非線形集中ばねで支持された粘弾性ブロックの 減衰振動の有限要素解析*

山口 誉夫^{*1}, 斉藤 友明^{*2}, 永井 健一^{*1}
丸山 真一^{*1}, 黒沢 良夫^{*3}, 松村 修二^{*3}

Analysis of Damped Vibration for a Viscoelastic Block Supported by a Nonlinear Concentrated Spring Using FEM

Takao YAMAGUCHI^{*4}, Tomoaki SAITO, Ken-ichi NAGAI,
Shinichi MARUYAMA, Yoshio KUROSAWA and Shuuji MATSUMURA

^{*4} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

This paper describes vibration analysis using finite element method for a viscoelastic block supported by a nonlinear concentrated spring. The restoring force of the spring has cubic nonlinearity and linear hysteresis damping. Finite element for the nonlinear spring is expressed and is connected to the viscoelastic block modeled by linear solid finite elements in consideration with complex modulus of elasticity. Further, the discretized equations in physical coordinate are transformed into the nonlinear ordinary coupled equations using normal coordinate corresponding to linear natural modes. This transformation yields computation efficiency. Influences of share of dissipated energy on nonlinear frequency responses for the viscoelastic block are clarified.

Key Words: Computer Aided Analysis, Finite Element Method, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Damping

1. 緒 言

精密な電子機器や医療機器などの軽量構造を集中ばねで防振支持し、外部からの振動や衝撃から保護することが行われている。これらの軽量構造は、剛性があまり高くなく、一般には弾性体である。また、防振支持する対象が高分子で構成される場合もあり、その場合は軽量構造は粘弾性体となる。例えば樹脂製のゴム製の物体、食品、医薬品、生体などが、このカテゴリにあてはまると考えられる。

一方、集中ばねなどの防振要素には荷重と変位の間に非線形性を持つものもある。したがって、弾性体あるいは粘弾性体と非線形ばねを接続した問題の解明が重要となる。

集中質量に非線形集中ばねを接続した系の非線形振動問題は多くの研究者により解明されてきている。近年では、この系について Feeny らが Proper Orthogonal Mode の同定を行っている⁽¹⁾。

近藤らは非線形支持されたばねが多数連結された大規模構造の強制振動について、高速な安定判別法を提案している⁽²⁾。Shaw らは中央に非線形集中ばねが存在する両端単純支持はりの Nonlinear Modal Analysis を定式化している⁽³⁾。著者らの一部はブロック状の弾性構造物が非線形集中ばねで支持された系の非線形振動特性を有限要素法で高速に解析する手法を提案している⁽⁴⁾。しかし、ブロック状の粘弾性体が非線形集中ばねで支持された系について振動特性を解析した例は見当たらない。

本論では、線形ヒステリシス減衰を有する非線形集中ばねで粘弾性ブロックを支持し、鉛直方向の周期加振力を加え動的応答を解析する。解析において、非線形集中ばねの有限要素を定式化し、粘弾性ブロックの離散化方程式と接合した。ここで得られる運動方程式は、物理座標で定義され、三次の非線形連立常微分方程式となる。しかし、物理座標でのモデルでは自由度が大きくなり、解を求めるために時間軸で直接積分を行うと、膨大な計算時間が必要となる。そこで、先に著者らの一部が提案した方法⁽⁴⁾を用いて、運動方程式を、線形固有振動形を基準座標とする三次の非線形連立常微分方程式に変換し、計算自由度を縮小した。その際に粘弾性体の減衰特性の近似解析法であるモード歪みエネルギー法⁽⁵⁾⁽⁶⁾の概念

* 原稿受付 2004年5月7日。

^{*1} 正員、群馬大学工学部(☎376-8515 桐生市天神町1-5-1)。

^{*2} 学生員、群馬大学大学院機械システム工学専攻。

^{*3} 正員、富士重工(株)技術研究所(☎373-8555 太田市スバル町1-1)。

E-mail: yamagme4@me.gunma-u.ac.jp

を新たに導入し、運動方程式中の減衰項の自由度縮小もやっている。自由度を縮小した運動方程式に調和バランス法を適用し非線形共振応答を求めた。

この有限要素法（以降、提案FEMと呼ぶ）の有効性を、集中ばねが弱非線形性を有する条件で検証した。また、ブロックと集中ばねの散逸エネルギーの分担量を解析し、ブロックのヤング率が共振応答へ与える影響を検討した。

2. 解析モデル

非線形集中ばねを接続した粘弾性ブロックのモデルを図1に示す。粘弾性ブロックは微小変形を仮定し、さらに複素弾性率を導入した有限要素法を用いた。図中の剛なガイドを設置し、ガイド面に法線方向のブロックの運動を拘束した。減衰を考慮しない条件での非線形集中ばねの復元力 R_{ax} -変位 U_{ax} 曲線を図2に示す。三次の非線形復元項を有する漸硬ばねとした。この特性に線形ヒステリシス減衰を与え以降の計算を行った。

