絶対節点座標アプローチにより定式化された梁要素による
骨組構造物のモデル化に関する研究*高橋 義考^{*1}, 清水 信行^{*1}, 鈴木 浩平^{*2}Study on the Frame Structure Modeling of the Beam Element
Formulated by Absolute Nodal Coordinate ApproachYoshitaka TAKAHASHI^{*3}, Nobuyuki SHIMIZU and Kohei SUZUKI^{*3} Department of Mechanical Engineering, Iwaki Meisei University,
5-5-1 Iino, Chuohdai, Iwaki-shi, Fukushima, 970-8551 Japan

Accurate seismic analysis of large deformable moving structures is still unsolved problems in the field of earthquake engineering. In order to analyze these problems, the nonlinear finite element method formulated by the absolute nodal coordinate approach is noticed. Because, this formulation has several advantages on mass matrix, elastic forces and damping forces in the case of large displacement problems. But, it has not been fully studied to build a frame structure model by using the beam element in the absolute nodal coordinate formulation. In this paper, we propose the connecting method of the beam element formulated by the absolute nodal coordinate. The coordinate transformation matrix of this element is introduced into the frame structure. This beam element has the characteristic that the mass matrix and bending stiffness matrix are constant even if in the case of large displacement problems, and this characteristic is being kept after the transformation. In order to verify the proposed method, we show the numerical simulation results of frame structures for a static problem and a vibration problem.

Key Words: Finite Element Method, Beam, Absolute Nodal Coordinate Approach, Frame Structure, Seismic Analysis

1. 緒 言

大変位, 大回転を有する柔軟梁要素について, さまざまな定式化が報告されており^{(1)~(6)}, 近年, 絶対節点座標アプローチによる定式化が Shabana らによって発表された^{(7) (8)}. この方法では, 節点座標として微小または有限回転のかわりに勾配を用いている点が従来の方法と異なる. 著者らは弾性力に注目し, 要素座標系に依存しない定式化を提案した. これにより大変位問題においても回転変換行列を用いない曲げ剛性行列を導出することができ, 構造解析に用いられるレーレー減衰を導入できるようになった^{(9)~(11)}. この他にも絶対節点座標アプローチによる柔軟要素の開発が盛んに行われているが, この手法はまだ完成されたものではなく, 現在発展途上にある. そのため理論的な定

式化に関する研究が多く, 具体的な構造物の解析への適用例は少ない. 適用例としては隣道らの研究が存在し, 鉄道車両のレールのモデル化に利用することで良好な結果を得ている⁽¹²⁾. しかし, 梁要素を直線的に結合したモデルであり, 骨組み構造物のモデル化を行った研究は見当たらない. 線形有限要素法と違い絶対節点座標アプローチでは角度の代わりに勾配を節点座標として用いる. そのため, 行列の重ね合わせで要素を結合するために, 線形有限要素法の座標変換行列をそのまま用いることはできない. 拘束条件式を用いて微分代数方程式として骨組構造物をモデル化することは可能であるが, 絶対節点座標アプローチ用の座標変換行列を新たに定義し, 線形有限要素法のように行列の重ね合わせで要素を結合することが出来れば骨組み構造物のモデル化に便利である. 絶対節点座標で定式化された梁要素を用いた骨組構造物のモデル化については報告例がなく, また, 実験による検証もおこなわれていないようである.

本研究では絶対節点座標アプローチで定式化された

* 原稿受付 2004年2月17日.

^{*1} 正員, いわき明星大学理工学部機械工学科(〒970-8551 いわき市中央台飯野5-5-1).^{*2} 正員, 東京都立大学工学研究科機械工学専攻(〒192-0397 八王子市南大沢1-1).

E-mail: yositaka@iwakimu.ac.jp

梁要素を実際の設計問題へ適用するために、この梁要素による骨組構造物のモデル化手法について述べる。拘束条件式を用いて微分代数方程式として骨組構造物をモデル化するのではなく、絶対節点座標アプローチ用の座標変換行列を提案し、従来の有限要素法と同じように行列の重ね合わせで梁要素を結合する方法を提案する。骨組み構造物の運動方程式は常微分方程式で記述され、大変位問題においても質量行列、曲げ剛性行列は定数行列で表すことができる。解析は微小変形範囲に限定されるが、大変位、大回転を扱うことができるため、運動を伴い、時間と共に姿勢の変化する柔軟構造物のモデル化にも応用が考えられる。モデル化を検証するためにシミュレーションを行い、従来の有限要素法との比較と実験による検証についても述べる。

