}}(t_0)\} + \mathcal{S}(t) \quad (9)$$

となるので、定常周期解が存在するためには、式(9)の右辺第 2 項の指数的に発散する成分は 0 でなければならない。したがって、定常周期解の初期速度に関して次式が成り立つ。

$$\dot{x}(t_0) = \dot{\mathcal{S}}(t_0) \quad (10)$$

同様に、 $\zeta = 0$ のとき一般解は

$$x(t; x(t_0)) = \{x(t_0) - \mathcal{S}(t_0)\} + (t - t_0) \{\dot{x}(t_0) - \dot{\mathcal{S}}(t_0)\} + \mathcal{S}(t) \quad (11)$$

となるので、右辺第 2 項の 1 次的に発散する成分が 0 でなければならないことから、初期速度に関し式(10)と同じ条件が得られる。これらのことから、ばね剛性 0 の線形系の定常周期解は、次式のように変位に不定性を有することがわかった。

$$x(t; x(t_0)) = x(t_0) - \mathcal{S}(t_0) + \mathcal{S}(t) \quad (12)$$

γ が有限である衝突振動系(2)の場合にも、ばね剛性 β が 0 のとき一般解(6)から定常解を導出する過程で同様の変位の不定性の影響が現れる可能性がある。無限の過去にある不定性の無限時間経過後である現在への影響を考慮に入れなければならない。そこで、最も基本的なケースとして、以下の反対称性条件を満たす周期解(以後、慣例に従って対称周期解と呼ぶものとし、 $\mathcal{X}_{2m}^n(t)$ と表記する)を考察する。

$$t_{m+i} = t_i + \frac{T}{2} \quad (13a)$$

$$\dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_{m+i}^-) = -\dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (0 \leq i \leq m-1) \quad (13b)$$

変位の不定性項を $\mathcal{C}$ と表記すると、対称周期解は形式的に次式のように表される。

$$\mathcal{X}_{2m}^n(t) = \mathcal{C} + \mathcal{S}(t) - (1+r) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t - t_i - kT) \times \mathcal{F}(t - t_i - kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (14)$$

式(14)を解の半周期シフトすると

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{2m}^n\left(t - \frac{T}{2}\right) &= \mathcal{C} - \mathcal{S}(t) \\ &+ (1+r) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t - t_i - kT) \\ &\times \mathcal{F}(t - t_i - kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (15)$$

対称周期解では式(14)と(15)は絶対値が等しく符号が反対でなければならないので、不定性項 ψ は0であることが結論できる。したがって、ばね剛性 $\beta = 0$ の場合には、対称周期解は次式のように変位の不定成分を持たない形式で大域的に表現できることがわかった。

$$\mathcal{X}_{2m}^n(t) = \mathcal{S}(t) - (1+r) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) \times \mathcal{F}(t-t_i-kT) \mathcal{X}_{2m}^n(t_i^-) \quad (16)$$

2.4 フィードバック重畳法による周期解の導出過程に現れる収束しない無限和 ばね剛性 β が0となるパラメータ領域での対称周期解 $\mathcal{X}_{2m}^n(t)$ の導出は、式(16)の右辺に現れる2重関数項級数を解析的に評価する問題に帰着した。先に提案したフィードバック重畳法は、式(16)の k と i に関する和の順序を入れ換えて解析的に評価することにより、周期解の時間関数形を厳密に導出するものであった⁽⁴⁾⁽⁵⁾。ところが $\beta = 0$ となるパラメータ条件では、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \mathcal{F}(t-t_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta}; & \zeta \neq 0 \\ +\infty; & \zeta = 0 \end{cases} \quad (17)$$

となるので、式(16)の右辺第2項で表される衝突の発生ごとに生成される擬フィードバック応答の総和に関する以下の極限の収束性を吟味しなければならない。

$$-(1+r) \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=\ell}^{+\infty} \sum_{i=j}^{2m-1+k} u(t-t_i-kT) \times \mathcal{F}(t-t_i-kT) \mathcal{X}_{2m}^n(t_i^-) \quad (18)$$