3. 基礎式

図1のように粘弾性ブロックに線非線形集中ばねが接続される場合を考える。この系の有限要素による離散化方程式を求める。

3.1 非線形集中ばねの離散化方程式 非線形集中ばねは図1の x 方向に弾性主軸を有するとする。非線形集中ばねと粘弾性ブロックが接合される節点 α の x 方向変位を U_{ax} とおく。ばねによる節点力 R_{ax} が次式で与えられる場合を考える。

$$R_{ax} = \gamma_1 U_{ax} + \gamma_2 U_{ax}^2 + \gamma_3 U_{ax}^3 \quad (1)$$

ただし、この集中ばねには線形ヒステリシス減衰を導入し $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1(1+j\eta_s)$ とする。ここで、 $\bar{\gamma}_1$ は γ_1 の実数部、 η_s は集中ばねの材料損失係数、 j は虚数単位である。この

Fig.1 Schematic model for numerical analysis

関係をマトリックスで記述すると次式となる。

$$\{r\} = [\bar{\gamma}_1] \{U_s\} + \{\bar{d}\} \quad (2)$$

ここで、

$$\{r\} = \{R_{ax} \ R_{ay} \ R_{az}\}^T, \quad \{U_s\} = \{U_{ax} \ U_{ay} \ U_{az}\}^T, \\ [\bar{\gamma}_1] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\bar{d}\} = \begin{bmatrix} \gamma_2 U_{ax}^2 + \gamma_3 U_{ax}^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{ay} = R_{az} = 0$$

である。

3.2 粘弾性ブロックの離散化方程式

ブロックは三次元有限要素で分割する。ブロックには微小変形を仮定し線形三次元有限要素を用いる。要素内部の変位ベクトルを $\{U_b\} = \{U_x, U_y, U_z\}^T$ とおき、 $\{U_b\}$ を節点変位ベクトル $\{U_e\}$ と形状関数 $[N]^T$ で次式のように近似する。

$$\{U_b\} = [N]^T \{U_e\} \quad (3)$$

具体的には、本報告では非適合モードを考慮した8節点 isoparametric solid 要素でブロックをモデル化した^{(10), (11)}。

応力ベクトル $\{\sigma\}$ と歪みベクトル $\{\epsilon\}$ との関係は、次式となる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (4)$$

$[D]$ はヤング率とポアソン比で構成される。 $\{U_b\}$ と歪みベクトル $\{\epsilon\}$ との関係は次式となる。

$$\{\epsilon\} = [A] \{U_b\} = [B] \{U_e\} \quad (5)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad [B] = [A][N]^T \quad (6)$$

Fig.2 Restoring force of nonlinear concentrated spring

要素の歪みエネルギー $\tilde{U}$ 、運動エネルギー $\tilde{T}$ 、ポテンシャルエネルギー $\tilde{V}$ を求め、ラグランジュの方程式からブロックの要素の離散化方程式を次式から得る。

$$[M_e]\{\ddot{u}_e\} + [K_e]\{u_e\} = \{f_e\} \quad \text{--- (7)}$$

$$[M_e] = \iiint_e \rho_e [N][N]^T dx dy dz \quad \text{--- (8)}$$

$$[K_e] = \iiint_e [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad \text{--- (9)}$$

ここで、 $\iiint_e dx dy dz$ は要素領域内での積分を表す。

$[M_e]$ 、 $[K_e]$ 、 $\{u_e\}$ 、 $\{f_e\}$ はそれぞれブロックの要素質量行列、要素剛性行列、要素内の節点変位ベクトル、要素内の節点力ベクトルである。 ρ_e は要素 e の質量密度である。また、式中の $\dot{}$ は時間微分を表す。

粘弾性特性を考慮するためにブロックの弾性率 E を複素弾性率($E = \bar{E}(1+j\eta_b)$)、 $\bar{E}$:弾性率の実部、 η_b :ブロックの材料損失係数)とする。その結果、式(4)中の $[D]$ が複素数となり、さらに式(7)、式(9)中の要素剛性行列 $[K_e]$ も複素行列となる。

ブロック全系で要素方程式を重ね合わせると次式を得る。

$$[M_b]\{\ddot{u}_b\} + [K_b]\{u_b\} = \{f_b\} \quad \text{--- (10)}$$

ここで $[M_b]$ 、 $[K_b]$ 、 $\{f_b\}$ 、 $\{u_b\}$ はそれぞれブロック全系の質量行列、複素剛性行列、節点力ベクトル、変位ベクトルである。

3.3 粘弾性ブロックを集中ばねに接続した系の離散化方程式 式(2)の $\{r\}$ を式(10)中の粘弾性ブロックと非線形ばねの接合節点 α の節点力に加え全系の離散化方程式を得る。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} + \{\hat{d}\} = \{f\} \quad \text{--- (11)}$$