2. 絶対節点座標アプローチによる梁要素の定式化

梁要素と全体座標系 $O-XY$ を図 1 に示す。変形していない状態の梁の長さを l 、断面積を A 、密度を ρ とする。図心軸上の任意点 P の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は次式で表すことができる。

$$\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{e} . \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{S}$ は形状関数、 $\mathbf{e}$ は節点座標ベクトルである。この節点座標ベクトルは次式で表される。

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6 \ e_7 \ e_8]^T, \quad (2)$$

ここで、 e_1, e_2 は節点 A の X, Y 座標、 e_5, e_6 は節点 B の X, Y 座標である。また、 e_3, e_4 と e_7, e_8 はそれぞれ節点 A と B における全体座標系から見た勾配を表しており、位置ベクトルの X または Y 座標による偏微分で定義される。

梁要素をベルヌーイ・オイラー梁とし、アイソパラメトリック要素の考え方を導入すると、形状関数は次

Fig. 1 Deformation of beam

式となる。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 0 \\ 0 & l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 \\ 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ l(\xi^3 - \xi^2) & 0 \\ 0 & l(\xi^3 - \xi^2) \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

ここで、 $\xi = x/l$ である。

梁要素の運動エネルギーは次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dx, \quad (4)$$

ここで $\dot{\mathbf{r}}$ は任意点 P の全体座標から見た速度ベクトルであり、

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{S} \dot{\mathbf{e}} . \quad (5)$$

となる。式 (5) を式 (4) に代入し整理することで、この梁要素の質量行列 $\mathbf{M}$ は次式で表すことができる⁽¹⁰⁾。

$$\mathbf{M} = A\rho l \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13l}{420} \\ \frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 \\ 0 & \frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} \\ \frac{9}{70} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11l}{210} \\ -\frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} & 0 \\ 0 & -\frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & \frac{l^2}{105} \end{bmatrix} \quad (6)$$

次に弾性力の導出について述べる。梁の軸方向の歪エネルギー U_l を次式で定義する。

$$U_l = \frac{1}{2} \int_0^l EA \varepsilon^2 dx . \quad (7)$$

ここで、 E は弾性係数、 ε は軸方向の歪を表す。梁要素の変形量が微小であり、変形している梁の長さが図 1 の点 AB 間の距離で近似できると仮定すると、軸方向の歪は次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{l_d - l}{l} \\ &= \frac{\sqrt{(e_5 - e_1)^2 + (e_6 - e_2)^2} - l}{l} . \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 l_d は変形している梁の長さを表す。式 (8) を式 (7) に代入すると、軸方向の歪エネルギーが得られ、梁要素の軸方向の変形に対する弾性力ベクトルが次式のように導出できる⁽¹⁰⁾。

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{K}_l \mathbf{e} . \quad (9)$$

ここで,

$$\mathbf{K}_l = \frac{EA\varepsilon}{l_d} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

となる.

次に, 梁の曲げ変形に対する弾性力について述べる. 梁要素の曲げ変形による歪エネルギーは次式で定義される.

$$U_l = \frac{1}{2} \int_0^l EI \kappa^2 dx . \quad (11)$$

ここで, I は断面二次モーメント, κ は曲率を表している. 曲率について次の近似式が成り立つことが分かっている⁽¹⁰⁾.

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2} \mathbf{e} \right)^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2} \mathbf{e} \right) . \quad (12)$$

式(12)を式(11)に代入し整理することで曲げ変形に対する弾性力を次式のように表すことができる⁽¹⁰⁾.

$$\mathbf{F}_l = \left(\frac{\partial U_l}{\partial \mathbf{e}} \right)^T = \mathbf{K}_l \mathbf{e} . \quad (13)$$

ここで,

$$\mathbf{K}_l = \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2} \right) dx \quad (14)$$

$$= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6l & 0 & -12 & 0 & 6l & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 6l & 0 & -12 & 0 & 6l \\ 6l & 0 & 4l^2 & 0 & -6l & 0 & 2l^2 & 0 \\ 0 & 6l & 0 & 4l^2 & 0 & -6l & 0 & 2l^2 \\ -12 & 0 & -6l & 0 & 12 & 0 & -6l & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -6l & 0 & 12 & 0 & -6l \\ 6l & 0 & 2l^2 & 0 & -6l & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & 6l & 0 & 2l^2 & 0 & -6l & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} , \quad (15)$$

である. この曲げ剛性行列は線形有限要素法の剛性行列と同様に, 対称な定数行列である. 結果として, 梁要素の弾性力ベクトルは軸方向の変形と曲げ変形による弾性力を合わせて次式となる.

