むだ時間系に対する修正繰返し補償器のパラメトリゼーション*

山田 功^{*1}, 佐藤 桂司^{*2}, 荒川 徹^{*3}The Parametrization of All Stabilizing Modified Repetitive Controllers
for Time-delay SystemsKou YAMADA^{*4}, Keiji SATOH and Tooru ARAKAWA^{*4} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjincho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

In this paper, we examine the parametrization of all stabilizing modified repetitive controllers for time delay systems. We obtain the parametrization of all stabilizing modified repetitive controllers for time delay systems using the fusion of the structure of repetitive controllers and the factorization of time delay plant into the time delay part and the rational function part. A design method of stabilizing modified repetitive controllers using the obtained parametrization is presented. Finally, a numerical example is illustrated to show the effectiveness of the obtained parametrization.

Key Words: Repetitive Control, Parametrization, Free Parameter, Time-delay

1. ま え が き

本稿では、むだ時間系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションについて検討する。繰返し制御は、周期外乱や不確かさの存在のもと、周期目標入力に定常偏差なく追従する制御系である^{(1)~(12)}。任意の周期目標入力に定常偏差なく追従する繰返し制御系は、中立型むだ時間系となり、繰返し制御系を安定化するには、制御対象はバiproperである必要がある^{(3)~(8)}。池田、高野は、出力が任意の周期目標入力に定常偏差なく追従するのは、物理的に無理があることを指摘し、制御対象の相対次数が一次であったとしても、高周波成分を持たない周期目標入力に対しては繰返し制御系が L_2 安定であることを示した⁽⁹⁾。しかしながら、実際の制御対象は、真にproperで相対次数が必ずしも一次とは限らない。そのため、任意の相対次数の真にproperな制御対象に適用可能な繰返し制御系の設計法が検討されている^{(3)~(8)}。これらの研究は、大きく2つに分類される。一つは減衰器を用いた方法⁽⁸⁾、一つはローパスフィルタを用い遅れ型むだ時間系にする方法^{(3)~(7)}である。前者は設計が難しいのに対し、後者は周期目標入力の高周波成分に対する定

常偏差は大きなものになるが、構成が簡単であるという特徴がある。そのため、後者の方法は、特に修正繰返し制御と呼ばれ、多くの制御問題に適用されている⁽³⁾。

一方、制御問題で重要な問題の一つに安定化補償器すべてを求める問題、いわゆるパラメトリゼーションの問題がある^{(13)~(17)}。安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションは、原、山本によりはじめて検討された⁽⁵⁾。参考文献⁽⁵⁾では、修正繰返し制御系の安定条件が H_∞ ノルムの条件になることに着目し、Nevanlinna-Pickの補間問題に帰着して安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを与えている。加藤、舟橋は、Bezout方程式を厳密に解くことにより、最小位相系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを与えている⁽¹²⁾。参考文献⁽¹²⁾は、繰返し制御系が内部安定であるための十分条件をもとにパラメトリゼーションを与えていないため、参考文献⁽⁵⁾の補償器よりも広いクラスの補償器を記述できているものと期待できるという点で、重要である。しかし、参考文献⁽¹²⁾には、修正繰返し補償器内部のローパスフィルタの相対次数が制御対象のそれと等しくならなければならないという制約と、制御対象が安定である必要があるため、限られたクラスの最小位相系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを明らかにしているにすぎないという問題がある。参考文献⁽¹⁸⁾では、参考文献⁽¹²⁾の問題を解決し、並列補償法を援用しBezout方程式を厳密に解くことにより、真にproperな最小

* 原稿受付 2004年7月2日。

^{*1} 正員、群馬大学工学部(〒376-8515 桐生市天神町1-5-1)。^{*2} 正員、群馬大学大学院工学研究科。^{*3} 学生員、群馬大学大学院工学研究科。

E-mail: yamada@me.gunma-u.ac.jp

位相系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを与えている。参考文献⁽¹⁹⁾では、参考文献⁽¹⁸⁾を拡張し、並列補償法を援用し Bezout 方程式を厳密に解くことにより、あるクラスの非最小位相系に対する安定化修正繰返し制御系のパラメトリゼーションを与えている。しかし、参考文献⁽¹⁹⁾では、任意の非最小位相系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションは得られていない。参考文献⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾の方法では、並列補償法を援用しているがために、任意の非最小位相系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションは得られない。参考文献⁽²⁰⁾は、参考文献⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾とは異なる方法で、非最小位相系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを与えている。このように、最小位相系、非最小位相系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションは完備されてきた。しかしながら、むだ時間系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションは検討されていない。安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションの有用性、遠隔制御⁽²¹⁾、温度制御などむだ時間を持つシステムの多さを鑑み、むだ時間系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションは、検討すべき問題の一つである。

本稿では、入力むだ時間系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを求める問題を検討する。まず、検討する問題を定式化する。つぎに、入力むだ時間系が、むだ時間部分と実有理関数部分に分解できることと修正繰返し補償器の構造を利用して、入力むだ時間系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを与える。つぎに、本稿で得られたパラメトリゼーションを用いた修正繰返し補償器の設計法を与える。最後に数値例を示し、本稿で得られたパラメトリゼーションの有用性を検証する。