ただし、 $\{u\}$ 、 $[M]$ 、 $[K]$ 、 $\{f\}$ は全系の変位ベクトル、質量行列、複素剛性行列、節点力ベクトルである。 $\{\hat{d}\}$ は $\{\bar{d}\}$ を全系のサイズに変換したベクトルである。

3.4 モード減衰の近似計算 MAらの手法⁽¹³⁾を全要素の材料損失係数が異なる一般化した条件に拡張して適用し、モード減衰の近似式を導く。式(11)で外力項、非線形復元力項を $\{0\}$ とし $\{u\} = \{\phi\} \exp(j\omega t)$ を仮定すると、次の複素固有値問題の式を得る。

$$\sum_{e=1}^{e_{\max}} ([K_R]_e (1+j\eta_e) - (\omega^{(i)})^2 (1+j\eta_{\text{tot}}^{(i)}) [M]_e) \{\phi^{(i)}\} = \{0\} \quad \text{--- (12)}$$

$[K_R]_e$ は要素剛性行列の実数部、 $[M]_e$ は要素質量行列である。添え字 (i) は i 次振動モード、 $(\omega^{(i)})^2$ は複素固有値の実部、 $\{\phi^{(i)}\}$ は複素固有モード、 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ はモード損失係数、 $e_{\max}$ は要素数である。

材料減衰 η_e 、($e=1, 2, 3, \dots, e_{\max}$)に関し全要素の中で最大のものを $\eta_{\max}$ とする。また、以下の β_e を導入する。

$$\beta_e = \eta_e / \eta_{\max}, \beta_e \leq 1 \quad \text{--- (13)}$$

ここで $\eta_{\max} \ll 1$ と仮定し、微少量 $\mu = j\eta_{\max}$ を導入し、式(12)の解を漸近展開すると、次式を得る。

$$\{\phi^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\}_0 + \mu \{\phi^{(i)}\}_1 + \mu^2 \{\phi^{(i)}\}_2 + \dots \quad \text{--- (14)}$$

$$(\omega^{(i)})^2 = (\omega_0^{(i)})^2 + \mu^2 (\omega_2^{(i)})^2 + \mu^4 (\omega_4^{(i)})^2 + \dots \quad \text{--- (15)}$$

$$j\eta_{\text{tot}}^{(i)} = \mu \eta_1^{(i)} + \mu^3 \eta_3^{(i)} + \mu^5 \eta_5^{(i)} + \mu^7 \eta_7^{(i)} + \dots \quad \text{--- (16)}$$

ただし、 $\beta_e \leq 1$ であるので $\eta_{\max} \beta_e \ll 1$ が成立し μ
 β_e も μ と同様に微少量となる。 $\{\phi^{(i)}\}_0$ 、 $\{\phi^{(i)}\}_1$ 、 $\{\phi^{(i)}\}_2$
...と $(\omega_0^{(i)})^2$ 、 $(\omega_2^{(i)})^2$ 、 $(\omega_4^{(i)})^2$ 、...および $\eta_1^{(i)}$ 、 $\eta_3^{(i)}$ 、 $\eta_5^{(i)}$...は実数とする。

ついで式(14)式(15)式(16)を式(12)に代入し、 μ^0 と μ^1 の量ごとにまとめると次式を得る。

μ^0 の量:

$$\sum_{e=1}^{e_{\max}} ([K_R]_e - (\omega_0^{(i)})^2 [M]_e) \{\phi^{(i)}\}_0 = \{0\} \quad \text{--- (17)}$$

μ^1 の量:

$$\sum_{e=1}^{e_{\max}} (\mu \beta_e [K_R]_e - \mu \eta_1^{(i)} (\omega_0^{(i)})^2 [M]_e) \{\phi^{(i)}\}_1 = \{0\} \quad \text{--- (18)}$$

さらに式(17)、(18)を整理すると次式を得る。

$$\eta_{\text{tot}}^{(i)} = \sum_{e=1}^{e_{\max}} \eta_e S_e^{(i)} \quad \text{--- (19)}$$

ただし、

$$S_e^{(i)} = \{\phi^{(i)}\}_0^T [K_R]_e \{\phi^{(i)}\}_0 / \sum_{e=1}^{e_{\max}} \{\phi^{(i)}\}_0^T [K_R]_e \{\phi^{(i)}\}_0$$