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t . \quad (16)$$

式(6), (16)により, 減衰の無い場合の運動方程式は次式となる.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{F}_e = \mathbf{Q} . \quad (17)$$

ここで, $\mathbf{Q}$ は外力ベクトルを表している. レーレー減衰を含む場合, 運動方程式は次式となる.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_e = \mathbf{Q} , \quad (18)$$

ここで,

$$\mathbf{F}_d = (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_t) \dot{\mathbf{e}} , \quad (19)$$

である⁽¹¹⁾.

3. 骨組構造物のモデル化

3.1 直線的な要素の連結 図2に示すように梁要素を直線的に結合することを考える. この例題では, 要素1のQ点と要素2のP点が結合するものとする. P点とQ点の節点座標は共通な座標となるので, 従来のFEMと同様に行列の重ね合わせにより, 梁要素を結合することができる. 結合する前の要素1と要素2の運動方程式は次式となる.

$$\mathbf{M}^{(1)} \ddot{\mathbf{e}}^{(1)} = \mathbf{Q}^{(1)} - (\mathbf{K}_l^{(1)} + \mathbf{K}_t^{(1)}) \mathbf{e}^{(1)} , \quad (20)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \ddot{\mathbf{e}}^{(2)} = \mathbf{Q}^{(2)} - (\mathbf{K}_l^{(2)} + \mathbf{K}_t^{(2)}) \mathbf{e}^{(2)} . \quad (21)$$

ここで添字(1), (2)は要素番号を表している. 有限要素法と同様に結合する節点部分の質量行列, 剛性行列, 節点座標ベクトル, 外力ベクトルを重ねあわせることで, 2つの要素を一つの連続体として結合することができる. 記述を簡単にするために, 8行8列の質量行列, 剛性行列を2行2列の行列で整理し, それに対応して節点座標ベクトル, 外力ベクトルも2行1列のベ

Fig. 2 Joint at straight part

クトルで以下のように表すことにする。

$$\mathbf{M}^{(i)} = A\rho l \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 & \frac{11}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13}{420} & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13}{420} \\ \frac{11}{210} & 0 & \frac{1}{105} & 0 & \frac{13}{420} & 0 & -\frac{1}{140} & 0 \\ 0 & \frac{11}{210} & 0 & \frac{1}{105} & 0 & \frac{13}{420} & 0 & -\frac{1}{140} \\ \frac{9}{70} & 0 & \frac{13}{420} & 0 & \frac{1}{105} & 0 & -\frac{13}{420} & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13}{420} & 0 & \frac{1}{105} & 0 & -\frac{13}{420} \\ -\frac{13}{420} & 0 & -\frac{1}{140} & 0 & -\frac{13}{420} & 0 & \frac{1}{105} & 0 \\ 0 & -\frac{13}{420} & 0 & -\frac{1}{140} & 0 & -\frac{13}{420} & 0 & \frac{1}{105} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{(i)} & \mathbf{M}_{12}^{(i)} & \mathbf{M}_{13}^{(i)} & \mathbf{M}_{14}^{(i)} \\ \mathbf{M}_{21}^{(i)} & \mathbf{M}_{22}^{(i)} & \mathbf{M}_{23}^{(i)} & \mathbf{M}_{24}^{(i)} \\ \mathbf{M}_{31}^{(i)} & \mathbf{M}_{32}^{(i)} & \mathbf{M}_{33}^{(i)} & \mathbf{M}_{34}^{(i)} \\ \mathbf{M}_{41}^{(i)} & \mathbf{M}_{42}^{(i)} & \mathbf{M}_{43}^{(i)} & \mathbf{M}_{44}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}_t^{(i)} + \mathbf{K}_l^{(i)}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(i)} & \mathbf{K}_{12}^{(i)} & \mathbf{K}_{13}^{(i)} & \mathbf{K}_{14}^{(i)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(i)} & \mathbf{K}_{22}^{(i)} & \mathbf{K}_{23}^{(i)} & \mathbf{K}_{24}^{(i)} \\ \mathbf{K}_{31}^{(i)} & \mathbf{K}_{32}^{(i)} & \mathbf{K}_{33}^{(i)} & \mathbf{K}_{34}^{(i)} \\ \mathbf{K}_{41}^{(i)} & \mathbf{K}_{42}^{(i)} & \mathbf{K}_{43}^{(i)} & \mathbf{K}_{44}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{e}^{(i)} = \left[e_1^{(i)} e_2^{(i)} \mid e_3^{(i)} e_4^{(i)} \mid e_5^{(i)} e_6^{(i)} \mid e_7^{(i)} e_8^{(i)} \right]^T$$

$$= \left[e_{12}^{(i)} e_{34}^{(i)} e_{56}^{(i)} e_{78}^{(i)} \right]^T, \quad (24)$$

$$\mathbf{Q}^{(i)} = \left[Q_{12}^{(i)} Q_{34}^{(i)} Q_{56}^{(i)} Q_{78}^{(i)} \right]^T. \quad (25)$$