本稿で使用する記号を以下にまとめる。

R 実数の集合。

$R(s)$ s の実有理関数の集合。

RH_{∞} 安定プロパーな実有理関数の集合。

H_{∞} 安定 causal な関数の集合。

2. 問題の記述

次式で表される一入力一出力系を考える。

$$\begin{cases} y = G(s)e^{-sL}u \\ u = C(s)(r-y) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $G(s)e^{-sL}$ は制御対象、 $L > 0$ は入力むだ時間、 $G(s)$ は真にプロパーな実有理関数、 $C(s)$ は補償器、 $y \in R$ は観測出力、 $u \in R$ は制御入力、 $r \in R$ は周期

T の周期目標入力で

$$r(t+T) = r(t) \quad (\forall t \geq 0) \quad (2)$$

を満足する。

参考文献⁽⁴⁾によると、周期 T の周期外乱や制御対象に不確かさが存在したとしても、出力 y が周期 T の周期目標入力 r に小さな定常偏差で追従するためには、補償器 $C(s)$ が causal で、

$$C(s) = C_1(s) + C_2(s)C_r(s) \quad (3)$$

と記述される必要がある。ここで、 $C_1(s) \in R(s)$ 、 $C_2(s) \neq 0 \in R(s)$ はともにプロパー、 $C_r(s)$ は周期 T の周期目標入力に対する内部モデルであり

$$C_r(s) = \frac{q(s)e^{-sT}}{1 - q(s)e^{-sT}} \quad (4)$$

と記述されるものとする。ただし、 $q(s)$ は $q(0) = 1$ を満足するプロパーなローパスフィルタである。以下では、(3) 式で表される補償器 $C(s)$ のことを修正繰返し補償器、(3) 式で表される補償器 $C(s)$ を用いた (1) 式の制御系のことを修正繰返し制御系と呼ぶことにする。

本稿で検討する問題は、(1) 式の制御系を内部安定とする (3) 式で表される causal な修正繰返し補償器 $C(s)$ のすべてを求めることである。安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを求めるための、基本的なアイデアは以下のとおりである。制御対象 $G(s)e^{-sL}$ は実有理関数部分 $G(s)$ とむだ時間部分 e^{-sL} に分解することができる。(3) 式の $C_1(s)$ 、 $C_2(s)$ が実有理関数であるならば、制御対象 $G(s)e^{-sL}$ を安定化する修正繰返し補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは、 $G(s)$ を安定化する補償器 $\hat{C}(s) = C(s)e^{-sL}$ のパラメトリゼーションと等価である。 $G(s)$ に対する安定化補償器のパラメトリゼーションは参考文献⁽¹³⁾⁽¹⁷⁾で検討されている。参考文献⁽¹³⁾⁽¹⁷⁾の $G(s)$ に対する安定化補償器のパラメトリゼーションには、自由パラメータが含まれている。(3) 式の修正繰返し補償器 $C(s)$ が、制御対象 $G(s)e^{-sL}$ を安定化するならば、参考文献⁽¹³⁾⁽¹⁷⁾の安定化補償器のパラメトリゼーションに含まれる自由パラメータが、ある形式で記述できることを示す。逆に、参考文献⁽¹³⁾⁽¹⁷⁾の安定化補償器のパラメトリゼーションに含まれる自由パラメータをある形式で記述すると、その補償器は (1) 式の制御系を安定化し、さらに (3) 式の形式で記述されることを示す。

3. 安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーション

ここでは、(1) 式の制御系を内部安定化する causal な修正繰返し補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションを与える。

(1) 式の制御系を内部安定化する *causal* な修正繰返し補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションに関して、つぎの定理が成り立つ。

定理 1 (1) 式の制御系を内部安定化する *causal* な修正繰返し補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは、

$$C(s) = \frac{\tilde{X}(s) + D(s)Q(s)}{\tilde{Y}(s) - N(s)Q(s)} e^{sL} \quad (5)$$

で表される。ただし、 $N(s) \in RH_\infty$, $D(s) \in RH_\infty$, $\tilde{D}(s) \in RH_\infty$, $\tilde{N}(s) \in RH_\infty$ は、 $G(s)$ を RH_∞ 上で既約分解したときの既約因子であり、

$$\begin{aligned} G(s) &= N(s)D^{-1}(s) \\ &= \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \end{aligned} \quad (6)$$

を満足する。 $\tilde{X}(s) \in RH_\infty$, $\tilde{Y}(s) \in RH_\infty$ は

$$\begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) & -\tilde{X}(s) \\ N(s) & \tilde{Y}(s) \end{bmatrix} = I \quad (7)$$

を満足する関数、 $Q(s) \in H_\infty$ は

$$Q(s) = \frac{Q_{n1}(s) + Q_{n2}(s)e^{-sL} + Q_{n3}(s)e^{-sT}}{Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT}} + \frac{Q_{n4}(s)e^{-s(T+L)}}{Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}} \quad (8)$$