$t = t_0 + kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)での指数関数的に変動する離散系列は j に依存して異なった値をとるので、式(18)は普通の意味では収束しない⁽⁶⁾。したがって、式(16)における k と i の総和の順序を入れ換え、 k に関する和を先に求める先に提案した計算法⁽⁴⁾⁽⁵⁾は、 $\beta = 0$ の場合にはそのままでは適用できない。物理的に意味を持つ解ではこの総和は有限確定でなければならないので、収束しない関数項級数から有界な値を如何にして抽出するかが問題となる。

3. Cesàro の総和法による対称周期解の導出

本節では、粘性減衰の有無に応じて式(16)の二重関数項級数を Cesàro の総和法を用いて計算する方法を示し、その結果を用いて対称周期解の厳密な関数形を求める。収束無限級数は Cesàro の総和法でも同じ値に収束するので、以下では計算の簡略化のために式(16)を収束無限級数と非収束無限級数の和に分解し、後者についてのみ Cesàro の総和法を適用する。

3.1 $\zeta \neq 0$ における対称周期解 $\zeta \neq 0$ の場合、式(16)は次式のように書き換えられる。

$$\mathcal{X}_{2m}^n(t) = \mathcal{S}(t) - \frac{1+r}{2\zeta} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) \mathcal{X}_{2m}^n(t_i^-) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) e^{-2\zeta(t-t_i-kT)} \mathcal{X}_{2m}^n(t_i^-) \right\} \quad (19)$$

ここで衝突時刻と衝突速度には、反対称性条件(13)が成り立っている。以下では、式(19)の右辺 $\{ \}$ 内の総和項を評価する。まず、指数関数の周期的シフトを含む $\{ \}$ 内の第2項の無限和は、 k と i に関する和の順序を交換できるので

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) e^{-2\zeta(t-t_i-kT)} \mathcal{X}_{2m}^n(t_i^-) \\ &= \sum_{i=0}^{2m-1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t-t_i-kT) e^{-2\zeta(t-t_i-kT)} \right\} \mathcal{X}_{2m}^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (20)$$

と書き換えられる。式(20)の右辺の i を固定し k に関する和を1周期間にわたって評価すると

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t-t_i-kT) e^{-2\zeta(t-t_i-kT)} \Big|_{t \in [t_0, t_0+T]} \\ &= \chi_{[t_0, t_i]}(t) \frac{e^{-2\zeta(t-t_i+T)}}{1-e^{-2\zeta T}} + \chi_{[t_i, t_0+T]}(t) \frac{e^{-2\zeta(t-t_i)}}{1-e^{-2\zeta T}} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $\chi_{[a,b]}(t)$ は次式で定義される特性関数である。

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & a \leq t \leq b \\ 0 & t < a, b < t \end{cases} \quad (22)$$

式(21)を周期拡張することにより、式(20)の右辺の k に関する $\{ \}$ 内の和は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t-t_i-kT) e^{-2\zeta(t-t_i-kT)} \\ &= \frac{e^{-2\zeta(t-t_i-T \lfloor \frac{t-t_i}{T} \rfloor)}}{1-e^{-2\zeta T}} \end{aligned} \quad (23)$$

ところが、単位ステップ関数の周期的シフトを表す式(19)右辺 $\{ \}$ 内の第1項の k に関する両側無限和は、 k の負の側の和に関して収束しない無限和となるので、 k と i に関する和の順序を変更できない。そこで、これを以下のように k に関する正負両方向の片側

無限和に分解する.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ & \quad + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (24) \end{aligned}$$

ここで, 単位ステップ関数 $u(t)$ と相補的な関係

$$u(t) = 1 - \bar{u}(-t) \quad (25)$$

にある関数を次式により定義する.

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (26)$$

これを用いて式(24)の右辺第1項の無限和を書き換えると

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=2m-1}^0 \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ & \quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=2m-1}^0 \{-\bar{u}(-(t-t_i+kT))\} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ & \quad + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (27) \end{aligned}$$

式(27)右辺第2項と第3項に現れる単位ステップ関数を周期的にシフトした無限和は, 以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2m-1} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} -\bar{u}(-(t-t_i+kT)) + \sum_{k=0}^{+\infty} u(t-t_i-kT) \right\} \\ & \quad \times \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &= \sum_{i=0}^{2m-1} \left[\frac{t-t_i+T}{T} \right] \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (28) \end{aligned}$$

ここで $[x]$ は, x を超えない最大整数を表す階段関数である.