梁要素を結合した状態の運動方程式は以下の様になる。

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{e}}} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{Q}}. \quad (26)$$

ここで節点座標ベクトル, 質量行列, 剛性行列, 外力ベクトルは次のようになる。

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} e_{12}^{(1)} \\ e_{34}^{(1)} \\ e_{56}^{(1)} \\ e_{78}^{(1)} \\ e_{56}^{(2)} \\ e_{78}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{12}^{(1)} \\ e_{34}^{(1)} \\ e_{12}^{(2)} \\ e_{34}^{(2)} \\ e_{56}^{(2)} \\ e_{78}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{(1)} & \mathbf{M}_{12}^{(1)} & \mathbf{M}_{13}^{(1)} & \mathbf{M}_{14}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{21}^{(1)} & \mathbf{M}_{22}^{(1)} & \mathbf{M}_{23}^{(1)} & \mathbf{M}_{24}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{31}^{(1)} & \mathbf{M}_{32}^{(1)} & \mathbf{M}_{33}^{(1)} + \mathbf{M}_{11}^{(2)} & \mathbf{M}_{34}^{(1)} + \mathbf{M}_{12}^{(2)} & \mathbf{M}_{13}^{(2)} & \mathbf{M}_{14}^{(2)} \\ \mathbf{M}_{41}^{(1)} & \mathbf{M}_{42}^{(1)} & \mathbf{M}_{43}^{(1)} + \mathbf{M}_{21}^{(2)} & \mathbf{M}_{44}^{(1)} + \mathbf{M}_{22}^{(2)} & \mathbf{M}_{23}^{(2)} & \mathbf{M}_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{31}^{(2)} & \mathbf{M}_{32}^{(2)} & \mathbf{M}_{33}^{(2)} & \mathbf{M}_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{41}^{(2)} & \mathbf{M}_{42}^{(2)} & \mathbf{M}_{43}^{(2)} & \mathbf{M}_{44}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} & \mathbf{K}_{13}^{(1)} & \mathbf{K}_{14}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} & \mathbf{K}_{23}^{(1)} & \mathbf{K}_{24}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{31}^{(1)} & \mathbf{K}_{32}^{(1)} & \mathbf{K}_{33}^{(1)} + \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{34}^{(1)} + \mathbf{K}_{12}^{(2)} & \mathbf{K}_{13}^{(2)} & \mathbf{K}_{14}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{41}^{(1)} & \mathbf{K}_{42}^{(1)} & \mathbf{K}_{43}^{(1)} + \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{44}^{(1)} + \mathbf{K}_{22}^{(2)} & \mathbf{K}_{23}^{(2)} & \mathbf{K}_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{31}^{(2)} & \mathbf{K}_{32}^{(2)} & \mathbf{K}_{33}^{(2)} & \mathbf{K}_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{41}^{(2)} & \mathbf{K}_{42}^{(2)} & \mathbf{K}_{43}^{(2)} & \mathbf{K}_{44}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} Q_{12}^{(1)} \\ Q_{34}^{(1)} \\ Q_{56}^{(1)} + Q_{12}^{(2)} \\ Q_{78}^{(1)} + Q_{34}^{(2)} \\ Q_{56}^{(2)} \\ Q_{78}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

3.2 任意角度での要素の結合 図3に示すように2つの梁要素を任意の角度で固定し結合する場合について考える。梁要素を任意の角度で結合する場合, 直線的結合のようにそのまま質量行列, 剛性行列を重ね合わせることはできない。それは, 結合部分の節点座標の勾配が点Pと点Qで異なるからである。結合点のXY座標は同じとなるため,

$$\mathbf{e}_{56}^{(1)} = \mathbf{e}_{12}^{(2)} \quad (31)$$

という関係が成り立つ。勾配を表す節点座標は軸歪と角度を用いると以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} e_7^{(1)} &= (1 + \varepsilon_Q^{(1)}) \cos \theta_1, \\ e_8^{(1)} &= (1 + \varepsilon_Q^{(1)}) \sin \theta_1, \\ e_3^{(2)} &= (1 + \varepsilon_P^{(2)}) \cos \theta_2, \\ e_4^{(2)} &= (1 + \varepsilon_P^{(2)}) \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Fig. 3 Joint at corner part

