変厚回転円板の面内振動*

鈴木 勝義^{*1}, 八巻 圭太郎^{*2}
井坂 秀治^{*1}, 鄭 学 瀾^{*3}In-Plane Vibration Analysis of A Rotating Circular Plate with
Varying ThicknessKatsuyoshi SUZUKI^{*4}, Keitarou YAMAKI,
Hideharu ISAKA and Xuelan ZHENG^{*4} Department of Mechanical Systems Engineering, Faculty of Engineering, Yamagata University,
4 3 16 Jyonan, Yonezawa-shi, Yamagata, 992-8510 Japan

A refined solution procedure is presented for analyzing in-plane free vibrations of a rotating circular plate with varying thickness. Equations of motion and boundary conditions are derived considering the effect of initial tensions due to the rotation. The equations of motion are solved exactly by power series expansions. Frequencies and stress distributions of the circular plate with linearly and exponentially varying thickness are presented and the characteristics are discussed comparing the results by the present theory with those by the classical theory.

Key Words: Free Vibration, In-Plane Vibration, Rotating Circular Plate, Power Series Expansions, Exact Solution, Varying Thickness

1. 緒 言

回転円板の振動に関しては, Southwell の論文をはじめとして, すでに多くの研究がなされてきている^{(1)~(16)}. しかし, これらのほとんどの論文は, 回転によって生じる面内力の影響を考慮した円板の曲げ振動を扱っており, また, 定常回転によって生じる面内力についてはすべて Timoshenko⁽¹⁶⁾ 流の考え方(古典理論)を踏襲している. 回転円板の面内振動に関しては, 面外振動に比べて一般の関心も低く, 振動特性はいまだ十分に解明されていない状況である. 最近, 鈴木ら⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾ は, 回転する一様円板の面内振動および面外振動を解析し, Timoshenko 流の回転円板の基礎式は, 高速回転時の円板の応力解析, 振動解析には不十分であることを明らかにしている. しかし, 変厚回転円板に関しては, その振動特性はいまだ十分に解明されていない状況にある. そこで, 本研究では回転によって生じる初期張力および初期張力を受けながら微小振動する変厚円板の面内振動をより正確に解析する方

法を示す. 厚さが半径方向に連続的に変化する任意の円板に適用できる一般的な方法である. 基礎方程式(運動方程式と境界条件式)は, ラグランジュアンの停留条件から求める. 運動方程式は級数解を用いて厳密に解析する. 数値計算では, 円板の厚さが中心から半径方向に向かって直線的(一次関数的)に変化する場合と指数関数的に変化する場合を考える. また計算では, 外周自由および外周固定孔なし円板の定常回転時の応力・変位解析および振動時の振動数曲線, 振動モードを求め, 回転数, 円板の厚さの変化等のパラメータがそれらに及ぼす影響を明らかにする. さらに, 本理論の結果と古典理論の結果とを比較し, 初期張力が振動特性に及ぼす影響について明らかにする.

2. 基礎方程式

2・1 定常回転の場合 図1, 2に示すように円板の中心($r=0$)での厚さを h_0 , 円板の任意点 r での厚さを $h=h_0\phi(r)$ とし外半径 a , 内半径 b の均質円板が中心 O を通る垂直軸回りに角速度 Ω で定常回転する場合の運動方程式を考える. 変形は微小とし, 軸対称変形を仮定する. 半径方向の変位を u^* とし(定常回転項には*印を付す), 無次元座標 $z=r/a$, 無次元変位 $U^*=u^*/a$ を導入する. 文献(17)と同様に考え

* 原稿受付 2004年3月22日.

^{*1} 正員, 山形大学工学部(〒992-8510 米沢市城南4-3-16).^{*2} 山形大学大学院理工学研究科.^{*3} 正員, 山形大学大学院理工学研究科.