ところが, 式(27)右辺第1項に現れる無限級数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=2m-1}^0 \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (29)$$

には, 普通の意味での和は存在しない. そこで Cesàro の総和法⁽⁷⁾を用いて以下のようにこの和を評価する.

無限級数(29)の0次までの部分 and は,

$$\begin{aligned} a_{2mn-(m+i)}^{(0)} &= \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_{m+i}^-) = -\dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ a_{2mn-i}^{(0)} &= \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (30)$$

と置くと, 次式

$$S_{2mn}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=2m-1}^0 a_{2mi-j} = \sum_{i=0}^{2m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) = 0 \quad (31)$$

が成り立つことより

$$\begin{aligned} S_{2mn-k}^{(0)} &= S_{2mn}^{(0)} - \sum_{i=0}^{k-1} a_{2mn-i} = -\sum_{i=0}^{k-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ S_{2mn-k}^{(0)} &= S_{2mn}^{(0)} - \sum_{i=0}^{m-1} a_{2mn-i} - \sum_{i=m}^{k-1} a_{2mn-i} \\ &= -\sum_{i=k-m}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (32)$$

のように求められる. 同様にして, 1次の部分 and は

$$S_{2mn}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=2m-1}^0 S_{2mi-j}^{(0)} = -nm \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (33)$$

であることから

$$\begin{aligned} S_{2mn-k}^{(1)} &= S_{2mn}^{(1)} - \sum_{i=0}^{k-1} S_{2mn-i}^{(0)} \\ &= -nm \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) + \sum_{i=0}^{k-2} \{k-(i+1)\} \dot{\mathcal{X}}_{2mn}^n(t_i^-) \\ S_{2mn-k}^{(1)} &= S_{2mn}^{(1)} - \sum_{i=0}^{m-1} S_{2mn-i}^{(0)} - \sum_{i=m}^{k-1} S_{2mn-i}^{(0)} \\ &= -nm \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) + \sum_{i=0}^{m-2} \{m-(i+1)\} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ & \quad + (k-m) \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ & \quad - \sum_{i=0}^{k-m-2} \{k-m-(i+1)\} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (34)$$

となる. ここで, 総和の演算子に関して, 以下の関係式が成り立つことを用いた.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-1} + \sum_{k=m}^{2m-1} \sum_{j=k-m}^{m-1} = m \sum_{j=0}^{m-1} \\ & \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{i-1} + \sum_{i=m}^{k-1} \sum_{j=i-m}^{m-1} = \sum_{j=0}^{m-2} \{m-(j+1)\} \\ & \quad + (k-m) \sum_{j=0}^{m-1} - \sum_{j=0}^{k-m-2} \{k-m-(j+1)\} \end{aligned} \quad (35)$$

以上により, $\binom{n}{i}$ を二項係数とすると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} C_{(0 \leq i \leq 2m-1)}^{(1)} &= \frac{S_{2mn-i}^{(1)}}{\binom{2mn-i+1}{1}} \\ &= \frac{-mn \sum_{j=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_j^-) + \mathcal{O}(1)}{2mn-i+1} \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_j^-) (n \rightarrow +\infty) \quad (36) \end{aligned}$$

したがって, 無限級数(29) は Cesàro の 1 次の和によつて

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=2m-1}^0 \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_j^-) \quad (C.1) \quad (37)$$

のように計算できる. (C.1) は Cesàro の 1 次の和を表す記号である. 式(37) の結果は, 反対称性条件(13) から式(31) が成り立つことを用いて次式のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{-\frac{T}{2} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-)}{T} &= \sum_{i=0}^{2m-1} \frac{t_i \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-)}{T} \\ &= -\sum_{i=0}^{2m-1} \frac{t-t_i}{T} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (38) \end{aligned}$$