ここで, θ_1, θ_2 は図 3 に示す節点 P, Q の角度であり, $\varepsilon_P^{(1)}, \varepsilon_P^{(2)}$ は節点 P, Q での軸歪を表す. 点 P の勾配を点 Q の勾配で表すことを考える. 三角関数の定理より次式の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} e_3^{(2)} &= (1 + \varepsilon_P^{(2)}) \cos(\theta_1 + \theta_c) \\ &= (1 + \varepsilon_P^{(2)}) (\cos \theta_1 \cos \theta_c - \sin \theta_1 \sin \theta_c), \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_4^{(2)} &= (1 + \varepsilon_P^{(2)}) \sin(\theta_1 + \theta_c) \\ &= (1 + \varepsilon_P^{(2)}) (\sin \theta_1 \cos \theta_c + \cos \theta_1 \sin \theta_c). \quad (34) \end{aligned}$$

ここで, θ_c は梁要素結合角度を表す定数である. この式を行列で整理すると次式となる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_3^{(2)} \\ e_4^{(2)} \end{bmatrix} &= (1 + \varepsilon_P^{(2)}) \begin{bmatrix} \cos \theta_c & -\sin \theta_c \\ \sin \theta_c & \cos \theta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1 + \varepsilon_P^{(2)}}{1 + \varepsilon_Q^{(1)}} \begin{bmatrix} \cos \theta_c & -\sin \theta_c \\ \sin \theta_c & \cos \theta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_7^{(1)} \\ e_8^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (35) \end{aligned}$$

よって, 勾配を表す座標の座標変換行列は次式で表すことができる.

$$\mathbf{A} = \frac{1 + \varepsilon_P^{(2)}}{1 + \varepsilon_Q^{(1)}} \begin{bmatrix} \cos \theta_c & -\sin \theta_c \\ \sin \theta_c & \cos \theta_c \end{bmatrix}. \quad (36)$$

このように, 絶対節点座標で定式化された梁要素の座標変換行列を厳密に導出すると, 梁要素の軸歪の影響が含まれることが確認できた. ここでは実際の機械構造物のモデル化を目標とし, 骨組構造物の弾性変形範囲内の解析を対象としている. このような問題では軸歪は十分に微小であることから, 座標変換行列を導出するにあたり, 次式のように近似ができると仮定する.

$$\frac{1 + \varepsilon_P^{(2)}}{1 + \varepsilon_Q^{(1)}} = 1. \quad (37)$$

これにより, 梁要素 2 を梁要素 1 に任意角度で結合する場合の節点座標全体の変換行列は次式で表すことができる.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_c & -\sin \theta_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

梁要素の結合角度 θ_c は定数であるから, 梁要素の運動状態にかかわらず, この座標変換行列は定数行列であ

る. この座標変換行列を用いることにより, 梁要素を結合した状態の運動方程式は次式で表すことができる.

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{e} = \bar{\mathbf{Q}}. \quad (39)$$

ここで, 質量行列, 剛性行列, 節点座標ベクトル, 外力ベクトルは以下のとおりである.