E-mail: k.suzuki@yz.yamagata-u.ac.jp

Fig. 1 Coordinate system of a circular plate

ると定常回転時のラグランジュアン L^* は、

$$L^* = \frac{\pi E h_0 a^2}{(1-\nu^2)} \int_0^1 \Phi \left[a^2 (z + U^*)^2 - \left\{ \left(\frac{dU^*}{dz} \right)^2 + 2\nu \frac{dU^*}{dz} \cdot \frac{U^*}{z} + \left(\frac{U^*}{z} \right)^2 \right\} \right] z dz \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比、 $a^2 = \rho(1-\nu^2)\Omega^2 a^2/E$ (ρ は密度) は無次元回転数である。ラグランジュアンの停留条件 $\delta L^* = 0$ を求めると、運動方程式は、

$$\Phi \left\{ \frac{d^2 U^*}{dz^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{dU^*}{dz} - \frac{U^*}{z^2} + a^2 U^* \right\} + \frac{d\Phi}{dz} \left(\frac{dU^*}{dz} + \nu \frac{U^*}{z} \right) = -\Phi a^2 z \quad \dots\dots\dots (2)$$

$z=1$, $b/a=(\eta)$ における境界条件式は、

$$\left(\frac{dU^*}{dz} + \nu \frac{U^*}{z} \right) \delta U^* = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

古典理論の場合、式(2)の左辺第4項の $a^2 U^*$ は省略される。

2・2 面内振動の場合 定常回転によって初期張力が生じている状態で、さらに微小振動(面内振動)する場合の基礎方程式について考える。変位成分は定常回転時による変形量(*印)と振動時による変形量(~印)の和とし、半径方向変位 u 、円周方向変位 v を次式で表す。

$$u = u^* + \tilde{u}, \quad v = \tilde{v} \quad \dots\dots\dots (4)$$

運動エネルギー ($\hat{T}$)、ひずみエネルギー ($\hat{U}$) を次の

Fig. 2 Thickness variation of the circular plate

ようにおく⁽¹⁷⁾。

$$\hat{T} = \frac{h_0}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi \rho \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Omega \tilde{v} \right)^2 + \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \Omega (r + u^* + \tilde{u}) \right\}^2 \right] r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\hat{U} = \frac{h_0 E}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Phi \left\{ \epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + 2\nu \epsilon_r \epsilon_\theta + \frac{(1-\nu)}{2} \epsilon_{r\theta}^2 \right\} r dr d\theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\epsilon_r, \epsilon_\theta$ は面内垂直ひずみ、 $\epsilon_{r\theta}$ はせん断ひずみで次式を用いる。

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

円板全体のラグランジュアンは、

$$L = \hat{T} - \hat{U} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(4)~(7)を式(8)に代入しラグランジュアンを求める。ただし、定常回転項と振動項についてはそれぞれ二次まで、定常回転項と振動項の相乗項については最高三次まで(ただし、定常回転項の二次と振動項の一次の積は無視)とし、その他の項は高次の微小項として無視する。無次元座標 $z=r/a$ 、無次元変位 $U^*=u^*/a$ 、 $\tilde{U}=\tilde{u}/a$ 、 $\tilde{V}=\tilde{v}/a$ を導入し、ハミルトンの原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ を適用すると[ただし、式(2)、(3)を考慮する]、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt / \beta_0 D_0 = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (E_1 \delta \tilde{U} + E_2 \delta \tilde{V}) d\theta dz dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi} (T_1 \delta \tilde{U} + T_2 \delta \tilde{V})|_1^0 d\theta dt = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$E_1 = \Phi \left[\lambda z \left(\Omega^2 \tilde{U} + 2\Omega \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} \right) + z \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} - \frac{\tilde{U}}{z} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \theta \partial z} - \frac{3-\nu}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ z F_1(U^*) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right\} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \theta^2} F_2(U^*) - \nu \frac{\partial U^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial z} \left(2z \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + \nu \tilde{U} + \nu \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} \right) \right\} \\
& + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial z} \left\{ \frac{2}{z} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z \partial \theta} \right\} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left[z \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + \nu \left(\tilde{U} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} \right) + z F_1(U^*) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right. \\
& \left. + \frac{\partial U^*}{\partial z} \left\{ 2z \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + \nu \left(\tilde{U} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2 = & \Phi \left[\lambda z \left\{ \Omega^2 \tilde{V} - 2\Omega \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} \right\} + z \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} - \frac{\tilde{V}}{z} \right) + \frac{1}{z} \cdot \frac{3-\nu}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} \right. \\
& + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z \partial \theta} + \nu \frac{\partial U^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ z F_1(U^*) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \right\} + \frac{1}{z} F_2(U^*) \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial z} \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \theta \partial z} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} \right\} \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left[\frac{1-\nu}{2} \left\{ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} \left(1 + \frac{\partial U^*}{\partial z} \right) + z \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} - \tilde{V} \right\} + z F_1(U^*) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \right] \right] \dots \dots \dots (11)
\end{aligned}$$

