オルダム継手の運動解析と静力学*

小松原 英範^{*1}, 三 留 謙 一^{*1}

Motion Analysis and Statics of Oldham Coupling

Hidenori KOMATSUBARA^{*2} and Ken-ichi MITOME^{*2} Department of Mechanical System Engineering, Yamagata University,
4-3-16 Jonan, Yonezawa-shi, Yamagata, 992-8510 Japan

The Oldham coupling transmits a rotary motion with constant velocity between two parallel shafts. This Oldham coupling consists of the three elements; the input shaft, the intermediate element, and the output shaft. The motion of the intermediate element is similar to that of the "hula-hoop". As a result, the input torque cyclically changes under the constant output torque. First the motion of the intermediate element of the Oldham coupling is analyzed. An instantaneous center of rotation of the intermediate element is found. The fixed centrode is obtained as the locus of this center in the fixed coordinate system. The moving centrode is also obtained as the locus of this center in the moving coordinate system attached on the intermediate element. Input torque is obtained by analysis and statics. Secondly, the Oldham coupling is designed and made. Input torque is measured compared with theoretical one. Thus the motion of Oldham coupling is verified theoretically and experimentally.

Key Words: Oldham Coupling, Motion Analysis, Statics, Fixed Centrode, Moving Centrode, Intermediate Element

1. 結 論

オルダム継手は平行な2軸間に等速回転運動を伝えることができる。このためオルダム継手は主に軸継手として利用されている。その他の利用法としてはだ円チャックへの可能性が示されている⁽¹⁾⁽²⁾。しかしまだ実用化はされていない。

このオルダム継手は、入力節、中間節、出力節の三つから構成される。そしてその中間節はフラフープのような運動をする。中間節のこの運動により、入力軸にトルク変動が生じる。

さて著者らは、オルダム継手に基づいた、だ円切削装置の実用化を目指している。だ円切削装置の開発にはこのトルク変動の解明が不可欠である。

そこで、本研究ではだ円切削装置開発の基礎研究としてオルダム継手の中間節の運動特性および入出力軸のトルク特性を明らかにする。本報では、まずオルダム継手の中間節の運動解析を行う。このときオルダム継手の中間節の運動を、中間節の瞬間中心Pの移動軌跡 Γ_m が、その固定軌跡 Γ_f の周りを転がり運動する

ことにより表現する。次に、負荷トルクを一定とした場合のオルダム継手の入力トルクを理論的に求める。そして実際にオルダム継手を製作し、入力トルクを測定し、その理論値と比較する。こうしてオルダム継手の運動を検証する。

2. オルダム継手の中間節の運動解析

図1にオルダム継手を示す。オルダム継手は固定両スライド機構、回り両スライド機構から連鎖の交替によって得られるので、以下では、回り両スライド機構に置換えて解析を行う。

2・1 中間節にある2本の直線溝が直交する場合

二つの直交する直線溝を持つ回り両スライド機構を図2に示す。ここでこの機構の二つの回転角を考える。入力軸回転角を ϕ 、出力軸回転角を ψ とした場合、これらの関係は図2より次式で表される。なお ϕ と ψ は反時計回りを正とする。

$$\psi = \phi + \pi/2 \dots \dots \dots (1)$$

時間 t で両辺を微分して、

$$d\psi/dt = d\phi/dt \dots \dots \dots (2)$$

ゆえに、オルダム継手は、オフセットされている二軸間に等速回転運動を伝える。

図3に中間節にある2本の直線溝が直交している回

* 原稿受付 2004年6月10日。

^{*1} 正員, 山形大学工学部(〒992-8510 米沢市城南4-3-16)。

E-mail: hkomatsu@yz.yamagata-u.ac.jp

り両スライダ機構を示す。図3において、座標系 B_0-xy は静止節 D に固定した静止座標系であり、座標系 $O-XY$ は中間節 C に固定した動座標系である。いま入力節 A が、反時計回りに回転して中間節 C に運動を伝え、さらに中間節 C が出力節 B に運動を伝えるとする。このとき、中間節 C の瞬間中心は点 P となる。

Fig. 1 Oldham coupling

Fig. 2 Turning block double slider crank mechanism

ここで、静止座標系でとらえた瞬間中心 P の軌跡を固定軌跡と呼び、 Γ_f とする。また、動座標系でとらえた瞬間中心 P の軌跡を移動軌跡と呼び、 Γ_m とする。