$$\bar{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}_{12}^{(1)}, \mathbf{e}_{34}^{(1)}, \mathbf{e}_{56}^{(1)}, \mathbf{e}_{78}^{(1)}, \mathbf{e}_{56}^{(2)}, \mathbf{e}_{78}^{(2)}]^T, \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{(1)} & \mathbf{M}_{12}^{(1)} & \mathbf{M}_{13}^{(1)} & \mathbf{M}_{14}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{21}^{(1)} & \mathbf{M}_{22}^{(1)} & \mathbf{M}_{23}^{(1)} & \mathbf{M}_{24}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{31}^{(1)} & \mathbf{M}_{32}^{(1)} & \mathbf{M}_{33}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{11}^{(2)} & \mathbf{M}_{34}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{12}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{13}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{14}^{(2)} \\ \mathbf{M}_{41}^{(1)} & \mathbf{M}_{42}^{(1)} & \mathbf{M}_{43}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{21}^{(2)} & \mathbf{M}_{44}^{(1)} + \hat{\mathbf{M}}_{22}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{23}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{M}}_{31}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{32}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{33}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{M}}_{41}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{42}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{43}^{(2)} & \hat{\mathbf{M}}_{44}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} & \mathbf{K}_{13}^{(1)} & \mathbf{K}_{14}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} & \mathbf{K}_{23}^{(1)} & \mathbf{K}_{24}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{31}^{(1)} & \mathbf{K}_{32}^{(1)} & \mathbf{K}_{33}^{(1)} + \hat{\mathbf{K}}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{34}^{(1)} + \hat{\mathbf{K}}_{12}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{13}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{14}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{41}^{(1)} & \mathbf{K}_{42}^{(1)} & \mathbf{K}_{43}^{(1)} + \hat{\mathbf{K}}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{44}^{(1)} + \hat{\mathbf{K}}_{22}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{23}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_{31}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{32}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{33}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_{41}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{42}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{43}^{(2)} & \hat{\mathbf{K}}_{44}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{12}^{(1)} \\ \mathbf{Q}_{34}^{(1)} \\ \mathbf{Q}_{56}^{(1)} + \hat{\mathbf{Q}}_{12}^{(2)} \\ \mathbf{Q}_{78}^{(1)} + \hat{\mathbf{Q}}_{34}^{(2)} \\ \hat{\mathbf{Q}}_{56}^{(2)} \\ \hat{\mathbf{Q}}_{78}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\hat{\mathbf{M}}^{(2)} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{(2)} \mathbf{A}, \quad (44)$$

$$\hat{\mathbf{K}}^{(2)} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{A}, \quad (45)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}^{(2)} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{(2)}. \quad (46)$$

さらに, 要素 2 の別の節点に新たな要素 3 を任意角度で結合する場合には, 要素 1 と要素 2 の場合と同様に結合角度を設定することで, 要素 3 の結合部分の節点座標を要素 2 の節点座標で表すための座標変換行列を導出することができる. この座標変換行列を要素 3 の質量行列, 剛性行列, 外力ベクトルに作用させ, 要素 2 の結合部分の節点に対応する行列に重ね合わせることで結合後の運動方程式を導くことができる.

複数の梁要素が1つの節点において任意角度で結合される場合には、基準となる一つの梁要素を考える。基準要素から各要素の結合角度を定義することで、各要素の結合部分の節点座標を基準要素の節点座標で表すための座標変換行列を導出することができる。各要素に対する座標変換行列を各要素の質量行列、剛性行列、外力ベクトルに作用させ、基準要素の結合部分の節点に対応する行列に重ね合わせることで、結合後の運動方程式を導くことができる。

このようにして、絶対節点座標で定式化された複数の梁要素を、行列の重ね合わせにより任意の角度で結合し、骨組構造物をモデル化することが可能となった。軸歪が微小な範囲に解析を限定し、厳密には座標変換行列に含まれる軸歪の影響を消去することで絶対節点座標用の座標変換行列を式(38)のように導出したことが本論文の特徴である。絶対節点座標アプローチによる定式化においてこのような座標変換行列を用いている論文は見当たらない。これにより線形有限要素法と同じように行列の重ね合わせで梁要素の結合処理ができ、結合後の運動方程式は常微分方程式で表すことができる。拘束式を用いた微分代数方程式として処理する必要がなく、梁要素の結合処理が容易となった。また、この座標変換行列は時間によって変化しない定数行列であるため、大変位・大回転問題においても骨組構造物の質量行列と曲げ剛性行列は定数行列として記述できる。

4. 数値計算による検証

4.1 静的問題による検証 提案した手法を検証するために静的問題を解析し、線形有限要素法と比較検討を行った。図4に解析モデルを示す。同じ長さの梁を直角に結合し、先端にトルクを加える。ここでは、梁の長さ $L = 1\text{m}$ 、縦弾性係数 $E = 210\text{GPa}$ 、梁の断面は半径 5cm の円形状とした。線形変形範囲内で比較するため外力トルク T は小さい値とし、 $TL/EI = 0.0005$ となるように設定した。長さ L の梁を5つに要素分割し、ニュートン法により収束計算を行った。計算するにあたり、両手法とも市販ソフトの MATLAB を用いて解析ソフトを開発した。絶対節点座標アプローチによる骨組みモデルでは、梁の軸方向の変形に対する剛性行列に節点座標が含まれる。収束計算を行うにあたり、 $n+1$ ステップの解を求めるのに n ステップの状態の節点座標を用いて剛性行列を近似した。