$$T_1 = -\Phi \left[z \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + \nu \left(\tilde{U} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} \right) + z F_1(U^*) \left(1 + \frac{\partial U^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial U^*}{\partial z} \left\{ 2z \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + \nu \left(\tilde{U} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (12)$$

$$T_2 = -\Phi \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} + z \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} - \tilde{V} \right) + z F_1(U^*) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} \right]$$

また,

$$\begin{aligned}
D_0 &= \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta_0 = \frac{12a^2}{h_0^2}, \quad \eta = \frac{b}{a} \\
F_1(U^*) &= \frac{\partial U^*}{\partial z} + \nu \frac{U^*}{z}, \quad F_2(U^*) = \frac{U^*}{z} + \nu \frac{\partial U^*}{\partial z} \\
h &= h_0 \Phi(z), \quad \lambda = \frac{\rho a^2(1-\nu^2)}{E} \dots \dots \dots (13)
\end{aligned}$$

運動方程式は,

$$E_1 = E_2 = 0 \dots \dots \dots (14)$$

$z=1, \eta$ における境界条件式は,

$$T_1 \delta \tilde{U} = T_2 \delta \tilde{V} = 0 \dots \dots \dots (15)$$

3. 運動方程式の解

3・1 定常回転時の解 ここでは、孔なし円板の場合について考える。はじめに定常回転時の運動方程式の解について考える。

(a) 同次解 Φ を次のようにおく(ただし, $A_0=1$ とする)。

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \dots \dots \dots (16)$$

A_m は厚さの変化を表す関数 $\Phi(z)$ が与えられると定まる係数である。また同次解 [式(2)の右辺=0の解] を次のようにおく。

$$U_h = \sum_{m=0}^{\infty} P_m z^{m+N} \dots \dots \dots (17)$$

ここに, P_m は式(17)を式(2)の同次方程式に代入することにより逐次決定される係数である。すなわち,

$$\begin{aligned}
N=1, \quad P_1 &= -\frac{A_1(N+\nu)}{N(N+2)} P_0 \\
P_{m+2} &= -\frac{1}{(N+m+1)(N+m+3)} \\
&\times \left[\sum_{q=0}^{m+1} A_{m+2-q} P_q \{ (N+q+1)(N+q-1) \right. \\
&\quad \left. + (m+2-q)(q+N+\nu) \} + \alpha^2 \sum_{q=0}^m A_{m-q} P_q \right] \\
(m \geq 0) &\dots \dots \dots (18)
\end{aligned}$$

式(18)より係数 $P_m (m \geq 1)$ は P_0 を任意としてすべて P_0 で表される。

(b) 特殊解 特殊解を次のようにおく。

$$U_{sp} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{P}_m z^{m+1} \dots \dots \dots (19)$$

$\bar{P}_m$ は, 式(19)を式(2)に代入することにより以下のよう求められる。

$$\begin{aligned}
\bar{P}_0 &= \bar{P}_1 = 0 \\
\bar{P}_{m+2} &= -\frac{1}{(m+4)(m+2)} \\
&\times \left[\sum_{q=0}^{m+1} A_{m+2-q} \bar{P}_q \{ q(q+2) + (m+2-q)(q+1) \right. \\
&\quad \left. + \nu \} + \alpha^2 \sum_{q=0}^m A_{m-q} P_q + \alpha^2 A_m \right] \quad (m \geq 0) \\
&\dots \dots \dots (20)
\end{aligned}$$

式(2)の一般解は K_1 を任意定数として次式で表される。

$$U^* = K_1 U_h + U_{sp} \dots \dots \dots (21)$$

3・2 振動時の解 次に振動時の解について考える。ただし, ここでは孔なし円板の場合について考える。 $\tilde{U}, \tilde{V}$ を次のように変数分離する。

$$\begin{aligned}
\tilde{U} &= U(z) \cos(n\theta \pm pt), \quad \tilde{V} = V(z) \sin(n\theta \pm pt) \\
&\dots \dots \dots (22)
\end{aligned}$$