瞬間中心の移動軌跡 Γ_m は、点 P を動座標系 $O-XY$ でとらえたものであり、 $A_0B_0=L$ として次式によって求められる。

$$P(X, Y); X=L \sin \phi, Y=-L \cos \phi$$

$$X^2+Y^2=L^2 \dots\dots\dots (3)$$

また、瞬間中心 C の固定軌跡 Γ_f は、点 P を静止座標系 B_0-xy でとらえたものであり、次式によって表される。

$$P(x, y); x=X \sin \phi=L \sin^2 \phi$$

$$y=-X \cos \phi=-L \sin \phi \cos \phi$$

$$(x-L/2)^2+y^2=(L/2)^2 \dots\dots\dots (4)$$

このように、中間節 C にある 2 本の直線溝が直交している場合、中間節の移動軌跡 Γ_m は点 O を中心とする半径 L の円となり、固定軌跡 Γ_f は、静止節の中点を中心とする半径 $L/2$ の円となる。そして二つの円

Fig. 3 Moving centre and fixed centre of Oldham coupling

Fig. 4 Motion of moving centre to fixed centre during single rotation of input shaft of Oldham coupling

は点Pで常に接する。軌跡 Γ_m の内側は、軌跡 Γ_f の外側を転がりながら運動する。

中間節が1回転する間に、軌跡 Γ_f と軌跡 Γ_m の接触点は、軌跡 Γ_m の円周を2周する。中間節の中心は、常に軌跡 Γ_f の上にあり、しかも接触点の真向かいにある。すなわち、入力節が ω の角速度で回転するとき、中間節の重心は、 2ω の角速度で円 Γ_f の円周上を回転する。

よってオルダム継手の中間節Cは、図4に示すように、中間節Cに固定された軌跡 Γ_m の内側が、固定節Dに固定された軌跡 Γ_f の外側を転がり、いわゆるフラフープのような運動をしている。

2・2 中間節にある2本の直線溝が直交しない場合

図5に中間節にある2本の直線溝が直交しない場合の回り両スライド機構を示す。図5で、角 β は2本の溝のなす角である。入力軸回転角を ϕ 、出力軸回転角を ψ とした場合、これらの関係は図5より次式で表される。

$$\psi = \phi + \beta = \phi + \gamma + \pi/2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$d\psi/dt = d\phi/dt \quad \dots\dots\dots (6)$$

よって、中間節にある2本の直線溝が直交しない場合でも入力節と出力節は等速度で回転する。

図6に中間節にある2本の直線溝が直交していない場合の回り両スライド機構を示す。図6において、座標系 B_0-xy は静止節Dに固定した静止座標系であり、座標系 $O-XY$ は中間節Cに固定した動座標系である。いま入力節Aが、反時計回りに回転して中間節Cに運動を伝え、さらに中間節Cが出力節Bに運動を伝えるとする。このとき、中間節Cの瞬間中心は点Pとなる。

ここで、静止座標系でとらえた瞬間中心Pの固定軌跡 Γ_f と動座標系でとらえた瞬間中心Pの移動軌跡 Γ_m を求める。瞬間中心の移動軌跡 Γ_m は、点Pを動座標系 $O-XY$ でとらえたものであり、 $A_0B_0=L$ とし

Fig. 5 Turning block double slider crank mechanism

て次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} P(X, Y); X &= L' \cos(\gamma + \theta), \\ Y &= -L' \sin(\gamma + \theta) \\ L' &= L \sec \gamma \\ \theta &= \pi/2 - \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式(7)より θ を消去すると

$$X^2 + Y^2 = (L \sec \gamma)^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、瞬間中心Cの固定軌跡 Γ_f は、点Pを静止座標系 B_0-xy でとらえたものであり、次式によって表される。

$$\left. \begin{aligned} P(x, y); x &= L' \sin \theta \sin(\gamma + \theta) \\ y &= -L' \cos \theta \sin(\gamma + \theta) \\ (x - L/2)^2 + (y + L \tan \gamma/2)^2 &= (L \sec \gamma/2)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

このように、中間節Cにある2本の直線溝が直交していない場合、中間節の移動軌跡 Γ_m は、図6に示すように点Oを中心とする半径 $L \sec \gamma$ の円となる。そして固定軌跡 Γ_f は半径 $L \sec \gamma/2$ の円となる。そして二つの円は点Pで常に接し、軌跡 Γ_m の内側は、軌跡 Γ_f の外側を転がりながら運動する。

