ピッチング励振を受ける多液面を有する 直方体容器内液面の非線形振動*

高原 弘樹^{*1}, 木村 康 治^{*2}, 足 田 洋 一^{*2}

Nonlinear Vibration of Multi-Surface Liquid in a Rectangular Tank Subjected to Pitching Excitation

Hiroki TAKAHARA^{*3}, Koji KIMURA and Yoichi HIKITA

^{*3} Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

The nonlinear characteristics of multi-surface liquid motion in a rectangular tank are investigated. The rectangular tank is divided into two parts by the partition, which is perpendicular to the bottom of the tank and does not reach the bottom. The nonlinearity of the liquid surface oscillation is considered in the response analysis of the sloshing motion. The nonlinear ordinary differential equations governing the liquid surface oscillation are derived. The time histories of the liquid surface displacement are calculated to the harmonic pitching excitations. An experiment was conducted using a model tank. A fairly good agreement was found between the theoretical and experimental results. It is shown that the nonlinear analysis is important for estimating the sloshing phenomena.

Key Words: Vibration of Continuous System, Liquid Sloshing, Multi-Surface, Nonlinear Vibration, Pitching Excitation

1. 緒 言

自由表面を有する容器内液体が外部から励振力を受けるとき、励振振動数と液面揺動の固有振動数が近いと大きく揺動する。この現象はスロッシングと呼ばれ、工学上その特性を把握することは重要である⁽¹⁾⁽²⁾。また、スロッシングは顕著な非線形性を示すことが知られており⁽³⁾⁽⁴⁾、大形液体貯槽や液体貨物運搬船の安全性の観点から、円筒容器や直方体容器内の非線形液面揺動に着目した多くの研究がなされている^{(5)~(11)}。

原子炉容器等に代表される複雑な内部構造物を有する系や配管による容器間の連結が存在する系内で生じるスロッシング現象に着目すると、従来から多く行われていたように、容器を円筒や直方体でモデル化する方法では、必ずしも十分ではなく、内部の構造物等を考慮したモデル化が必要な場合があると考えられる。そのため、内部の構造物を円筒で近似した研究^{(12)~(15)}や、容器底面に直方体ブロックが存在する場合の線形

自由振動特性に着目した研究⁽¹⁶⁾がある。一方、容器間が配管で連結されたり、液面付近に複雑な内部構造物を有する系では多液面系としてモデル化する必要があると考えられるが、多液面系を扱った論文は比較的少なく、隔壁挿入による矩形容器内溶体スロッシングの制振特性を実験的に解明した研究⁽¹⁷⁾やトップ・エントリー形の高速増殖炉を対象として、配管による多液面性を考慮した研究⁽¹⁸⁾がある程度であり、いまだ未解明な点が多いと考えられる。

液面揺動が大きくなる共振点近傍では、非線形性が顕著に現れるため、その揺動特性を把握するためには、非線形解析が不可欠である。そこで、本研究では多液面を有する場合の基本的特性を把握するために、図1に示すような底面まで達しないしきりを設けた直方体容器を用いて、この多液面を有する容器内の非線形二次元揺動に着目し、非線形の境界条件にガレルキン法を適用し、液面揺動を支配する非線形方程式系を導出した。また、モデル容器を用いた振動実験を行い、数値計算結果との比較・検討を行った。

2. 解析モデルと基礎方程式

2.1 解析モデル 図2に示すような二次元のしきりを有する直方体容器でモデル化する。容器に固定さ

* 原稿受付 2004 年 10 月 29 日。

^{*1} 正員、東京工業大学大学院理工学研究科(〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

^{*2} 正員、東京工業大学大学院情報理工学研究科。
E-mail: htakahar@mes.titech.ac.jp

れた移動座標系 $o-xz$, および, 静止座標系 $O-XZ$ をとり, 容器は, 水平・垂直方向に強制変位 $f_x(t)$, $f_z(t)$ と, 移動座標系上の点 $P(x_c, z_c)$ 回りに, 強制角度励振 $\xi(t)$ を受けるものとする。容器寸法は x 軸方向の辺の長さ $a_1 + a_2$, しきりの厚さ Δd , 容器底面としきりの距離 c (以下, しきり開口幅と呼ぶ) とし, 静止状態における液深 h からの液面の変位を液位 η とする。

2.2 基礎方程式 液体を非圧縮性完全流体の渦なし流れと仮定すると, 速度ポテンシャル ϕ が存在し, 支配方程式および線形化した境界条件式は次式のように与えられる。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \text{ in } V \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_n, \text{ on } S_w \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - v_x \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \text{ on } S_s \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} - v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ & + g \{ -(x - x_c) \sin \xi + (h + \eta - z_c) \cos \xi + f_z \\ & + z_c \} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \dot{G}(t) = 0, \text{ on } S_s \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, V : 液体, S_w : 液体と接するしきりの両面および底面を含む容器の全壁面, S_s : 液面, g : 重力加速度, v_x, v_z, v_n : 容器の x, z 方向, および, 容器法線方向の速度, $\partial/\partial n$: 法線方向に関する微分(外向きが正)である。 $\dot{G}(t)$ はオイラー方程式の積分によって生じる任意の時間の関数である。

3. 非線形振動解析

2章で求めた基礎方程式系にガレルキン法を適用し, 非線形振動方程式を導出する。ガレルキン法で用いる許容関数は自由振動モードを用いるが, 本報で着目している容器では自由振動モードを解析的に求めること