ここに, n は節直径の数, p は円振動数である。式(22)は円板に固定した回転座標系に対する波動解(+ pt :後進波, - pt :前進波)を表す。ここで,

$$\begin{aligned}
F_1(U^*), \quad F_2(U^*), \quad \frac{d\Phi}{dz} \\
F_1(U^*) &= \sum_{m=0}^{\infty} Q_m z^m, \quad F_2(U^*) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m z^m \\
\frac{d\Phi}{dz} &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) A_{m+1} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} C_m z^m \\
&\dots \dots \dots (23)
\end{aligned}$$

さらに式(21)の解 U^* を次のように z のべき級数で

表す.

$$U^* = \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^{m+1} \dots\dots\dots (24)$$

B_m は境界条件が与えられると定まる既知の係数である. このとき式(14)の解は次のように求まる.

$$U(z) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m z^{m+N}, \quad V(z) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m z^{m+N} \dots\dots\dots (25)$$

ここに, X_m, Y_m は式(22)～(25)を式(14)に代入することにより以下のように逐次決定される係数である. N は特性方程式の根を表す. 式(22)～(25)を式(14)に代入すると

$$[a_{11}X_0 + a_{12}Y_0]z^{N-1} + [a_{13}X_1 + a_{14}Y_1 + F_{1a}]z^N + \sum_{m=0}^{\infty} [a_{15}(m)X_{m+2} + a_{16}(m)Y_{m+2} + F_{ma}]z^{m+N+1} = 0 \quad \dots (26)$$

$$[a_{21}X_0 + a_{22}Y_0]z^{N-1} + [a_{23}X_1 + a_{24}Y_1 + \bar{F}_{1a}]z^N + \sum_{m=0}^{\infty} [a_{25}(m)X_{m+2} + a_{26}(m)Y_{m+2} + \bar{F}_{ma}]z^{m+N+1} = 0 \quad \dots (27)$$

ここに,

$$a_{11} = (N^2 - 1) - \frac{n^2}{2}(1 - \nu) + B_0\{2(N^2 - n^2) + N^2(1 + \nu)\}, \quad a_{12} = -\frac{n}{2}\{3 - \nu - N(1 + \nu)\}$$

$$- B_0 n \left\{ \frac{1}{2}(1 - \nu)(1 - N) - \nu N \right\}$$

$$a_{13} = (N + 1)^2 - 1 - \frac{n^2}{2}(1 - \nu) + (1 + N)^2 Q_0 - n^2 R_0 + B_0\{(1 + N)(2N + 2 + \nu) - \nu(1 + N) - n^2(1 - \nu)\}$$

$$a_{14} = \frac{n}{2}[(1 + \nu)(1 + N) - (3 - \nu)] + B_0\left[n\nu(1 + N) + \frac{1}{2}(1 - \nu)nN\right]$$

$$a_{15}(m) = (N + m + 2)^2 - 1 - \frac{n^2}{2}(1 - \nu) + (N + m + 2)^2 Q_0 - n^2 R_0 \\ + B_0\{(m + N + 2)(2m + 4 + 2N + \nu) - n^2(1 - \nu) - \nu(N + m + 2)\}$$

$$a_{16}(m) = \frac{n}{2}\{(1 + \nu)(N + m + 2) + \nu - 3\} + B_0\left\{(m + N + 2)n\nu + \frac{n}{2}(1 - \nu)(m + N + 1)\right\}$$

$$a_{21} = -\frac{n}{2}[3 - \nu + N(1 + \nu) + B_0\{(1 - \nu)(N + 1) + 2\nu N\}]$$

$$a_{22} = \frac{1 - \nu}{2}(N^2 - 1) - n^2 + B_0(1 + \nu)(N^2 - n^2)$$

$$a_{23} = -\frac{n}{2}[3 - \nu + (1 + \nu)(N + 1) + B_0\{(1 - \nu)(N + 2) + 2\nu(N + 1)\}]$$

$$a_{24} = \frac{(1 - \nu)}{2}\{(N + 1)^2 - 1\} - n^2 + (1 + \nu)B_0\{(N + 1)^2 - n^2\}$$