式(28), (38) より, 式(27) は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2m-1} \left[\frac{t-t_i+T}{T} \right] \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &= \sum_{i=0}^{2m-1} \frac{-1}{T} \left(t-t_i-T \left[\frac{t-t_i}{T} \right] \right) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (39) \end{aligned}$$

関数項級数(24) に関する以上の評価結果を総括すると, 対称周期解は次式によって大域的に表される.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}_{2m}^n(t) &= \mathcal{S}(t) - (1+r) \sum_{i=0}^{2m-1} \\ &\quad \times \mathcal{G} \left(t-t_i-T \left[\frac{t-t_i}{T} \right] \right) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (40a) \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(t) \equiv -\frac{1}{2\zeta} \left(\frac{t}{T} + \frac{e^{-2\zeta t}}{1-e^{-2\zeta T}} \right) \quad (40b)$$

式(40) は, 対称周期解が線形系の定常周期解である周期関数 $\mathcal{S}(t)$ と, 衝突による非線形性の影響を集約した基本的な関数 $\mathcal{G}(t)$ を周期拡張した周期関数を, 衝

突時刻だけずらして衝突速度による重み付きで重ね合わせたものの和によって表されることを明示している.

周期解 $\tilde{\mathcal{X}}_{2m}^n(t)$ は衝突と衝突の間では区分的に微分可能であるので, $t_i (0 \leq i \leq 2m-1)$ における左側導関数を式(40a) の右辺に現れる衝突速度に再帰的に代入し, 展開・消去すると⁽⁵⁾, 次式のように有限個の衝突時刻のみをパラメータとする対称周期解の厳密な大域表現が得られる.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}_m^n(t) &= \mathcal{S}(t) \\ &\quad - (1+r) \sum_{k=0}^{2m-1} \mathcal{G} \left(t-t_k-T \left[\frac{t-t_k}{T} \right] \right) \\ &\quad \times \left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{0 \leq q_1, \dots, q_{i-1} \leq m-1} \left\{ \prod_{j=1}^{i-1} -(1+r) \mathcal{G}^j(t_{q_{j+1}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - t_{q_j} + Tu(-(t_{q_{j+1}} - t_{q_j}))) \right\} \mathcal{S}(t_{q_1}) \right] \quad (41) \end{aligned}$$

特に $m=1$ の場合, 衝突時刻 t_0 を厳密に求めることができるので, 対称基本周期解の閉じた大域的な関数形が得られる⁽⁶⁾.

3.2 $\zeta=0$ における対称周期解 $\zeta=0$ となる場合には, 式(16) は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}_{2m}^n(t) &= \mathcal{S}(t) - (1+r) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT) \\ &\quad \times (t-t_i-kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (42) \end{aligned}$$

ここで

$$u(t)t = t + \bar{u}(-t)(-t) \quad (43)$$

なる関係を用いると, 式(42) 右辺の 2 重総和項は次式のように分解できる.

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT)(t-t_i-kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=2m-1}^0 (t-t_i+kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=2m-1}^0 -\bar{u}(-(t-t_i+kT))(t-t_i+kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{2m-1} u(t-t_i-kT)(t-t_i-kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (44) \end{aligned}$$

式(44) 右辺第 1 項は収束しない関数項級数であるので, Cesàro の総和法によって評価する.

$$\begin{aligned} a_{2mn-(m+i)} &= - \left(t-t_i - \frac{T}{2} + nT \right) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ (0 \leq i \leq m-1) \\ a_{2mn-i} &= (t-t_i + nT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ (m \leq i \leq 2m-1) \quad (45) \end{aligned}$$

と置き, 順次, 部分和を求める.

$$S_{2mn}^{(0)} = n \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (46)$$

であるので, 0 次の部分 and は

$$\begin{aligned} S_{2mn-k}^{(0)} &= n \left[\frac{T}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) - T \sum_{i=0}^{k-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right] \\ &\quad - \sum_{i=0}^{k-1} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ S_{2mn-k}^{(0)} &= n \left[\frac{T}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) - T \sum_{i=k-m}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right] \\ &\quad - \sum_{i=k-m}^{m-1} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) - \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{k-m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (47)$$