3. オルダム継手の入力トルクの理論解析

3・1 解析モデル

オルダム継手の解析モデルとしては、図3のモデルを図7として表現する。このモデルでは、入・出力節として力の伝達点を一点に集中できる形状のスライダを採用している。

3章では出力軸に一定トルクをかける。このとき、入力軸を回転させるのに必要な入力トルクを求める。入力軸回転角 ϕ と出力回転角 ψ は式(1)の関係にあ

Fig. 6 Moving centrode and fixed centrode of Oldham coupling

る。

次に、中間節の中心 O は、入力軸 1 回転に対しオフセット L を直径とする円 Γ_m の円周上を 2 回転する。このため中間節は、 $\pi \leq \phi \leq 2\pi$ のときは、 $0 \leq \phi \leq \pi$ のときの運動を再び繰返す。したがって、 $0 \leq \phi \leq \pi$ までの運動を解析する。次に、この解析を行う上で入力角を次の二つの範囲に分割する。

(1) $0 \leq \phi \leq \pi/2$

(2) $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$

なお、ここで使用する記号は次のとおりである。

T_1 : 入力トルク

T_2 : 出力トルク

L : オフセット

M : 中間節の質量

μ : 摩擦係数

F : 中間節に働く遠心力 $= 2ML(d\phi/dt)^2$

P : 連接棒 D に対する中間節 C の瞬間中心

r : 軸中心から x 方向の距離

h : 軸中心から y 方向の距離

Fig. 7 Turning block double-slider crank mechanism

Fig. 8 Slider A

F_1, F_2 : スライダ A が中間節 C から受ける力

F_3, F_4 : スライダ B が中間節 C から受ける力

R_{AX}, R_{AY} : A_0 点の軸受けから受ける反力

R_{BX}, R_{BY} : B_0 点の軸受けから受ける反力

3・2 入力トルク解析 ($0 \leq \phi < \pi/2$) スライダ A を反時計回りに回転させると、スライダ A は中間節 C を回転させる。スライダ B にかかる負荷トルク T_2 を一定として、スライダ B を回転させるのに必要なスライダ A の入力トルク T_1 を求める。これにより、スライダ A, B および中間節 C のそれぞれ三つにかかる力の釣合い式を求める。

(a) スライダ A に働く力の釣合い スライダ A が中間節 C から受ける力 F_1 と F_2 , および軸から受けるトルク T_1 を図 8 に示す。スライダ A の基本寸法は r, h である。

X 軸方向および Y 軸方向に働く力の釣合いから

$$-(\mu F_1 + \mu F_2) + R_{AX} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$-F_1 + F_2 + R_{AY} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

A_0 点回りのモーメントの釣合いから

$$T_1 - (r - \mu h)F_1 - (r + \mu h)F_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

(b) 中間節 C に働く力の釣合い 中間節 C がスライダ A, B から受ける力 F_1, F_2, F_3, F_4 および中間節 C の重量 W を図 9 に示す。なお重量 W は、 $W = Mg$ であり、中間節の A_0B_0 に垂直方向に働く。

X 軸方向および Y 軸方向に働く力の釣合いから

$$\left. \begin{aligned} &\mu(F_1 + F_2) + F_3 - F_4 \\ &+ W \cos \phi - F \sin \phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} &F_1 - F_2 + \mu(F_3 + F_4) \\ &- W \sin \phi + F \cos \phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

P 点回りのモーメントの釣合いから

Fig. 9 Intermediate element C

$$\left. \begin{aligned} &\{r - \mu(b+h)\}F_1 + \{r - \mu(b-h)\}F_2 \\ &- \{r + \mu(a-h)\}F_3 - \{r + \mu(a+h)\}F_4 \\ &+ (a \sin \phi - b \cos \phi)W = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$a = L \sin \phi, \quad b = L \cos \phi \quad \dots\dots\dots (16)$$

(c) スライダ B に働く力の釣合い 図 10 にスライダ B が中間節 C から受ける力 $F_3, F_4, \mu F_3, \mu F_4$ および軸から受けるトルク T_2 を示す。スライダ B の基本寸法は r, h である。

$$X \text{ 軸方向および } Y \text{ 軸方向に働く力の釣合いから} \\ -F_3 + F_4 + R_{BX} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$-(\mu F_3 + \mu F_4) + R_{BY} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