は i 次振動モードで変形した条件での各要素の歪みエネルギー分担率(要素 e の歪みエネルギー/全系の歪みエネルギー)である。 $\{\phi^{(i)}\}_0$ は実固有モードで式(17)から求められる。同時に式(17)から共振周波数 $\omega^{(i)}/2\pi \approx \omega_0^{(i)}/2\pi$ が求められる。式(19)からモード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ は材料減衰 η_e と歪みエネルギー分担率 $S_e^{(i)}$ との積の全要素にわたる和から近似計算できる。ここで、 $\eta_e S_e^{(i)}$ は各要素の散逸エネルギーの分担量に相当し、これが大きい要素ほどモード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ への影響が大きい場所となる。なお、この減衰特性の近似計算式は先に著者らが粘弾性体と弾性体を組み合わせた構造の振動減衰を解析するために導出したものと同様な形式で、微小変形条件のもとでの実験や理論解との検証がなされている⁽⁶⁾。また、式(19)は、Johnsonらが開発したモード歪みエネルギー法⁽⁵⁾とも結果的に同じ形式になっている。

3.5 非線形離散化方程式の基準座標への変換

式(11)のような物理座標系で記述された運動方程式は自由度が大きく、直接計算すると膨大な時間が必要となる。そこで、式(11)に線形固有振動モードに対応する基準座標を導入し、自由度を縮小する。ただし、線形固有振動モード $\{\phi^{(i)}\}$ は3章4節の $\{\phi^{(i)}\}_0$ で $\{\phi^{(i)}\} \approx \{\phi^{(i)}\}_0$ と近似できるものとする。この $\{\phi^{(i)}\}_0$ に対応する基準座

標 $\tilde{b}_i$ を導入し, 変位 $\{u\}$ を $\tilde{b}_i$ で 次式のように記述する.

$$\{u\} = \sum_{i=1} \tilde{b}_i \frac{1}{n_i} \{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0 \quad \text{--- (20)}$$

ただし,

$$\{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0 = \frac{1}{n_i} \{\phi^{(i)}\}_0, \quad n_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}},$$

$m_i = \{\phi^{(i)}\}_0^T [M] \{\phi^{(i)}\}_0$, $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0^T [M] \{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0 = 1$ である.

式 (20) を式 (11) へ代入し, $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0$ の直交性を利用して整理すると, 基準座標系での全系の離散化運動方程式として次式を得る.

$$M(\tilde{b}_i) = \ddot{\tilde{b}}_i + \eta_{\text{tot}}^{(i)} \omega^{(i)} \dot{\tilde{b}}_i + (\omega^{(i)})^2 \tilde{b}_i + \sum_k \tilde{D}_{ijk} \tilde{b}_j \tilde{b}_k + \sum_j \sum_k \sum_l \tilde{E}_{ijkl} \tilde{b}_j \tilde{b}_k \tilde{b}_l - \tilde{P}_i = 0 \quad \text{--- (21)}$$

ただし,

$$\tilde{D}_{ijk} = \gamma_2 \frac{n_i}{n_j n_k} \tilde{\phi}_{\alpha ix} \tilde{\phi}_{\alpha jx} \tilde{\phi}_{\alpha kx},$$

$$\tilde{E}_{ijkl} = \gamma_3 \frac{n_i}{n_j n_k n_l} \tilde{\phi}_{\alpha ix} \tilde{\phi}_{\alpha jx} \tilde{\phi}_{\alpha kx} \tilde{\phi}_{\alpha lx},$$

$$\tilde{P}_i = n_i \{\phi^{(i)}\}_0^T \{f\},$$

$$\{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0 = \{\tilde{\phi}_{1ix}, \tilde{\phi}_{1jx}, \tilde{\phi}_{1lx}, \tilde{\phi}_{2ix}, \tilde{\phi}_{2jx}, \tilde{\phi}_{2lx}, \tilde{\phi}_{3ix}, \dots\}^T$$

また, $\tilde{\phi}_{\alpha ix}$ は非線形集中ばねと粘弾性ブロックの接合節点 α における x 方向の i 次固有ベクトル $\{\phi^{(i)}\}_0$ の成分である.

式 (21) は線形固有振動形に対応した基準座標 $\tilde{b}_i$ についての非線形連立三次常微分方程式である. なお, 式 (21) 中の右辺第 2 項の減衰項であるが, 定式化の過程で式 (19) と同じ形が得られ, 無理なく式 (21) にモード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ を導入できていることを付記しておく.

また, $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ は微小変形条件の歪みエネルギーから式 (19) により求めている. 非線形集中ばねについては微小変形ではないので非線形ばね定数 γ_2, γ_3 が線形ばね定数 $\bar{\gamma}_1$ よりも十分に小さいという弱非線形性の仮定が本解析法を用いるうえで必要となる.

基準座標 $\tilde{b}_i$ についての式 (21) を用いると, 物理座標での離散化方程式 (11) に比べ, 大幅に計算に必要な自由度を削減できる. 後述する数値計算例では, 物理座標では 15,504 自由度であったが, 基準座標では 20 自由度程度の計算となっている.