静的に釣合った状態の全体座標系から見た P 点の座標を表1に示す。線形有限要素法 (FEM) による骨組

Table 1 Simulation result at node P

Coordinate	FEM approach	ANC approach
X [m]	1.00025	1.000249
Y [m]	0.99925	0.999249
θ [rad]	-0.001	-0.00099

Fig. 4 Analysis model for static problem

(a) FEM approach

(b) ANC approach

Fig. 5 Comparison of simulation results

Fig. 6 Experiment of crane model (1/8 scale)

Fig. 7 Simulation model of crane

みモデルと、提案した絶対節点座標 (ANC) アプローチによる骨組みモデルの解析結果が一致していることが確認できる。図5では解析結果を比較しやすいように、初期状態からの変形量を100倍にして変形状態を表している。両骨組みモデルの変形状態は良く一致しており、微小変形範囲において提案した結合方法が静的問題に有効であることが確認できた。

4.2 振動問題への適用 (クレーンモデル) 次に動的問題への適用を検討する。図6と図7は港湾に設置されているコンテナクレーンの1/8スケールモデルを表している。1997年にこの1/8スケールモデルを用いたコンテナクレーン振動実験が行われており、コンテナクレーンのモデル化や耐震性評価に関する研究が既に報告されている⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。ここでは提案手法により骨組み構造モデルを作成し、振動実験との比較検証を行った。

図8に実験結果とシミュレーション結果を示す。実験には1968年に発生した北海道十勝沖地震の八戸港湾で計測されたNS方向の波形を用いた。図8(a)は実験に用いたX軸方向の地震波形を示している。最大加速度は 1.69m/s^2 とし、相似則により地震波形の時間軸を $1/\sqrt{8}$ 倍にしている。(b)は実験によって得

(a) Input earthquake wave

(b) Experimental result at node P

(c) Simulation result (FEM)

(d) Simulation result (ANC)

Fig. 8 Comparison of results

られた時刻歴応答波形であり、図7に示すコンテナクレーンのP点の加速度（X軸方向）を示している。この地震応答より1次固有振動数は1.65Hz、1次モード減衰比は0.18%と同定することができた。これより解析モデルに導入する減衰行列 $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M}$ の係数を $\alpha = 2\zeta_1\omega_1 = 0.0373$ とした。また、レールと車輪部は浮き上がり挙動がほとんど観測されなかったことから、ピンジョイント結合でモデル化を行った。(c)は従来の線形有限要素法(FEM)によるシミュレーション結果であり、(d)は絶対節点座標(ANC)で定式化された梁要素を用いた提案手法によるシミュレーション結果を示している。両シミュレーションともMATLABにて解析ソフトを開発した。

実験で得られた地震応答の3~5秒間には約6Hzの振動成分が含まれていることが確認できる。しかし、線形有限要素法と提案手法の両シミュレーションではこの振動成分があまり現れていない。そのため、この振動成分は骨組構造部の影響ではなくレールと車輪が結合されていないために生じる、滑りや接触による影響と考えられる。また、振幅の大きさに若干の違いがあるものの、実験結果とシミュレーション結果の全体的な地震応答の挙動は良く一致しており、提案手法が骨組構造物の動的問題にも有効であることが確認できた。

4.3 大変位問題への適用 ここでは大変位問題で検証を行う。図9に示すように直角に結合された梁要素を考える。梁要素の密度は 10kg/m^3 、縦弾性係数 $E = 5 \times 10^8 \text{N/m}^2$ 、断面形状は一边が1cmの正方形とした。梁要素の一端は基礎部分に回転ジョイントで結合され、重力により振り運動を行う。提案手法を検証するために、市販されている機構解析ソフトウェア「RecurDyn」による計算結果との比較を行った。RecurDynには柔軟要素用のツールボックスが用意されており、その中の梁要素でモデル化を行った。6つに要素分割して解析した結果を図10と図11に示す。この問題で生じる梁要素の変形は、曲げ変形が主体で、軸方向の変形は微小であった。そのため両結果は良く一致しており、提案手法は大変位問題に対しても有効であることが確認できた。機械構造物に含まれる骨組み構造物の弾性変形範囲内の解析を考えるのであれば、提案手法は十分に適用できると考えられる。

5. 結 言

本研究では絶対節点座標で定式化された梁要素を用いた場合の骨組構造モデル作成方法を提案した。この梁要素は節点座標に角度を用いずに勾配を用いている。そのため線形有限要素法の座標変換行列を用い、行列

Fig. 9 Analysis model for large displacement problem

Fig. 10 Simulation result (RecurDyn)