B_0 点回りのモーメントの釣合いから

$$T_2 - (r - \mu h)F_3 - (r + \mu h)F_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

(d) 入力トルク T_1 入力角であるスライダ A

Fig. 10 Slider B

Fig. 11 Turning block double-slider crank mechanism

の回転角を ϕ として, T_1 を次式として求める.

$$T_1 = f(r, h, L, \mu, M, T_2, \phi) \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(25)~(27), (31)は F_1, F_2, F_3, F_4 を未知数とする4元の連立方程式となる. この4元の連立方程式を解き F_1, F_2 を式(24)に代入すると入力トルク T_1 は次式となる.

$$T_1 = \left\{ r^2 L \cos(2\phi) W - \mu^2 r h L \cos(2\phi) F \right. \\ \left. + (r^2 + r \mu L \sin \phi) T_2 / (r^2 - r \mu L \cos \phi) \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

なお, F は遠心力であり $F = 2ML(d\phi/dt)^2$ で表される.

3・3 入力トルク解析 ($\pi/2 \leq \phi < \pi$) 図 11 に入力軸回転角が $\pi/2 \leq \phi < \pi$ の場合の回り両スライダ機構を示す.

(a) スライダ A に働く力の釣合い スライダ A が中間節 C から受ける力 F_1, F_2 および軸から受けるトルク T_1 を図 12 に示す. スライダ A の基本寸法は r, h である.

Fig. 12 Slider A

Fig. 13 Intermediate element C

$$(\mu F_1 + \mu F_2) + R_{AX} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$-F_1 + F_2 + R_{AY} = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

A₀ 点回りのモーメントの釣合いから

$$T_1 - (r + \mu h)F_1 - (r - \mu h)F_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

(b) 中間節 C に働く力の釣合い 中間節 C がスライダ A, B から受ける力 F_1, F_2, F_3, F_4 および中間節の重量 W を図 13 に示す。なお中間節 C の重量 W は, $W = Mg$ である。

X 軸方向および Y 軸方向に働く力の釣合いから

$$\left. \begin{aligned} -\mu(F_1 + F_2) + F_3 - F_4 \\ + W \cos \phi - F \sin \phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 - F_2 + \mu(F_3 + F_4) \\ - W \sin \phi + F \cos \phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

P 点回りのモーメントの釣合いから

$$\left. \begin{aligned} \{r - \mu(b - h)\}F_1 + \{r - \mu(b + h)\}F_2 \\ - \{r + \mu(a - h)\}F_3 - \{r + \mu(a + h)\}F_4 \\ + (a \sin \phi + b \cos \phi)W = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで

$$a = L \sin \phi, \quad b = -L \cos \phi \quad \dots\dots\dots (28)$$

(c) スライダ B に働く力の釣合い 図 14 にスライダ B が中間節 C から受ける力 $F_3, F_4, \mu F_3, \mu F_4$ および軸から受けるトルク T_2 を示す。スライダ B の基本寸法は r, h である。

X₁ 軸方向および Y₁ 軸方向に働く力の釣合いから

$$-F_3 + F_4 + R_{BX} = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$-(\mu F_3 + \mu F_4) + R_{BY} = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

B₀ 点回りのモーメントの釣合いから

$$T_2 - (r - \mu h)F_3 - (r + \mu h)F_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

(d) 入力トルク T_1 入力角であるスライダ A の回転角を ϕ として, T_1 を次式として求める。

Fig. 14 Slider B

$$T_1 = f(r, h, L, \mu, M, T_2, \phi) \quad \dots\dots\dots (32)$$

式(13)~(15), (19)は F_1, F_2, F_3, F_4 を未知数とする 4 元の連立方程式となる。この 4 元の連立方程式を解き F_1, F_2 を式(12)に代入すると入力トルク T_1 は次式となる。

$$T_1 = \left\{ r^2 L \cos(2\phi)W - \mu^2 r h L \cos(2\phi)F \right\} + (r^2 + r\mu L \sin \phi)T_2 / (r^2 + r\mu L \cos \phi) \quad \dots\dots\dots (33)$$