3.6 非線形周期応答 外力 $\tilde{P}_i$ を単一の角周波数 ω による加振力であると仮定する. すなわち式 (21) 中の $\{f\}$ は $\{f\} = \{P_d\} \cos \omega t$ となる. 加振振幅 $\{P_d\}$ は加振位置に対応する節点 β で加振方向の成分のみ非ゼロとなる. この場合の周期応答を求めるために, 対応する解を次式で仮定する.

$$\tilde{b}_i = C_{i1\kappa p} + \sum [C_{i1\kappa p} \cos(\kappa p \omega t) + C_{i2\kappa p} \sin(\kappa p \omega t)] \quad \text{--- (22)}$$

($i, p=1, 2, 3, \dots$)

なお, $C_{i1\kappa p}, C_{i2\kappa p}$ ($i, p=1, 2, 3, \dots$) は未定係数である. 主共振や高調波共振応答を求めるには, $\kappa=1$ とおき, 分数次調波共振応答では, $\kappa=1/n$ (n : 整数) を用いる. 式 (22) を式 (21) に代入し, 調和バランス法を適用すると, つぎの条件式を得る.

$$\frac{\kappa s \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\kappa s \omega}} M(\tilde{b}_i) \cos(\kappa p \omega t) dt = 0, \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

$$\frac{\kappa s \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\kappa s \omega}} M(\tilde{b}_i) \sin(\kappa p \omega t) dt = 0, \quad (s=1, 2, 3, \dots) \quad \text{--- (23)}$$

上式より得られる $C_{i1\kappa p}, C_{i2\kappa p}$ ($i, p=1, 2, 3, \dots$) に関する連立三次方程式をニュートンラプソン法で解くと, 共振応答の周期解を得る. 評価点 ξ における応答振幅の x 方向成分の実効値 W_{rms} は次式 (24) から求められる.

$$W_{\text{rms}} = \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \left[\left(\sum_k C_{i1\kappa p} \frac{1}{n_i} \tilde{\phi}_{\xi ix} \right)^2 + \left(\sum_k C_{i2\kappa p} \frac{1}{n_i} \tilde{\phi}_{\xi ix} \right)^2 \right] + \left(\sum_k C_{i2\kappa 0} \frac{1}{n_i} \tilde{\phi}_{\xi ix} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad \text{--- (24)}$$

($i=1, 2, 3, \dots; p=1, 2, 3, \dots$)

ここで, $\tilde{\phi}_{\xi ix}$ は応答観測位置 ξ における i 次振動形に対応する固有ベクトルの x 方向成分である.

4. 計算結果

4.1 計算方法の検証 提案法について解析法と開発プログラムを検証する. 他の解析方法で解が得られる条件での結果を比較する. 具体的には, 1. 微小振幅の条件と 2. 剛体ブロック+非線形集中ばねの条件で検証を行う.

なお, 以降の計算では, 非線形集中ばねのばね定数は $\bar{\gamma}_1=980[\text{N/mm}], \gamma_2=0[\text{N/mm}^2], \gamma_3=9.8[\text{N/mm}^3]$ と弱非線形の条件とした. ブロックは図 1 のような $15\text{mm} \times 16\text{mm} \times 18\text{mm}$ の大きさの直方体とし, その質量密度は, $7.8 \times 10^3[\text{kg/m}^3]$ とした. また, 式 (17) の固有値計算にはサブスペース法を用いた. 以降, 記号 (i, j) により共振応答を分類した. i は誘起される i 次の振動モードを表す. j は共振応答の種類で $j=1$ は主共振, $j=1/3$ は $1/3$ 次分数次調波共振, $j=3/1$ は 3 倍の高調波共振に対応した応答となる.

(1) 微小振幅条件下での検証 提案 FEM では, 式 (17) で求めた固有モードを基準座標とする運動方程式 (21) を用いることで非線形振動応答の計算効率を高めている. したがって非線形振動応答の計算精度に線形固有モードの精度が影響することになる. そのために汎用の線形 FEM (NASTRAN) で得られる共振周波数, 線形固有振動モード, モード損失係数と式 (17) から得られる共振周波数 $\omega^{(i)}/2\pi$ ($i=1, 2, 3, \dots$), 線形固有振動モード $\{\phi^{(i)}\}$ ($i=1, 2, 3, \dots$), モード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ ($i=1, 2, 3, \dots$) を比較した. 集中ばねの材料損失係数を

$\eta_b=0.01$, ブロックの材料損失係数を $\eta_b=0.2$ としてモード損失計数 $\eta_{tot}^{(i)}$ を式(19)から求めた。

まず、線形固有振動モード $\{\phi^{(i)}\}$ を図3に記載する。 $\{\phi^{(i)}\}$ は提案FEMとNASTRANでよく一致していたため、提案FEMの結果のみを示す。1次モードの図の中に矢印を記載したが、このモードでは、非線形集中ばねが主体に変形し、ブロックが矢印の方向(x 方向)に剛体に近い運動することを表す。2次以上の高次のモードはブロックの弾性モードになっている。なお、Mode5とMode10は縦波による共振の振動モードである。