$$a_{25}(m) = -\frac{n}{2}[3 - \nu + (1 + \nu)(N + m + 2) + B_0\{2\nu(N + m + 2) + (1 - \nu)(N + m + 3)\}]$$

$$a_{26}(m) = \frac{1 - \nu}{2}\{(N + m + 2)^2 - 1\} - n^2 + (m + N + 2)^2 Q_0 - n^2 R_0$$

$$F_{1a} = X_0 \left[B_1\{2(N + 1)(2N + \nu) - 2n^2(1 - \nu) - 2\nu N\} + N(N + 1)Q_1 - n^2 R_1 + A_1 \left[N^2 - 1 - \frac{n^2}{2}(1 - \nu) \right. \right. \\ \left. \left. + N + \nu + B_0\{(2N + \nu) - n^2(1 - \nu) + N(2N + \nu) - \nu N\} + Q_0 N(N + 1) - n^2 R_0 \right] \right]$$

$$+ Y_0 \left[B_1\{2n\nu(N + 1) + n(1 - \nu)(N - 1)\} + A_1 \left[\frac{n}{2}\{(1 + \nu)N - (3 - \nu)\} + n\nu \right. \right.$$

$$\left. \left. + B_0\left\{n\nu(1 + N) + \frac{1 - \nu}{2}n(N - 1)\right\} \right] \right]$$

$$F_{ma} = \sum_{q=0}^m A_{m-q}\{(\alpha^2 + \beta^2)X_q \pm 2\alpha\beta Y_q\} + \sum_{q=0}^{m+1} A_{m+2-q}\left[\left\{(N + q)^2 - 1 - \frac{n^2}{2}(1 - \nu)\right\}X_q \right.$$

$$\left. + \frac{n}{2}\{(1 + \nu)(N + q) + \nu - 3\}Y_q\right] + \sum_{q=0}^{m+1} \left[(N + m + 2)(N + q)Q_{m+2-q}X_q - n^2 R_{m+2-q}X_q \right.$$

$$\left. - \nu(m + 3 - q)(N + q)B_{m+2-q}X_q + (m + 2 + N)(m + 3 - q)B_{m+2-q}\{(2q + 2N + \nu)X_q + n\nu Y_q\} \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \nu}{2}(m + 3 - q)B_{m+2-q}\{-2n^2 X_q + n(q + N - 1)Y_q\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=0}^{m+1} A_{m+2-s} \left[(s+N) \sum_{q=0}^s (N+q) Q_{s-q} X_q - n^2 \sum_{q=0}^s R_{s-q} X_q - \nu \sum_{q=0}^s (s+1-q)(N+q) B_{s-q} X_q \right. \\
& + (s+N) \sum_{q=0}^s (s+1-q) B_{s-q} \{ (2q+2N+\nu) X_q + n\nu Y_q \} + \frac{1-\nu}{2} \sum_{q=0}^s (s+1-q) B_{s-q} \{ -2n^2 X_q \\
& + n(q+N-1) Y_q \} \left. \right] + \sum_{q=0}^{m+1} C_{m+1-q} \{ (q+N+\nu) X_q + n\nu Y_q \} + \sum_{s=0}^{m+1} C_{m+1-s} \sum_{q=0}^s \{ (N+q) Q_{s-q} X_q \\
& + (s+1-q) B_{s-q} \{ (2q+2N+\nu) X_q + n\nu Y_q \} \} \\
\bar{F}_{1a} = & X_0 \left[-B_1 \{ 2nN\nu + n(1-\nu)(N+2) \} + A_1 \left[-\frac{n}{2} \{ 4-2\nu + (1+\nu)N \} + B_0 \left\{ -n\nu N - \frac{n}{2} (1-\nu)(N+2) \right\} \right] \right] \\
& + Y_0 \left[A_1 \left[\frac{1-\nu}{2} (N^2+N-2) - n^2 + \{ (N^2+N) - n^2 \} (1+\nu) B_0 \right] + (N^2+N) Q_1 - n^2 R_1 \right] \\
\bar{F}_{ma} = & \sum_{q=0}^m A_{m+2-q} \{ (\alpha^2 + \beta^2) Y_q \pm 2\alpha\beta X_q \} + \sum_{q=0}^{m+1} A_{m+2-q} \left[\left\{ \frac{1-\nu}{2} ((q+N)^2 - 1) - n^2 \right\} Y_q \right. \\
& - \frac{n}{2} \{ 3-\nu + (1+\nu)(N+q) \} X_q \left. \right] + \sum_{q=0}^{m+1} \left[-n\nu(m+3-q)(N+q) B_{m+2-q} X_q \right. \\
& + (m+N+2)(N+q) Q_{m+2-q} Y_q - n^2 R_{m+2-q} Y_q - \frac{n}{2} (1-\nu)(m+3-q)(m+N+3) B_{m+2-q} X_q \left. \right] \\
& + \sum_{s=0}^{m+1} A_{m+2-s} \left[-n\nu \sum_{q=0}^s (s+1-q)(N+q) B_{s-q} X_q + (s+N) \sum_{q=0}^s Q_{s-q} (N+q) Y_q - n^2 \sum_{q=0}^s R_{s-q} Y_q \right. \\
& - \frac{n}{2} (1-\nu) \sum_{q=0}^s (s+1-q)(s+N+1) B_{s-q} X_q \left. \right] + \sum_{q=0}^{m+1} C_{m+1-q} \frac{1-\nu}{2} \{ -nX_q + (q+N-1) Y_q \} \\
& + \sum_{s=0}^{m+1} C_{m+1-s} \left[\sum_{q=0}^s \{ (N+q) Q_{s-q} Y_q - \frac{n}{2} (1-\nu)(s+1-q) B_{s-q} X_q \} \right] \quad [\text{式(22)と複合同順}] \quad \cdots \cdots (28)
\end{aligned}$$