で記述される。ただし、 $Q_{ni}(s) \in RH_\infty (i = 1, \dots, 4)$, $Q_{di}(s) \in RH_\infty (i = 1, \dots, 4)$ は

$$\frac{\tilde{Y}(0)Q_{d3}(0) - N(0)Q_{n3}(0)}{\tilde{Y}(0)Q_{d1}(0) - N(0)Q_{n1}(0)} = 1 \quad (9)$$

$$\tilde{X}(s)Q_{d1}(s) + D(s)Q_{n1}(s) = 0 \quad (10)$$

$$\tilde{Y}(s)Q_{d2}(s) - N(s)Q_{n2}(s) = 0 \quad (11)$$

$$\tilde{X}(s)Q_{d3}(s) + D(s)Q_{n3}(s) = 0 \quad (12)$$

$$\tilde{Y}(s)Q_{d4}(s) - N(s)Q_{n4}(s) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\alpha(s) - \beta(s)}{\gamma(s)} \neq 0 \quad (14)$$

を満足する任意の関数である。ただし、

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (\tilde{X}(s)Q_{d2}(s) + D(s)Q_{n2}(s)) \\ &\quad (\tilde{Y}(s)Q_{d3}(s) - N(s)Q_{n3}(s)) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \beta(s) &= (\tilde{Y}(s)Q_{d1}(s) - N(s)Q_{n1}(s)) \\ &\quad (\tilde{X}(s)Q_{d4}(s) + D(s)Q_{n4}(s)) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (\tilde{Y}(s)Q_{d1}(s) - N(s)Q_{n1}(s)) \\ &\quad (\tilde{Y}(s)Q_{d3}(s) - N(s)Q_{n3}(s)) \end{aligned} \quad (17)$$

である。 ■

注意 1 定理 1 において、(5) 式の補償器 $C(s)$ は、*causal* でない補償器であると誤解されるかもしれないが、(10)~(13) 式の仮定のもとでは、*causal* な補償器であることに注意する。 □

定理 1 の証明には、つぎの補題を用いる。

補題 1 次式で表される制御系

$$\begin{cases} y = G(s)u \\ u = -C(s)y \end{cases} \quad (18)$$

が内部安定であるための必要十分条件は、補償器 $C(s)$ が

$$C(s) = \frac{\tilde{X}(s) + D(s)Q(s)}{\tilde{Y}(s) - N(s)Q(s)} \quad (19)$$

と記述されることである。ただし、 $N(s) \in RH_\infty$, $D(s) \in RH_\infty$, $\tilde{D}(s) \in RH_\infty$, $\tilde{N}(s) \in RH_\infty$ は、制御対象 $G(s)$ を RH_∞ 上で既約分解したときの既約因子であり、(6) 式を満足する関数、 $\tilde{X}(s) \in RH_\infty$, $\tilde{Y}(s) \in RH_\infty$ は (7) 式を満足する関数である。 $Q(s) \in H_\infty$ は任意の関数である (17)。 □

補題 2 (3) 式の修正繰返し補償器 $C(s)$ が $G(s)e^{-sL}$ を安定化するならば、 $\hat{C}(s) = C(s)e^{-sL}$ は *causal* で $G(s)$ を安定化する。逆に、 $\hat{C}(s)$ が $G(s)$ を安定化し、 $C(s) = \hat{C}(s)e^{sL}$ が (3) 式で記述されるならば、 $C(s) = \hat{C}(s)e^{sL}$ は $G(s)e^{-sL}$ に対する安定化修正繰返し補償器となる。 □

(証明) (3) 式で表される *causal* な修正繰返し補償器 $C(s)$ の $C_1(s)$, $C_2(s)$ が実有理関数で、(1) 式の制御系を安定化していると仮定する。このとき、(1) 式の制御系の特性方程式は、

$$\begin{aligned} 1 + G(s)e^{-sL}C(s) \\ &= 1 + G(s)e^{-sL}\{C_1(s) + C_2(s)C_r(s)\} \\ &= 1 + G(s)\{C_1(s)e^{-sL} + C_2(s)C_r(s)e^{-sL}\} \end{aligned} \quad (20)$$

に書き換えられる。 $C(s)$ が *causal* であることから、 $\hat{C}(s) = C(s)e^{-sL}$ もまた *causal* である。したがって、(20) 式は、 $C(s)e^{-sL} = C_1(s)e^{-sL} + C_2(s)C_r(s)e^{-sL}$ が $G(s)$ を安定化していることを示している。

逆に、 $\hat{C}(s)$ が $G(s)$ を安定化し、 $C(s) = \hat{C}(s)e^{sL}$ が *causal* で (3) 式で記述されるならば、 $C(s) = \hat{C}(s)e^{sL}$ は $G(s)e^{-sL}$ に対する安定化修正繰返し補償器となることを示す。制御系の特性方程式は

$$\begin{aligned} 1 + G(s)\hat{C}(s) \\ &= 1 + G(s)C(s)e^{-sL} \\ &= 1 + G(s)\{C_1(s)e^{-sL} + C_2(s)C_r(s)e^{-sL}\} \\ &= 1 + G(s)e^{-sL}\{C_1(s) + C_2(s)C_r(s)\} \end{aligned} \quad (21)$$

と記述される。 $\hat{C}(s)$ が $G(s)$ を安定化し、 $C(s) = \hat{C}(s)e^{sL}$ がcausalで(3)式で記述されるという仮定から、(21)式は、 $\hat{C}(s)$ が $G(s)$ を安定化しているならば、 $C(s) = \hat{C}(s)e^{sL} = C_1(s) + C_2(s)C_r(s)$ が $G(s)e^{-sL}$ を安定化していることを表している。以上のことから補題2は証明された。■