各次数のモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ と共振周波数 $\omega^{(i)}/2\pi$ を図4に示す。提案FEMの結果とNASTRANの結果はよく一致している。なお、図中にあるNASTRANによる $\eta_{tot}^{(i)}$ の値は、各要素の歪みエネルギー分担率 $S_e^{(i)}$ をNASTRANで計算し、別途作成したFORTRANのプログラムを用いて式(19)から計算したものである。

さらにこれらのパラメータを用いて、微小振幅条件のもとでの共振応答を式(22)、式(23)、式(24)による提案FEM+調和バランス法で求める。その結果と次式の線形のモード重ね合わせ法⁽¹²⁾で求めた共振応答を比較し検証する。

$$\begin{aligned} w &= \bar{w} \cos \omega t \\ \bar{w} &= \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_{\xi ix} \tilde{\phi}_{\xi ix} p_d / ((\omega^2 - (\tilde{\omega}^{(i)})^2) + j \eta_{tot}^{(i)} (\tilde{\omega}^{(i)})^2) \quad \text{--- (25)} \end{aligned}$$

ここで、加振点を ζ 、観測点 ξ をとし、加振方向は x 方向とした。 w は観測点 ξ における x 方向の応答振幅、 j は虚数単位である。また、 $\tilde{\phi}_{\xi ix}$ は i 次固有ベクトル $\{\phi^{(i)}\}$ の加振節点 ζ に対応する x 方向成分である。 $\tilde{\phi}_{\xi ix}$ は先に示したように $\{\phi^{(i)}\}$ の観測点 ξ に対応する x 方向成分である。単一の角周波数 ω により励振を受ける場合の線形応答の検証問題なので、 w の実効値 W_{rms} は、次式(26)から求められる。

$$W_{rms} = |\bar{w}| / \sqrt{2} \quad \text{--- (26)}$$

外力を非常に小さく($P_d=0.098$ [N])する条件で、提案FEMと調和バランス法により求めた応答と式(25)による応答を比較する。図5に10モード近似での結果を示す。図より、両者は各共振ピークが減衰される様子など、よく一致している。

(2) ブロックが剛体の条件下での検証 粘弾性ブロックを集中質量に置き換え、集中質量-非線形集中ばね系(1自由度質量ばね系)で非線形周期応答を求めた。具体的には、次式(27)をRunge-Kutta-Gill法で直接積分し時刻歴を求め、実効値を計算し共振応答を求めた。

$$m\ddot{w} = -(\gamma_1 w + \gamma_2 w^2 + \gamma_3 w^3) - C\dot{w} + F \quad \text{--- (27)}$$

ここで、 m は弾性ブロックの質量を集中質量に置き換えた量である。 w は質量の変位、 F は質量に作用する外力で $F=p_d \cos \omega t$ とした。 p_d は周期外力の振幅である。減

Fig.3 Verification of Proposed method (Vibration mode)

Fig.4 Resonant frequency and modal loss factor

Fig.5 Verification of Proposed method (response under infinitesimal displacement)

衰定数は $C = \eta_s (m \bar{\gamma}_1)^{1/2}$ から求め用いた。この結果と提案 FEM においてブロックのヤング率 E を非常に高くした場合 ($E = 10^5 [\text{GPa}]$) の共振応答の計算結果を比較した。提案 FEM による応答の計算には、先に述べた調和バランス法を 1 モード近似で用い、加振位置と観測位置は非線形集中ばねとブロックの接合節点 α とした。集中ばねの材料損失係数を $\eta_s = 0.01$ 、ブロックの材料損失係数を $\eta_b = 0.1$ とした。これらの条件では式 (19) から系のモード損失係数は $\eta_{\text{tot}}^{(1)} = 0.01$ になる。式 (21) の外力項 $\bar{P}_i = \eta_s \{\phi^{(i)}\}^T \{f\}$ 中の $\{f\}$ について、加振節点 α に対応する x 方向成分のみに $P_d \cos \omega t$ とし、他の成分はゼロとした。

ここで 1 次共振は図 3 の Model に対応しており、弾性ブロックを質量とし、非線形集中ばねが主体に変形するモードである。このモードは式 (27) の集中質量-非線形集中ばね系 (1 自由度質量ばね系) で現れる振動モードと対応する。その系での応答の計算結果と、提案 FEM でブロックのヤング率を非常に高くした剛体ブロックの場合 ($E = 10^5 [\text{GPa}]$) の応答の計算結果を比較した。結果を図 6 に示す。横軸を加振周波数 $\omega / (2\pi)$ [Hz]、縦軸を変位の実効値 W_{rms} [mm] とした。非線形集中ばねの影響が現れるまで加振力を大きくした条件 ($P_d = 9800$ [N]) を用いた。図より、両者の結果はピークの高さ、ピーク周波数ともによく一致している。これより、剛体ブロックの条件で、提案 FEM とプログラムが検証できた。以上のように、提案法は微小振幅条件や剛体ブロック条件で、従来の解析法の結果と一致し検証できた。