同様に, 1 次の部分 and は

$$\begin{aligned} S_{2mn}^{(1)} &= -n \left[m \sum_{i=0}^{m-1} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{m-2} \{m-(i+1)\} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right] \\ S_{2mn-k}^{(1)} &= -n \left[m \sum_{i=0}^{m-1} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right. \\ &\quad + \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{m-2} \{m-(i+1)\} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) + k \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &\quad \left. - T \sum_{i=0}^{k-2} \{k-(i+1)\} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-2} \{k-(i+1)\} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ S_{2mn-k}^{(1)} &= -n \left[m \sum_{i=0}^{m-1} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right. \\ &\quad - \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{m-2} \{m-(i+1)\} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &\quad + k \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) - (k-m) T \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &\quad + T \sum_{i=0}^{k-m-2} \{k-m-(i+1)\} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \left. \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m-2} \{m-(i+1)\} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &\quad + (k-m) \sum_{i=0}^{m-1} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{k-m-2} \{k-m-(i+1)\} \left(t-t_i - \frac{T}{2} \right) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \end{aligned}$$

さらに, 2 次の部分 and は,

$$\begin{aligned} S_{2mn}^{(2)} &= n^2 m^2 \left[\sum_{i=0}^{m-1} (t_i-t) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right. \\ &\quad \left. - \frac{T}{4} \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right] \\ &\quad + n \left[-\frac{m(m+1)}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right. \\ &\quad - m^2 \frac{T}{4} \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &\quad + m \sum_{i=0}^{m-2} \{m-(i+1)\} (t-t_i) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &\quad \left. + \frac{T}{4} \sum_{i=0}^{m-2} (m-i-2)(m-i-1) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right] \end{aligned} \quad (49)$$

ここで総和の演算子に関して次式が成り立つことを用いた.

$$\sum_{k=2}^{m-1} \sum_{j=0}^{k-2} \{k-(j+1)\} = \sum_{j=0}^{m-3} \frac{(m-j-2)(m-j-1)}{2} \quad (50)$$

以上より,

$$\begin{aligned} S_{2mn-k}^{(2)} &= n^2 m^2 \left[\sum_{i=0}^{m-1} (t_i-t) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right. \\ &\quad \left. - \frac{T}{4} \sum_{i=0}^{m-1} \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \right] + \mathcal{O}(n) \end{aligned} \quad (51)$$

が得られる. これより

$$\begin{aligned} C_{2mn-i}^{(2)} &\equiv \frac{S_{2mn-i}^{(2)}}{\binom{2mn-i}{2}} \quad (52) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(t-t_i + \frac{T}{4} \right) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (n \rightarrow +\infty) \end{aligned} \quad (53)$$

したがって, 式(44) 右辺第 1 項の無限和は Cesàro の 2 次の和により以下のように求められる.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=2m-1}^0 (t-t_i + kT) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(t-t_i + \frac{T}{4} \right) \dot{\mathcal{X}}_{2m}^n(t_i^-) \quad (C.2) \end{aligned} \quad (54)$$

(48) 一方, 式(44) 右辺第 2, 第 3 項の無限和は, 以下のよ

Fig. 2 Numerical example of symmetric periodic solution $\tilde{X}_4^n(t)$ for zero stiffness impact oscillator ($\omega = 1.2, \zeta = 0.05, \eta = 4, \gamma = 1, r = 0.7$)

うに計算できる.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2m-1} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{u}(-(t-t_i+kT))(-(t-t_i+kT)) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^{+\infty} u(t-t_i-kT)(t-t_i-kT) \right\} \tilde{X}_{2m}^n(t_i^-) \\ & = \sum_{i=0}^{2m-1} \left[\frac{t-t_i+T}{T} \right] \left(t-t_i - \frac{T}{2} \left[\frac{t-t_i}{T} \right] \right) \\ & \quad \times \tilde{X}_{2m}^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (55)$$