補題1と補題2を用いて、定理1を証明する。

(証明) まず、必要性を証明する。すなわち、 $C_1(s)$, $C_2(s)$ が実有理関数のとき、(3)式で表されるcausalな修正繰返し補償器 $C(s)$ が $G(s)e^{-sL}$ を安定化しているならば、補償器 $C(s)$ と $Q(s)$ がそれぞれ(5)式と(8)式で表され、 $Q(s) \in H_\infty$ であり、さらに(10)~(14)式が成り立つことを示す。(3)式の $C_1(s)$, $C_2(s)$ が実有理関数であることと補題2から、制御対象 $G(s)e^{-sL}$ を安定化する(3)式の修正繰返し補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは、 $G(s)$ に対する安定化補償器 $\hat{C}(s) = C(s)e^{-sL}$ のパラメトリゼーションと等価である。補題1から、 $G(s)$ に対する安定化補償器 $\hat{C}(s)$ のパラメトリゼーションは

$$\begin{aligned}\hat{C}(s) &= \frac{C(s)e^{-sL}}{\bar{Y}(s) - N(s)Q(s)} \\ &= \frac{\bar{X}(s) + D(s)Q(s)}{\bar{Y}(s) - N(s)Q(s)}\end{aligned}\quad (22)$$

と表される。ただし、 $N(s) \in RH_\infty$, $D(s) \in RH_\infty$ は $G(s)$ を RH_∞ 上で既約分解したときの既約因子で(6)式を満足する関数、 $\bar{X}(s)$, $\bar{Y}(s)$ は(7)式を満足する関数、 $Q(s) \in H_\infty$ である。ここで、(22)式は(5)式と等価であることに注意する。残された問題は、 $Q(s)$ が(8)式で表され、さらに(10)~(14)式が成り立つことを示すことである。(3)式の $C(s)$ を(22)式に代入し、 $Q(s)$ について整理すると、

$$\begin{aligned}Q(s) &= \frac{Q_{n1}(s) + Q_{n2}(s)e^{-sL} + Q_{n3}(s)e^{-sT}}{Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{n4}(s)e^{-s(T+L)} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}}\end{aligned}\quad (23)$$

が得られる。ここで、 $Q_{ni}(s) (i = 1, \dots, 4)$, $Q_{di}(s) (i = 1, \dots, 4)$ はそれぞれ

$$Q_{n1}(s) = -C_{1d}(s)C_{2d}(s)q_d(s)\bar{X}(s) \in RH_\infty \quad (24)$$

$$Q_{n2}(s) = C_{1n}(s)C_{2d}(s)q_d(s)\bar{Y}(s) \in RH_\infty \quad (25)$$

$$Q_{n3}(s) = C_{1d}(s)C_{2d}(s)q_n(s)\bar{X}(s) \in RH_\infty \quad (26)$$

$$\begin{aligned}Q_{n4}(s) &= (-C_{1n}(s)C_{2d}(s) + C_{1d}(s)C_{2n}(s))q_n(s)\bar{Y}(s) \in RH_\infty\end{aligned}\quad (27)$$

$$Q_{d1}(s) = C_{1d}(s)C_{2d}(s)q_d(s)D(s) \in RH_\infty \quad (28)$$

$$Q_{d2}(s) = C_{1n}(s)C_{2d}(s)q_d(s)N(s) \in RH_\infty \quad (29)$$

$$Q_{d3}(s) = -C_{1d}(s)C_{2d}(s)q_n(s)D(s) \in RH_\infty \quad (30)$$

$$\begin{aligned}Q_{d4}(s) &= (-C_{1n}(s)C_{2d}(s) + C_{1d}(s)C_{2n}(s))q_n(s)N(s) \in RH_\infty\end{aligned}\quad (31)$$

である。ただし、 $C_{1n}(s) \in RH_\infty$, $C_{1d}(s) \in RH_\infty$, $C_{2n}(s) \in RH_\infty$, $C_{2d}(s) \in RH_\infty$, $q_n(s) \in RH_\infty$, $q_d(s) \in RH_\infty$ は、それぞれ $C_1(s)$, $C_2(s)$, $q(s)$ を RH_∞ 上で既約分解したときの既約因子であり、

$$C_1(s) = \frac{C_{1n}(s)}{C_{1d}(s)} \quad (32)$$

$$C_2(s) = \frac{C_{2n}(s)}{C_{2d}(s)} \quad (33)$$

$$q(s) = \frac{q_n(s)}{q_d(s)} \quad (34)$$

を満足する。(23)式から、(3)式で表される修正繰返し補償器 $C(s)$ が(1)式の制御系を安定化するならば、(5)式に含まれる $Q(s)$ は(8)式で表されることが示された。(24)~(31)式から、(10)~(13)式を満足していることが確認できる。また、(24)~(31)式を(14)式の左辺に代入すると、