また、 β は無次元振動数で

$$\beta = \sqrt{\{(1-\nu^2)/E\} \rho p^2 a^2} \quad \cdots \cdots (29)$$

式(26), (27)が z の任意の値に対して常に成立するためには、式(26), (27)の [] 内が零になることが必要である。 z^{N-1} の係数より

$$a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 = 0 \quad \cdots \cdots (30)$$

$$a_{21}X_0 + a_{22}Y_0 = 0 \quad \cdots \cdots (31)$$

式(30), (31)が $X_0 = Y_0 = 0$ 以外の解を持つ条件 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ より N の 4 次式が得られる。したがって、 N は 4 実根 ($\pm N_1, \pm N_2$) 求まるが、孔なし円板を考えているので正の根だけを考える。また、式(26), (27)の z^N の係数より次の式が求まる。

$$a_{13}X_1 + a_{14}Y_1 + F_{1a} = 0 \quad \cdots \cdots (32)$$

$$a_{23}X_1 + a_{24}Y_1 + \bar{F}_{1a} = 0 \quad \cdots \cdots (33)$$

また、 z^{m+N+1} の係数より次式が求まる。

(a) $\phi = e^{-0.5z}$

(b) $\phi = e^{0.5z}$

Fig. 3 Variations of thickness of circular plate

$$a_{15}(m)X_{m+2} + a_{16}(m)Y_{m+2} + F_{ma} = 0 \quad \cdots \cdots (34)$$

$$a_{25}(m)X_{m+2} + a_{26}(m)Y_{m+2} + \bar{F}_{ma} = 0 \quad \cdots \cdots (35)$$

したがって、係数 $X_{m+2}, Y_{m+2} (m \geq 0)$ はすべて X_0, Y_0 で表される。本報では $X_0 = 1$ として係数を決定する。 $N = N_1$ のときに求まる一組の独立な解を (U_1, V_1), $N = N_2$ のときに求まる一組の独立な解を (U_2, V_2) とすると、運動方程式(振動方程式)の一般解はこれら二組の独立な解を線形結合した式で与えられる。すなわち H_1, H_2 を境界条件から決定される任意定数として

$$\begin{aligned}
U &= H_1 U_1 + H_2 U_2 \\
V &= H_1 V_1 + H_2 V_2
\end{aligned} \quad \cdots \cdots (36)$$