4.2 ブロックの応答に及ぼすヤング率の影響

つぎに粘弾性ブロックのヤング率 E 、材料損失係数 η_b が減衰振動に与える影響を調べる。

(1) 振動モード ヤング率 E を 1GPa から 210GPa まで変化させた場合の振動モード $\{\phi^{(i)}\}_0$ は、先に示した図 3 とマクロでは変化はなかった。

Fig.6 Verification of proposed method for rigid block

(2) モード損失係数、共振応答とブロックのヤング率の関係 粘弾性ブロックのヤング率 E が異なる場合の 1 次モード (非線形集中ばね主体の振動モード) の減衰 $\eta_{\text{tot}}^{(1)}$ を比較する。図 7 にブロックと集中ばねの歪みエネルギー分担率 $S_b^{(1)}$ 、 $S_s^{(1)}$ を示す。ただし、 $S_b^{(1)}$ はブロックに対応する要素を e_b 、その総数を $e_{b, \text{max}}$ とすると次式で求められる。

$$S_b^{(1)} = \sum_{e_b=1}^{e_{b, \text{max}}} S_{e_b}^{(1)}$$

ヤング率が低い場合は、集中ばねが接続されている部分 (節点 α) のブロックが弾性変形することが振動モード $\{\phi^{(1)}\}_0$ の観察からわかっている。したがって、図 7 のようにブロックのヤング率が低くなると、ブロックの歪みエネルギー分担率 $S_b^{(1)}$ が高くなるかわりに、集中ばねの歪みエネルギー分担率 $S_s^{(1)}$ が低くなる。一方、式 (19) より、モード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(1)}$ は、各要素の歪みエネルギー分担率 $S_e^{(1)}$ と、要素の材料減衰の積 $\eta_e S_e^{(1)}$ の全要素の総和で近似できる。すなわち、集中ばねの材料損失係数 η_s が粘弾性ブロックの材料損失係数 η_b より小さい条件 ($\eta_s = 0.01$, $\eta_b = 0.2$) を考えると、ブロックのヤング率 E が高いほど、ばねの歪みエネルギー分担率 $S_s^{(1)}$ が高くなり、その結果、図 8 のように 1 次モードの減衰 (モード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(1)}$) が小さくなる現象が起こる。

$\eta_s = 0.01$, $\eta_b = 0.2$ の条件でヤング率 E が 1GPa と 210GPa の場合の共振応答を図 9(a) と図 9(b) にそれぞれ示す。調和バランス法による応答の近似モード数は $I_c = 20$ とした。横軸を加振周波数 $\omega / (2\pi)$ [Hz]、縦軸を図 1 の観測点の変位の実効値 W_{rms} [mm] とした。また、外力 P_d を $P_d = 9800$ [N] とした。ヤング率 E が高い場合には、最低次の共振応答曲線 (1, 1/1) が漸硬型となる。さらに、最低次の共振の 3 倍高調共振 (1, 3/1) と 1/3 分数次調共振 (1, 1/3) が新たに現れる。ヤング率 E が

Fig.7 Effect of Young's modulus on share of strain energy

Fig.8 Effect of Young's modulus on modal loss factor

低い場合には、この条件では先ほど述べたように1次モードの減衰(モード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(1)}$)が大きくなり、最低次の共振の3倍高調波共振(1,3/1)がジャンプしなくなるとともに1/3分数次調波共振(1,1/3)が認められなくなる。

観測点を、粘弾性ブロックの底面の一角(観測点 ξ)だけでなく、ブロックと非線形集中ばねの接合節点(観測点 α)とした場合も計算した。ブロックの材料損失係数を($\eta_b=0.2$)、集中ばねの材料損失係数を($\eta_s=0.01$)とした。粘弾性ブロックのヤング率が異なる場合($E=210$ [GPa], $E=1$ [GPa])の共振応答を求め図10(a)と図10(b)にそれぞれ示す。最低次モードでは、ヤング率が1 GPaの場合、ブロックと非線形集中ばねの接合節点 α が弾性変形するために二つの観測点 α と ξ 間の変位に差が出てくるが、ヤング率が210GPaの場合では、接合節点 α が弾性変形しにくくなり、ヤング率が1GPaの場合と比べ、観測点 α と ξ 間の変位に差が出ない。x方向並進以外の剛体モードはガイドで拘束しているので、この差は弾性変形によるものといえる。

近似モード数 I_c を変化させて共振応答を求めた。図11(a)と図11(b)に、ヤング率を $E=210$, $E=1$ [GPa]とした結果をそれぞれ示す。図中、 $I_c=1$, $I_c=2$, $I_c=5$, $I_c=10$, $I_c=20$ の条件のもとでの結果が示されている。ブロックの材料損失係数を($\eta_b=0.2$)、集中ばねの材料損失係数を($\eta_s=0.01$)とした。粘弾性ブロックのヤング率が大きい場合($E=210$ [GPa], 図11(a))には、 $I_c=1$ と $I_c=20$