$$\frac{\alpha(s) - \beta(s)}{\gamma(s)} = C_2(s) \quad (35)$$

が得られ、 $C_2(s) \neq 0$ の仮定から、(14)式が成り立つ。つぎに、十分性を証明する。すなわち、(9)~(14)式の仮定のもと、(5)式の補償器 $C(s)$ に含まれる $Q(s)$ が(8)式で表されるならば、(5)式の補償器 $C(s)$ は(3)式の形式で記述されることを示す。(5)式に(8)式を代入し、(10)~(13)式の仮定を用いて整理すると

$$C(s) = C_1(s) + C_2(s) \frac{q(s)e^{-sT}}{1 - q(s)e^{-sT}} \quad (36)$$

と書き直される。ただし、 $C_1(s)$, $C_2(s)$, $q(s)$ は、それぞれ

$$C_1(s) = \frac{\bar{X}(s)Q_{d2}(s) + D(s)Q_{n2}(s)}{\bar{Y}(s)Q_{d1}(s) - N(s)Q_{n1}(s)} \quad (37)$$

$$C_2(s) = \frac{(\tilde{X}(s)Q_{d2}(s) + D(s)Q_{n2}(s))}{(\tilde{Y}(s)Q_{d1}(s) - N(s)Q_{n1}(s))} \cdot \frac{(\tilde{Y}(s)Q_{d3}(s) - N(s)Q_{n3}(s))}{(\tilde{Y}(s)Q_{d3}(s) - N(s)Q_{n3}(s))} - \frac{(\tilde{Y}(s)Q_{d1}(s) - N(s)Q_{n1}(s))}{(\tilde{X}(s)Q_{d4}(s) + D(s)Q_{n4}(s))} \quad (38)$$

$$q(s) = -\frac{\tilde{Y}(s)Q_{d3}(s) - N(s)Q_{n3}(s)}{\tilde{Y}(s)Q_{d1}(s) - N(s)Q_{n1}(s)} \quad (39)$$

である。(14)式の仮定から、 $C_2(s) \neq 0$ が成り立つ。(39)式と(9)式の仮定から、 $q(0) = 1$ を満足する。以上のことから、(9)~(14)式の仮定のもと、自由パラメータ $Q(s)$ が(8)式で表されるならば、(5)式の補償器 $C(s)$ は(3)式の形式で記述され、補償器 $C(s)$ が修正繰返し補償器として働くことが示された。

以上のことから定理1は証明された。■

注意2 定理1において、 $Q(s) \in H_\infty$ を満足するように $Q_{ni}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$, $Q_{di}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$ を定める必要がある。 $Q_{ni}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$, $Q_{di}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$ を決定した後、 $Q(s) \in H_\infty$ であることを確認するには、つぎようにすればよい。すなわち、 $Q_{ni}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$ であるので、 $Q_{n1}(s) + Q_{n2}(s)e^{-sL} + Q_{n3}(s)e^{-sT} + Q_{n4}(s)e^{-s(T+L)} \in H_\infty$ である。したがって、 $1/(Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}) \in H_\infty$ ならば $Q(s) \in H_\infty$ である。 $Q_{di}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$ であることとナイキストの定理から、 $Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}$ のナイキスト軌跡が原点のまわりを囲まなければ、 $1/(Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}) \in H_\infty$ である。□

$G(s) \in RH_\infty$ のとき、(6)、(7)式を満足する $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{D}(s)$, $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$, $\tilde{Y}(s)$ に

$$N(s) = \tilde{N}(s) = G(s) \quad (40)$$

$$D(s) = \tilde{D}(s) = 1 \quad (41)$$

$$X(s) = \tilde{X}(s) = 0 \quad (42)$$

$$Y(s) = \tilde{Y}(s) = 1 \quad (43)$$

がある。したがって、 $G(s) \in RH_\infty$ のとき、定理1は簡単になり、制御対象 $G(s)e^{-sL}$ に対する安定化修正繰返し補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは、つぎの系にまとめられる。

系1 (1) 式の制御系を内部安定化する *causal* な修正繰返し補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは、

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - G(s)Q(s)} e^{sL} \quad (44)$$

で表される。ただし、 $Q(s) \in H_\infty$ は

$$Q(s) = \frac{Q_{n2}(s)e^{-sL} + Q_{n4}(s)e^{-s(T+L)}}{Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}} \quad (45)$$

で記述される。ただし、 $Q_{n2}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n4}(s) \in RH_\infty$, $Q_{di}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$ は

$$-\frac{Q_{d3}(0)}{Q_{d1}(0)} = 1 \quad (46)$$

$$Q_{d2}(s) - G(s)Q_{n2}(s) = 0 \quad (47)$$

$$Q_{d4}(s) - G(s)Q_{n4}(s) = 0 \quad (48)$$

$$\frac{Q_{n2}(s)Q_{d3}(s) - Q_{d1}(s)Q_{n4}(s)}{Q_{d1}(s)Q_{d3}(s)} \neq 0 \quad (49)$$

を満足する任意の関数である。□

(証明) 定理1と(40)~(42)式から、簡単に証明される。そのため、詳細は省略する。■

4. 設 計 手 順

ここでは、定理1を用いた修正繰返し補償器 $C(s)$ の設計法を与える。

定理1を用いた修正繰返し補償器 $C(s)$ の設計法は、つぎの手順にまとめられる。

Step 1) 制御対象 $G(s)e^{-sL}$ の $G(s)$ に対し、(6)式を満足する RH_∞ 上の既約因子 $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{D}(s)$ を求める。