4. 数 値 計 算

数値計算は周辺自由および周辺固定の孔なし円板について行った。解 U^*, U, V は解の係数を各 80 項求めて計算した(解の収束けた数は 16 けた)。本解法の妥当性、信頼性を調べるために本報のプログラムを用いて一様厚の場合の振動数を計算し、文献(17)の結果と比較したが、完全に一致することを確認した。

4.1 定常回転時の場合 境界条件としては式(3)より周辺自由の場合

$$\left(\frac{\partial U^*}{\partial z} + \nu \frac{U^*}{z} \right) \Big|_{z=1} = 0 \quad \cdots \cdots (37)$$

周辺固定の場合

$$U_z^*|_{z=1} = 0 \quad \cdots \cdots (38)$$

とし、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。以下に示す図で $\alpha = \sqrt{\{(1-\nu^2)/E\} \rho \Omega^2 a^2}$ は無次元回転数である。図 3 に

変厚円板(指数関数的に変化する場合)の断面図を示す。図4は孔なし円板で周辺自由と周辺固定の場合の変位分布を示す。図4より、本報の理論のほうが古典理論より値が高くなることがわかる。ただし、周辺固定の場合は両理論にそれほど差が見られない。図5は周辺自由の場合で回転数による応力の変化を古典理論と本理論の比較によって示したものである。ここで、 $[S_z, S_\theta] = [\sigma_z^*, \sigma_\theta^*] / \{E/(1-\nu^2)\}$ 。回転数が大きくなるにつれて、両理論の差が大きくなることがわかる。図には示していないが、周辺固定の場合は両理論の結果にあまり差は見られない。

4.2 面内振動の場合 数値計算は、周辺自由と周辺固定の孔なし円板について行った。境界条件は式

(15)より周辺自由の場合、 $z=1$ で

$$T_1 = T_2 = 0 \quad (39)$$

周辺固定の場合

$$\tilde{U} = \tilde{V} = 0 \quad (40)$$

以後に示す図において、 $\beta = \sqrt{\{(1-\nu^2)/E\} \rho p^2 a^2}$ は無次元振動数である。図6, 7は、厚さが指数関数的に変化する孔なし円板の振動数曲線である。

図中F-1st, F-2ndは一次、二次モードの前進波、B-1st, B-2ndは一次、二次モードの後進波を表す。なお、 $\alpha=0$ の場合(回転しない場合)の振動数は本解法では求まらないので、文献(19)と同じ解法を用いて計算した。図6は周辺自由の場合の振動数曲線である。周辺自由の場合、振動数は無次元回転数 α が大き

Fig. 4 Displacement distribution of a rotating circular plate without a hole ($\Phi = e^{-0.5z}$)

Fig. 5 Relation between stress and nondimensional number of revolutions of a circular plate without a hole (outer edge free, $\Phi = e^{-0.5z}$)

Fig. 6 Variations of frequencies by the function $\Phi(z)$ (outer edge free, present theory)

Fig. 7 Variations of frequencies by the function $\Phi(z)$ (outer edge clamped, present theory)

Table 1 First and second frequencies β of circular plate with lineary varying thickness ($\phi=1+A_1z$, $n=2$)

B·C		Free			Clamped		
Wave	α	$A_1=0.5$	$A_1=0$	$A_1=-0.5$	$A_1=0.5$	$A_1=0$	$A_1=-0.5$
FW	0.1	1.283	1.315	1.361	3.024	2.959	2.792
		2.554	2.552	2.567	4.146	4.092	3.992
	0.3	1.208	1.252	1.365	2.856	2.786	2.654
		2.702	2.672	2.692	4.147	4.095	4.003
	0.5	1.236	1.272	1.369	2.669	2.606	2.490
		2.936	2.916	2.891	4.129	4.080	3.990
	0.7	1.332	1.353	1.428	2.443	2.390	2.291
		3.264	3.231	3.175	4.069	4.023	3.936
BW	0.1	1.455	1.489	1.541	3.196	3.137	2.986
		2.477	2.484	2.514	4.122	4.074	3.980
	0.3	1.731	1.773	1.883	3.391	3.319	3.179
		2.450	2.465	2.510	4.070	4.031	3.952
	0.5	2.084	2.115	2.198	3.544	3.467	3.327
		2.490	2.513	2.573	3.992	3.968	3.906
	0.7	2.326	2.344	2.396	3.551	3.478	3.347
		2.757	2.781	2.850	3.944	3.935	3.889