4. 実験検証

4.1 実験装置および実験方法 本実験で用いた実験装置の概略を図 15 に示す。この装置はモータからの回転運動を入力軸, 中間節, 出力軸の順に伝達する。また, 入力軸にトルク計を設置し, 入力軸にかかるトルクを測定する。なお, 出力軸に一定の負荷トルクを与え, オフセット L は出力軸側の軸受台を平行移動させることによって与えている。一定負荷トルクは出力軸にプーリをつけ, プーリに吊り下げられた重りによって与えられている。

図 16 に本実験に用いたオルダム継手を示す。また, 実験に使用したオルダム継手の諸元と実験条件を下記に示す。なお, 摩擦係数は静摩擦係数の実測値を用いている。

$$T_2 = 0, \quad 0.075 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad M = 0.292 \text{ kg}$$

$$\mu = 0.2, \quad L = 5 \text{ mm}$$

$$r = 20 \text{ mm}, \quad h = 4 \text{ mm}, \quad n = 120 \text{ min}^{-1}$$

4.2 入力トルクの理論値と実験値の比較 図 17 に出力トルク $T_2 = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$, 図 18 に出力トルク $T_2 = 0.075 \text{ N} \cdot \text{m}$ の場合の入力トルクの理論値と実験値を示す。理論値と実験値を比較すると, 両者はよく一致している。この結果は, 解析モデルによるトルク解析の妥当性を証明している。

4.3 入力トルク変動の摩擦係数の影響 4.2 節の解析においては, 本来, 動摩擦係数を用いるべきである。しかし, 動摩擦係数の測定は非常に困難なため

Fig. 15 Experimental apparatus

静摩擦係数の実測値を用いている。なお、摩擦係数の変動トルクへの影響を調べるために摩擦係数 μ を 0, 0.1, 0.2, 0.3 としたときの入力トルクの理論解析を行った。その結果を図 19 に示す。なお、出力トルク T_2 は $0 \text{ N}\cdot\text{m}$ である。図 19 に示すように、摩擦係数 μ は変動トルクの値にほとんど影響しない。

5. 結 言

(1) オルダム継手の中間節の運動を解析した。中間節の瞬間中心の固定軌跡を Γ_f とし、その移動軌跡を Γ_m とする。入力節と出力節の軸間距離を L とすると、軌跡 Γ_f は半径 $(L/2)$ の円となり、軌跡 Γ_m は半径 L の円となる。そして、入力節、中間節、出力節を回転させるとき、軌跡 Γ_m の内側は、軌跡 Γ_f の外側を転がる。中間節の運動は、中間節に固定された軌跡 Γ_m の内側が固定節に固定された軌跡 Γ_f の外側を転がりながら運動する、いわゆるフラフープのような運動である。

Fig. 16 Oldham coupling

(a) Theoretical curve of input torque

(b) Experimental curve of input torque

Fig. 17 Output torque $T_2 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$

ある。

(2) 中間節が直交しない場合でも、オルダム継手は、入出力軸間に等速運動を伝える。ここに角 γ は、2本の溝のなす角 $(90^\circ + \gamma)$ によって定義された角である。この場合、中間節の固定軌跡 Γ_f は半径 $(L \sec \gamma/2)$ の円となり、その移動軌跡 Γ_m は半径 $L \sec \gamma$ の円となる。中間節の運動は先ほどの場合と同様に、中間節に固定された軌跡 Γ_m の内側が固定節に固定された軌跡 Γ_f の外側を転がりながら運動する、いわゆるフラフープのような運動である。

(3) 以上の運動解析に基づいて、入力トルクを理

(a) Theoretical curve of input torque

(b) Experimental curve of input torque

Fig. 18 Output torque $T_2 = 0.075 \text{ N}\cdot\text{m}$

Fig. 19 Theoretical curve of input torque
(output torque $T_2 = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$)

論的に求めた。さらに実際にオルダム継手を設計・製作した。そして実験によってその入力トルクを測定した。入力トルクの理論値は、実験値とよく一致した。この結果は、解析モデルによるトルク解析の妥当性を証明している。

(4) 以上本研究は、オルダム継手の運動と力学的挙動を解明しており、オルダム継手の設計・製作に寄与することができる。また、だ円切削装置の開発のための基礎データを提供している。

終わりに、本研究には、本学の多くの大学院生、および卒業研究生が参加してきた。これら各位に対して心から感謝する。

文 献

- (1) Peuleaux, F., *The Kinematics of Machinery*, (1963), 316.
- (2) 稲田重男・窪田雅男・林則行・本郷薫, 機構学, (1961), 78, 朝倉書店.