Step 2) (7)式を満足する $\tilde{X}(s) \in RH_\infty$, $\tilde{Y}(s) \in RH_\infty$ を求める。

Step 3) (9)~(14)式を満足し、 $Q(s) \in H_\infty$ となるように、 $Q_{ni}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$, $Q_{di}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$ を以下の手順で定める。

(a) (3)式の繰返し補償器を用いると、 $1 - q(j\omega) \simeq 0$ を満足する周波数 ω の領域の目標入力 r の周波数成分に対し、小さな定常偏差で出力 y が目標入力 r に追従する。そこで、所望の周波数領域において、 $1 - q(j\omega) \simeq 0$ を満足するように $q(s) \in RH_\infty$ を定める。

- (b) $q(s)$ が (39) 式で与えられることと, (10), (12) 式から,

$$q(s) = -\frac{Q_{d3}(s)}{Q_{d1}(s)} \quad (50)$$

が成り立つので, 上式を満足し, さらに (10), (12) 式から求められる $Q_{n1}(s)$, $Q_{n3}(s)$ が $Q_{n1}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n3}(s) \in RH_\infty$ を満足するよう $Q_{d1}(s) \in RH_\infty$, $Q_{d3}(s) \in RH_\infty$ を定める.

- (c) (11), (13) 式から求められる $Q_{n2}(s)$, $Q_{n4}(s)$ がともに $Q_{n2}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n4}(s) \in RH_\infty$ を満足し, さらに $Q(s) \in H_\infty$ を満足するよう $Q_{d2}(s) \in RH_\infty$, $Q_{d4}(s) \in RH_\infty$ を定める.

Step 4) $C_1(s)$, $C_2(s)$ をそれぞれ (37), (38) 式で求め, (3) 式の安定化修正繰返し補償器 $C(s)$ を構成する.

上記の手順において, $Q(s) \in H_\infty$ を満足する $Q_{ni}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$, $Q_{di}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$ を定めるところが, 幾分やっかいである. これは, $Q_{ni}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$, $Q_{di}(s) \in RH_\infty (i=1, \dots, 4)$ の 8 つのパラメータを定める必要があることに起因する. つぎに (10) ~ (14) 式の条件を用いて, 設定すべき変数を減らすことで, $Q(s) \in H_\infty$ を満足する方法を述べる.

1. $Q_{n4}(s) = Q_{d4}(s) = 0$ とする方法

$$Q_{n4}(s) = Q_{d4}(s) = 0 \quad (51)$$

としても, $Q_{d1}(s) \neq 0$, $Q_{d2}(s) \neq 0$, $Q_{d3}(s) \neq 0$ ならば (9), (14) 式を満足できる. また, (10), (11), (12) 式から,

$$Q_{n1}(s) = -\frac{\tilde{X}(s)}{D(s)} Q_{d1}(s) \quad (52)$$

$$Q_{n2}(s) = -\frac{\tilde{Y}(s)}{N(s)} Q_{d2}(s) \quad (53)$$

$$Q_{n3}(s) = -\frac{\tilde{X}(s)}{D(s)} Q_{d3}(s) \quad (54)$$

が成り立つので, $Q_{n1}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n2}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n3}(s) \in RH_\infty$ が成り立つように $Q_{d1}(s) \in RH_\infty$, $Q_{d2}(s) \in RH_\infty$, $Q_{d3}(s) \in RH_\infty$ を定める. 上記のことから, $Q_{d1}(s)$, $Q_{d2}(s)$, $Q_{d3}(s)$ を用いて, 以下の条件を満足するようにすれば, (8) 式の $Q(s)$ は $Q(s) \in H_\infty$ となる.

- $Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT}$ のナイキスト軌跡が原点のまわりを囲まない
- (9) 式を満足する
- (52), (53), (54) 式の $Q_{n1}(s)$, $Q_{n2}(s)$, $Q_{n3}(s)$ が, $Q_{n1}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n2}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n3}(s) \in RH_\infty$ を満足する

2. $Q_{n2}(s) = Q_{d2}(s) = 0$ とする方法

$$Q_{n2}(s) = Q_{d2}(s) = 0 \quad (55)$$

としても, $Q_{d1}(s) \neq 0$, $Q_{d3}(s) \neq 0$, $Q_{d4}(s) \neq 0$ ならば (9), (14) 式を満足できる. また, (10), (12), (13) 式から,

$$Q_{n1}(s) = -\frac{\tilde{X}(s)}{D(s)} Q_{d1}(s) \quad (56)$$

$$Q_{n3}(s) = -\frac{\tilde{X}(s)}{D(s)} Q_{d3}(s) \quad (57)$$

$$Q_{n4}(s) = \frac{\tilde{Y}(s)}{N(s)} Q_{d4}(s) \quad (58)$$

が成り立つので, $Q_{n1}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n3}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n4}(s) \in RH_\infty$ が成り立つように $Q_{d1}(s) \in RH_\infty$, $Q_{d3}(s) \in RH_\infty$, $Q_{d4}(s) \in RH_\infty$ を定める. 上記のことから, $Q_{d1}(s)$, $Q_{d3}(s)$, $Q_{d4}(s)$ を用いて, 以下の条件を満足するようにすれば, (8) 式の $Q(s)$ は $Q(s) \in H_\infty$ となる.