Fig. 11 Simulation result (proposed method)

の重ね合わせで梁要素を結合することはできない。拘束条件式を用いてマルチボディダイナミクスの手法を用いて結合することもできるが、モデル全体の運動方程式は微分代数方程式となる。本論文ではこの梁要素の座標変換行列を導出し、行列の重ね合わせで梁要素を結合する方法を提案した。提案手法では梁要素の結合後の運動方程式は微分代数方程式でなく常微分方程式で表わされる。また、大変位問題であっても質量行列、曲げ剛性行列は定数行列として記述することができる。

提案手法を検証するために、静的問題を線形有限要素法と比較検討を行った。微小変形範囲内において、提案手法の計算結果は線形有限要素法と良く一致しており、提案手法が静的問題において有効であることが確認できた。また、動的問題に対してはコンテナクレーンを対象に、振動加振実験結果と解析結果の比較検討を行った。実験結果と提案手法の解析結果は良く一致しており、本手法が動的問題においても有効であることが実験により確認することができた。大変位問題に対しても汎用機構解析ソフトウェアによる解析結果と一致していることから、提案手法が有効であることが確認できた。絶対節点座標で定式化された梁要素の座標変換行列は、厳密には軸歪の影響を受けるが、実際の骨組構造物の弾性変形範囲内の解析であれば、この影響を省略した座標変換行列でも十分に利用できることがシミュレーションにより確認できたことになる。

本手法を用いれば剛体運動を有する骨組構造モデルの運動解析にも、そのまま適用できる。そのため、クレーンの転倒挙動や、大型振動台による大変位加振を想定したシミュレーション、液状化による地盤の移動に対する構造物の挙動解析への応用も考えられる。

文 献

- (1) B.F.De Veubeke, The Dynamics of Flexible Bodies, *International Journal for Engineering Science*, **14**, (1976), 895-913.
- (2) R.L.Huston, Multi-body Dynamics Including the Effect of Flexibility and Compliance, *Computer and Structures*, **14**, (1981), 443-451.
- (3) R.L.Huston, Computer Methods in Flexible Multibody Dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **32**, (1991), 1657-1668.
- (4) J.C.Simo and L.Vu-Quoc, On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions - The Plane Case: Parts I and II, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **53**, (1986), 849-863.
- (5) M.Iura and S.N.Atluri, Dynamic Analysis of Planar Flexible Beams with Finite Rotations by using Inertial and Rotating Frames, *Computers & Structures*, **55-3**, (1995), 453-462.
- (6) 本家, 井上, ほか 2 名, 柔軟リンク構造物のシミュレーションに関する研究 (大変位運動を考慮した低次元化手法と大変位 2 節点要素の開発), 機論, **64-620**, C(1998), 1176-1183.
- (7) A.A.Shabana, An Absolute Nodal Coordinate Formulation for the Large Rotation and Deformation Analysis of Flexible Bodies, *Technical Report #MBS96-1-UIC*, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois at Chicago, (1996).
- (8) A.A.Shabana, H.A.Hussien and J.L.Escalona, Application of the Absolute Nodal Coordinate Formulation to Large Rotation and Large Deformation Problems, *ASME Journal of Mechanical Design*, **120**, (1998), 188-195.
- (9) Y.Takahashi and N.Shimizu, Study on Elastic Forces of the Absolute Nodal Coordinate Formulation for Deformable Beams, *ASME Proceedings of Design Engineering Technical Conferences*, (1999), VIB-8203.
- (10) 高橋, 清水, Absolute Nodal Coordinate 法による梁の多体動力学解析に関する研究 (有限変位・微小歪とした時の弾性力の導出), 機論, **67-655**, C(2001), 626-632.
- (11) 高橋, 清水, 鈴木, 絶対節点座標アプローチにより定式化された柔軟マルチボディダイナミクスにおける梁要素の減衰行列に関する研究, 機論, **69-685**, C(2003), 2225-2232.
- (12) 生田, 曄道, 須田, 移動質量を伴うフレキシブル・マルチボディ・ダイナミクスの基礎的研究, 日本機械学会, 機械力学・計測制御講演論文集 (Vol.A), **99-7**, (1999), 205-208.
- (13) 金山, 柏崎, 大地震時におけるコンテナクレーンの脚の浮き上がり挙動評価, 機論, **64-618**, C(1998), 480-486.
- (14) 栗原, 小林, 複雑な形状を有する物体の接触問題への一つのアプローチ, 機論, **66-646**, C(2000), 1816-1822.