また, 反対称性条件(13)を用いて次式が成り立つことを証明できる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2m-1} \left\{ \frac{1}{T} (t-t_i)^2 + t-t_i \right\} \tilde{X}_{2m}^n(t_i^-) \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(t-t_i + \frac{T}{4} \right) \tilde{X}_{2m}^n(t_i^-) \end{aligned} \quad (56)$$

式(56)を用いると, 式(54)と(55)の和は, 以下のように書き換えられる.

$$\sum_{i=0}^{2m-1} \mathcal{G} \left(t-t_i - T \left[\frac{t-t_i}{T} \right] \right) \quad (57)$$

ここで, $\mathcal{G}(t)$ は次式で定義される関数である.

$$\mathcal{G}(t) \equiv \frac{1}{2} t \left(1 - \frac{t}{T} \right) \quad (58)$$

以上の総和の評価結果を総括すると, 式(58)を基本関数として, 式(40), (41)と同型の対称周期解の大域表現が得られる. 特に $m=1$ の場合には, 衝突時刻 t_0 を含む対称基本周期解の厳密で閉じた大域的な関数形⁽⁶⁾が得られるので, 式(40), (41)は先に得られた対称基本周期解をすべての対称周期解の場合へ一般化したものとなっている.

3.3 数値計算例 図2に, パラメータ $\zeta = 0.05, \omega = 1.2, \eta = 4, e = 0.7, \gamma = 1$ で $m = 2, n = 1$ の場合の対称周期解の計算例を示す. $m = 2, n = 1$ として, 数値的に求められた衝突時刻 $t_0 \simeq 0.872903, t_1 \simeq 2.397629, t_2 \simeq 3.490897, t_3 \simeq 5.015623$ と衝突速度 $\dot{x}(t_0^-) \simeq 1.669293, \dot{x}(t_1^-) \simeq -2.984510, \dot{x}(t_2^-) \simeq -1.669293, \dot{x}(t_3^-) \simeq 2.984510$ を式(40a)に代入することにより, 対称周期解(実線)が再現でき, 数値的に求められた対称周期解(破線)と極めて良好に一致した. このことから, 本論文で得られた結果の妥当性が確かめられた.

4. 結 言

ばね剛性 0 の衝突振動系に発生する対称周期解の大域的な関数構造を, 有限個の衝突時刻のみをパラメータとして厳密に求める計算法を提案し, 以下の知見が得られた.

1. 衝突による非線形性に起因する周期的擬フィードバック応答の評価過程で現れる収束しない関数項級数は, Cesàro の総和法により厳密に評価できる. この無限和の値は, 粘性減衰が存在する系では Cesàro の (C.1) 総和により, 粘性減衰 0 の系では Cesàro の (C.2) 総和により, それぞれ求められる.
2. 対称周期解は, 有限個の衝突時刻のみをパラメータとして, 線形系の定常解である周期関数と, 衝突による非線形性の影響の総体である有限個の周期関数の積と構造との和に分解できる.

非対称周期解への適用可能性に関する詳細な検討については, 別報にて論じる予定である.

文 献

- (1) 機械学会便覧(1993) A 3 編 (力学・機械力学) 日本機械学会編, 丸善,(1993), p.A3-85.
- (2) 清水辰次郎, 非線形振動論, (1965), 114-122, 培風館
- (3) 今村仁, 鈴木浩平, “区分的線形振動系における一般解の大域表現と標準形(非線形性が不連続な場合)”, 機論, 57-541, C(1991), 2811-2818.
- (4) 今村仁, 鈴木浩平, 区分線形振動系の周期解の標準形(フィードバック重畳法の提案), 機論, 64-617, C(1998), 36-44.
- (5) 今村仁, 鈴木浩平, 衝突振動系の定常応答と周期解の一般形(停滞を伴わない場合), 機論, 67-653, C(2001), 23-29.
- (6) 今村仁, 鈴木浩平, ばね剛性 0 の衝突振動系における周期解(Cesàro の和による対称基本周期解の導出), 機論, 70-690, C(2004), 325-332.
- (7) 森口繁一, 宇田川鉦久, 一松信, 「数学公式Ⅱ」, (1987), 153-155, 岩波書店.