- $Q_{d1}(s) + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}$ のナイキスト軌跡が原点のまわりを囲まない
- (9) 式を満足する
- (56), (57), (58) 式の $Q_{n1}(s)$, $Q_{n3}(s)$, $Q_{n4}(s)$ が, $Q_{n1}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n3}(s) \in RH_\infty$, $Q_{n4}(s) \in RH_\infty$ を満足する

以上で述べたように $Q_{ni}(s) (i=1, \dots, 4)$, $Q_{di}(s) (i=1, \dots, 4)$ を選ぶことで $Q(s) \in H_\infty$ を満足し, 安定化修正繰返し補償器 $C(s)$ が設計できる.

5. 数 値 例

ここでは数値例を示し, 本稿で述べたパラメトリゼーションの有用性を検討する.

次式で表されるむだ時間を持つ制御対象

$$G(s)e^{-sL} = \frac{s+1}{s^2+5s+6}e^{-2s} \quad (59)$$

に対し, (1) 式の制御系を安定化し, 周期 $T=1[\text{sec}]$ の周期目標入力 $r(t)$ に小さな定常偏差で追従する修正繰返し補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションを求めることを考える. ただし, 周期 $T=1[\text{sec}]$ の周期目標入力 $r(t)$ は

$$r(t) = \sin(2\pi t) \quad (60)$$

と記述されるものとする. $G(s) \in RH_\infty$ であるので, 系 1 から, (59) 式の制御対象 $G(s)e^{-sL}$ に対する安定化修正繰返し補償器 $C(s)$ のパラメトリゼーションは, (44) 式で表される.

つぎに, 4. で述べた設計手順を用い修正繰返し補償器 $C(s)$ を設計することを考える.

Step 1) $G(s) \in RH_\infty$ であるので, (6) 式を満足する RH_∞ 上の既約因子 $N(s)$, $D(s)$, $\hat{N}(s)$, $\hat{D}(s)$ は, (40), (41) 式で与えられる.

Step 2) (7) 式を満足する $\hat{X}(s) \in RH_\infty$, $\hat{Y}(s) \in RH_\infty$ に (42), (43) 式がある.

Step 3) Step1), Step2) から, (9)~(14) 式は (46)~(49) 式に書き換えられる. したがって, (46)~(49) 式を満足するよう (45) 式の $Q_{ni}(s) (i=2,4)$, $Q_{di}(s) (i=1,\dots,4)$ を定める. 設定すべき変数を減らすため, 4. で述べた, $Q_{n4}(s) = Q_{d4}(s) = 0$ とする方法を採用する.

(a) $q(s)$ を

$$q(s) = \frac{1}{0.001s+1} \quad (61)$$

とする.

(b) (50) 式を満足するよう $Q_{d1}(s)$, $Q_{d3}(s)$ を

$$Q_{d1}(s) = \frac{0.001s+1}{3s+1} \in RH_\infty \quad (62)$$

$$Q_{d3}(s) = \frac{-1}{3s+1} \in RH_\infty \quad (63)$$

とする.

(c) (47) 式を満足し, $Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}$ のナイキスト軌跡が原点のまわりを囲まないように, $Q_{d2}(s)$ を試行錯誤的に探索し

$$Q_{d2}(s) = \frac{2}{15s+1} \in RH_\infty \quad (64)$$

で与える. (47) 式から, $Q_{n2}(s)$ は

$$Q_{n2}(s) = \frac{2s^2+10s+12}{15s^2+16s+1} \in RH_\infty \quad (65)$$

となり, $Q_{n2}(s) \in RH_\infty$ の条件を満足する. このとき, $Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}$ のナイキスト軌跡を図 1, 図 2 に示す. ただし, 図 2 は図 1 の原点部分を拡大表示した図である.

図 1, 図 2 から, $Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}$ のナイキスト軌跡が原点のまわりを囲まないことが確認できる. $Q_{ni}(s) \in RH_\infty (i=2,4)$, $Q_{di}(s) \in RH_\infty (i=1,\dots,4)$ であることと, $Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}$ のナイキスト軌跡が原点のまわりを囲まないことから, $Q(s) \in H_\infty$ であることがわかる.

Fig. 1 Nyquist plot of $Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}$

Fig. 2 Nyquist plot of $Q_{d1}(s) + Q_{d2}(s)e^{-sL} + Q_{d3}(s)e^{-sT} + Q_{d4}(s)e^{-s(T+L)}$

Step 4) (62)~(65) 式を用いると (3) 式の安定化修正繰返し補償器 $C(s)$ の $C_1(s)$, $C_2(s)$, $q(s)$ はそれぞれ,

$$C_1(s) = \frac{6s^3 + 32s^2 + 46s + 12}{0.0150s^3 + 15.0160s^2 + 16.0010s + 1} \quad (66)$$

$$C_2(s) = \frac{6s^3 + 32s^2 + 46s + 12}{0.0150s^3 + 15.0160s^2 + 16.0010s + 1} \quad (67)$$

$$q(s) = \frac{1}{0.001s+1} \quad (68)$$

となる.