を比較しても、変位に大きな差は現れない。このことから、ヤング率 E が高い場合には、少数の近似モード数 I_c での計算が可能といえる。一方、ヤング率 E が低い場合($E=1$ [GPa], 図11(b))には近似モード数 I_c が多くなるほど、非線形の応答振幅が徐々に大きくなる。この場合には、近似モード数 I_c は20以上必要である。

図12に図11中の1次振動モードに含まれる各振動モードの振幅成分を大きい順に15成分記載した。これより式(21)中の非線形項 $\tilde{D}_{ijk}$, $\tilde{E}_{ijk}$ に起因するモード連成を調べることが可能である。図の縦軸は応答の実効値 W_{rms} への各モードの寄与率、横軸は振幅成分への大きさの順位である。図中の記号 $[x,y,z]$ の x は振動モードの次数、 $y=1/1$ は基本調波成分、 $y=3/1$ は3倍高調波成分を表す。 z のところに表記のないものは式(22)の $\cos$ 成分、 s の表記のあるものは $\sin$ 成分に相当することを表す。加振周波数 $\omega/2\pi$ は1次の共振周波数 $\omega^{(1)}/2\pi$ と一致する条件とし、近似モード数は $I_c=20$ である。図から、ブロックの材料損失係数が大きい場合($\eta_b=0.2$, 図12(b))、1次モードの基本調波(1,1/1)の $\sin$ 成分と3倍高調波(1,3/1)の $\sin$ 成分の寄与が、ブロックの材料損失係数が小さい場合($\eta_b=0.02$, 図12(a))よりも大きくなっている。 $\sin$ 成分は、 $\cos$ 成分の加振力に対し、位相遅れの成分である。すなわち、加振力と変位の関係にヒステリシスを有するようになっ

Fig.9 Effects of Young's modulus on resonance response

Fig.10 Effects of Young's modulus on resonance response

Fig.11 Effects of assumed vibration modes on nonlinear frequency responses

ている。ヒステリシス成分が大きい程、減衰効果が大きくなるので、ブロックの材料損失係数が大きい程、非線形共振応答は制振される。

5. 結言

非線形集中ばねで粘弾性ブロックを支持し、鉛直方向の周期加振力を加え動的応答を解析した。非線形集中ばねの有限要素を定式化し、粘弾性ブロックの離散化方程式と接合した。運動方程式を、線形固有振動形を基準座標とする三次の非線形連立常微分方程式に変換し、計算自由度を縮小した。その際に粘弾性体の減衰特性の近似解析法であるモード歪みエネルギー法の概念を新たに導入し、運動方程式中の減衰項の自由度縮小も行っている。自由度を縮小した運動方程式に調和バランス法を適用し非線形共振応答を求めた。結果を要約するとつぎのようになる。

集中ばねの材料損失係数が粘弾性ブロックの材料損失係数より小さい場合、ブロックのヤング率が低くなると、ばね変形が主体の振動モードにブロック弾性変形が含まれ、モード損失係数が大きくなる。その減衰増大の効果により、対応するモードの高調波共振応答と分数次共振応答の発生が抑制される。

参考文献

- (1) Feeny, B. F. and Kappagantu, R., *J. Sound Vib.*, 211-4, (1998), 607-616.
- (2) 近藤孝広, 佐々木卓実, 綾部隆, 機論, 67-656C (2001), 914-921.
- (3) Pesheck, E., Boivin, N., Pierre, C. and Shaw, S. W., *Nonlinear Dyn.*, 25 (2001), 183-205.
- (4) 山口蒼夫, 永井健一, 丸山真一, 油田知宏, 機論 69-688C (2003) 3167-3174.
- (5) Johnson, C. D., and Kienholz, D. A., *AIAA Journal*, 20-5, (1982), 1284-1290.
- (6) 山口蒼夫, 黒沢良夫, 松村修二, 野村章, 機論 69-678C (2003) 297-303.
- (7) 山口蒼夫, 黒沢良夫, 松村修二, 村上聡, 澤田耕吉, 機論 69-678C (2003) 304-311.
- (8) 赤松克児, 山口蒼夫, 金沢純一, 機論 65-633C (1999) 1865-1872.
- (9) 山口蒼夫, 永井健一, 機論, 67-660C (2001) 2426-2433.
- (10) Zienkiewicz, O. C. 著, 吉識雅夫ほか訳, マトリックス有限要素法, (1970), 倍風館.
- (11) 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦, 有限要素法ハンドブック I 基礎編, (1981), 1-427, 倍風館.
- (12) 長松昭男, モード解析, (1985), 倍風館.
- (13) MA, B. A. and HE, J. F., *J. Sound Vib.*, 152-1, (1992), 107-123.

Fig.12 Effects of assumed vibration modes on nonlinear frequency responses