Fig. 8 Displacement distribution of rotating circular plate with edge free (present theory, $n=2$)

くなるにつれて高くなる。また、一部の例外を除き、厚さが減少する円板は、等厚円板と比較して振動数が高く、厚さが増加する円板は振動数が低くなっている。これは、円板の質量効果による影響と考えられる。なお、図6の振動数曲線上の①～⑧の数字はモードの計算点である。図7は周辺固定の場合の振動数曲線である。周辺固定の場合、振動数は無次元回転数 α が大きくなるにつれていったん高くなる場合もあるが、徐々に低くなる傾向が見られる。厚さが減少する円板は、等厚円板と比較して剛性が小さくなることにより振動数が低くなり、厚さが増加する円板は、剛性が高くなることにより振動数が高くなると考えられ

る。B-2とF-2の振動数曲線は接近し、 $\alpha=0.8$ 付近ではクロスする現象が見られる。図8は図6の振動数曲線上の①～⑧点の振動モードで、本理論の場合の結果($n=2$)である。図中の各変位は最大変位を1として表している。図8からわかるように同じ次数の振動数曲線上でもモードは変化する。図7の振動数曲線上の点のモードは紙面の都合上省略するが、一様厚の場合〔文献(17)参照〕と同様、同じ次数の曲線上でモードは複雑に変化する。B-2とF-2の振動数曲線は $\alpha=0.8$ 付近でクロスするが、両者のモードは大部異なる。表1は厚さが直線的に変化する円板の無次元振動数 β の値を示す。周辺自由、周辺固定の場合とも指数

関数で変化する円板の振動数に近い値となっている。
 なお、 $\alpha=0$ の場合の解ははまだ見つかっておらず、今後検討する必要がある。

5. 結 言

本報では、厚さが半径方向に連続的に変化する円板の面内振動をより正確に解析する一般的な方法を示した。また、数値計算では厚さが半径方向に指数関数的に変化する円板と直線的に変化する円板の固有振動数、固有振動モードを求め、その特性を明らかにした。

文 献

- (1) Southwell, R. V., *Proc. R. Soc. London*, **101** (1922), 133-153.
- (2) Eversman, W. and Dodson Jr., R. O., *AIAA J.*, **7**-10 (1969), 2010-2012.
- (3) 坂田勝・ほか2名, 機論, **40**-331 (1974), 732-739.
- (4) Ramaiah, G. K., *J. Sound Vib.*, **74**-2 (1981), 303-310.
- (5) Adams, G. G., *Int. J. Mech. Sci.*, **29**-8 (1987), 525-531.
- (6) Chonan, S., *J. Appl. Mech.*, **54** (1987), 967-968.
- (7) Hutton, S. G., Chonan, S. and Lehmann, B. F., *J. Sound Vib.*, **112** 3 (1987), 527-539.
- (8) Sinha, S. K., *Trans. ASME, L*, **110** (1988), 508-514.
- (9) Sinha, S. K., *J. Sound Vib.*, **122**-2 (1988), 217-231.
- (10) 長南征二・ほか1名, 機論, **54**-502, C (1988), 1181-1188.
- (11) Yang, S. M., *Trans. JSME, L*, **115** (1993), 159-164.
- (12) Lee, H. P. and NG, T. Y., *J. Sound Vib.*, **187**-1 (1995), 39-50.
- (13) Tomioka, T., Kobayashi, Y. and Yamada, G., *J. Sound Vib.*, **191** 1 (1996), 53-73.
- (14) Mignolet, M. P., Eick, C. D. and Harish, M. V., *J. Sound Vib.*, **196**-5 (1996), 537-577.
- (15) Timoshenko, S. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 2nd ed., (1951), 69-73, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- (16) 本田善久・ほか2名, 機論, **54**-507, C(1988), 2610-2616.
- (17) 鈴木勝義・ほか1名, 機論, **66**-651, C(2000), 3560-3567.
- (18) Suzuki, K., Hiroyuki, Y. and Xuelan, Z., *JSME Int. J.*, **45** 1 (2002), 54-59.
- (19) 鈴木勝義・ほか3名, 機論, **49**-438, C(1983), 154-164.