設計された修正繰返し補償器 $C(s)$ を用いたとき, 周期目標入力 $r(t)$ に対する (1) 式の制御系の出力 $y(t)$ の応答を図 3 に示す. ただし, 実線が観測出力 $y(t)$ の応答を表し, 破線が追従すべき目標入力 $r(t)$ の応答を表

Fig. 3 Response for the reference input $r(t) = \sin(2\pi t)$

す。図3から、出力 $y(t)$ が目標入力 $r(t)$ に小さな定常偏差で追従していることが確認できる。

以上のように、簡単な手順で安定化修正繰返し補償器が設計できるので、本稿で述べたパラメトリゼーションの有用性が検証された。

6. あとがき

本稿では、入力むだ時間系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを与えた。入力むだ時間系が、むだ時間部分と実有理関数部分に分解できることと修正繰返し補償器の構造を利用して、入力むだ時間系に対する安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを与えた。得られた安定化修正繰返し補償器のパラメトリゼーションを援用した安定化修正繰返し補償器の設計手順を与えた。数値例を示し、本稿で得られたパラメトリゼーションの有用性を検証した。

本稿の一部は、財団法人実吉奨学会の援助を受けた。ここに記し感謝の意を表したい。

文 献

- (1) 井上他, 陽子シンクロトン電磁石電源の繰返し運転における高精度制御, “電気学会論文集”, Vol.C100, No.7, (1980), pp.234–240.
- (2) 井上, 岩井, 中野, ブレイバックサーボ系の高精度制御, “電気学会論文誌”, Vol.C101, No.4, (1981), pp.89–96.
- (3) 原, 小俣, 中野, 繰返し制御系の安定条件と設計法, “計測自動制御学会論文集”, Vol.22, No.1, (1986), pp.36–42.
- (4) 山本, 原, 繰返し制御系の内部モデル原理と安定化可能性, “計測自動制御学会論文集”, Vol.22, No.8, (1987), pp.830–834.
- (5) 原, 山本, 多変数繰返し制御系の安定化-安定条件と安定化補償器のクラス, “計測自動制御学会論文集”, Vol.22, No.12, (1986), pp.1256–1261.
- (6) S. Hara, Y. Yamamoto, T. Omata and M. Nakano, *Repetitive Control System: A New Type Servo System for Periodic Exogenous Signals*, “IEEE Trans. on Automatic Control”, Vol.AC-33, No.7, (1988), pp.659–668.
- (7) T. Omata, S. Hara and M. Nakano, *Nonlinear Repetitive Control with Application to Trajectory Control of Manipulators*, “J. of Robotic Systems”, Vol.4, No.5, (1987), pp.631–652.
- (8) 渡部, 山足, スペクトル分解法による繰返し制御系の安定化, “計測自動制御学会論文集”, Vol.22, No.5, (1986), pp.535–541.
- (9) M. Ikeda and M. Takano, *Repetitive Control for Systems with Nonzero Relative Degree*, “Proc. 29th IEEE Conf. on Decision and Control”, (1990), pp. 1667–1672.
- (10) 後藤, 松林, 宮崎, 川村, 有本, 繰返し型学習補償器を用いた制御系の外乱抑制特性の考察と多重周期学習補償器の提案, “システムと制御”, No.5, (1987), pp.367–374.
- (11) K. Watanabe and K. Yamada, “Repetitive control of time-delay systems”, Proc. 29th IEEE Conf. on Decision and Control, (1990), pp.1685–1690.
- (12) 加藤, 舟橋, 繰返し制御器の一構成法, “計測自動制御学会論文集”, Vol.32, No.12, (1996), pp.1601–1605.
- (13) D.C. Youla, H. Jabr and J.J. Bongiorno, *Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers Part I*, “IEEE Trans. on Automatic Control”, AC-21, (1976), pp.3–13.
- (14) V. Kucera, *Discrete linear system, The polynomial eqnarray approach*, Wiley, (1979).
- (15) C.A. Desoer, R.W. Liu, J. Murray and R. Saeks, *Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis*, “IEEE Trans. on Automatic Control”, AC-25, (1980), pp.399–412.
- (16) J.J. Glaria and G.C. Goodwin, *A parametrization for the class of all stabilizing controllers for linear minimum phase system*, “IEEE Trans. on Automatic Control”, AC-39, (1994), pp.433–434.
- (17) M. Vidyasagar, *Control System Synthesis - A factorization approach*, MIT Press, (1985).
- (18) 山田, 奥山, 最小位相系に対する繰返し制御系のパラメトリゼーション, “計測自動制御学会論文集”, Vol.38, No.4, (2000), pp.328–334.
- (19) 山田, 佐藤, 奥山, あるクラスの非最小位相系に対する繰返し制御系のパラメトリゼーション, “日本機械学会論文集 (C) 編”, Vol.69-686, (2003), pp.2700–2706.
- (20) 佐藤, 山田, 荒川, 非最小位相系に対する修正繰返し補償器のパラメトリゼーション, “日本機械学会論文集”, 投稿中.
- (21) T.B. Sheridan, *Telerobotics, Automation, and Human Supervisory control*, The MIT Press, (1992).