Fig. 1 Rectangular tank with multi-surface liquid

ができないため, まず, 境界要素法を用いて固有振動モードを求める。次に, この固有振動モードを用いて, 液位 η と速度ポテンシャル ϕ の許容関数を構成し, 非線形の境界条件に代入し, ガレルキン法を用いて非線形振動方程式を求める。

3.1 境界要素法による自由振動解析 式(3), (4)を線形化して液位 η を消去すると, 次式のように変形できる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \text{ on } S_s \quad (5)$$

いま, 自由振動解析のため, $\phi(x, z, t) = \phi_0(x, z)e^{i\omega t}$ とすれば, ϕ_0 に関する境界値問題として以下が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} = 0, \text{ in } V \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} - \alpha \phi_0 = 0, \text{ on } S_s \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0, \text{ on } S_w \quad (8)$$

ここで, $\alpha = \omega^2/g$ である。境界要素法により, 式(6) ~ (8)を解くことにより, 固有振動数 ω_i , および, 振動モード $V_i(x, z)$ を求める。

3.2 許容関数 液位 η と速度ポテンシャル ϕ の許容関数を次式のように仮定する。

$$\eta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(t) S_i(x) + x \tan \xi \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) = & \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t) V_i(x, z) + x v_x + z v_z \\ & + \xi \Pi(x, z) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, $V_i(x, z)$ は3.1節で求めた固有振動モード, $S_i(x)$ は, 液面揺動の固有振動モードで $V_i(x, h) = S_i(x)$ である。また, C_i, A_i は η および ϕ の一般化座標であり, 関数 $\Pi(x, z)$ は境界条件を満たすために

Fig. 2 Analytical model

必要な関数である⁽¹⁹⁾。

3.3 オーダの仮定 諸量を容器幅の長さ a_1 , および, 励振振動数近傍の卓越すると仮定するモードの固有振動数 ω_{domt} を用いて無次元化したのち, 許容関数式(9), (10)を非線形境界条件式(3), (4)に代入し, 外部励振が共振状態に近くなる場合に着目し整理する。

このとき, 液位 η に関する一般化座標 C_i の非線形性が三次の項を含むこと⁽²⁰⁾⁽²¹⁾を考慮し, 外部励振項のオーダを $O(\varepsilon^{3/3})$, 外部励振の振動数近傍に固有振動数があるモードを卓越モード, そのオーダを $O(\varepsilon^{1/3})$ とする。

著者らは従来の研究⁽²¹⁾で, 液面揺動の非線形性により, 卓越モードの二乗の形状の励振力(卓越モードの形状を $S_p(x)$ とすると, 励振力の形状は $S_p^2(x)$)が見掛け上作用して高次モードを励起し, その励起されるモードのオーダが $O(\varepsilon^{2/3})$ であることを指摘している。したがって, 卓越モードの二乗で表される形状と直交しないモード, すなわち, 卓越モードの形状を $S_p(x)$ とすると

$$\int_{S_p} S_p^2(x) S_q(x) dx \dots\dots\dots (11)$$

が零でないモード形状 $S_q(x)$ を有するモードが, 非線形性により連成する $O(\varepsilon^{2/3})$ のモードとなる。

単純な円筒形や, 直方体形の容器の場合には式(11)が非零となるモードは限られるが, 本研究で対象としている容器形状では, ほとんどのモードで式(11)が非零となる。そこで式(11)の大きさが, モード形状 $S_q(x)$ を有するモードへのモード励振力に対応するので, 式(11)の絶対値が大きく, 液面揺動に影響の無視できないモードのみを考慮する。

3.4 非線形振動方程式 上記のようなオーダの仮定を行った後, 卓越するモードを m 個, 連成するモードを n 個と仮定し, $O(\varepsilon^{4/3})$ 以上のオーダの項を高

次微小量として省略すると最終的に, 以下のような非線形振動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \ddot{C}_a + 2\zeta_a \omega_a \dot{C}_a + a_a(\ddot{x}_p + \ddot{z} + g) C_a \\ &= \sigma_{pa} \ddot{x}_p + \sigma_{xa} \ddot{z}_x + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m P_{a,i,j}^{(1)} C_i C_j \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m P_{a,i,j}^{(2)} \dot{C}_i \dot{C}_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^{m+n} P_{a,i,j}^{(3)} C_i C_j \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^{m+n} P_{a,i,j,k}^{(4)} \dot{C}_i \dot{C}_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m P_{a,i,j,k}^{(5)} C_i C_j C_k \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m P_{a,i,j,k}^{(6)} \dot{C}_i \dot{C}_j \dot{C}_k + \xi \sum_{i=1}^m P_{a,i}^{(7)} C_i \\ &+ \xi \sum_{i=1}^m P_{a,i}^{(8)} \dot{C}_i + \xi \sum_{i=1}^m P_{a,i}^{(9)} C_i + \ddot{z}_x \sum_{i=1}^m P_{a,i}^{(10)} C_i \\ &\dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで, 外部励振の影響係数 σ_{pa} や非線形項の係数 $P^{(1)}$ 等は液深 h やモード形状に依存する定数であり, 詳細は付録に示す。上式は m 個の卓越すると仮定したモード [$O(\varepsilon^{1/3})$ のモード] と, n 個の非線形に連成すると仮定したモード [$O(\varepsilon^{2/3})$ のモード] の振動方程式であり, 合計 $m+n$ 本の連成した非線形方程式系を表している。また, 式(12)中の ζ_a はモード減衰比である。厳密に減衰を考慮した解析は困難であるため, 完全流体として一般化座標に関する振動方程式を導出した後, 線形減衰項としてエネルギー散逸を導入した。

3.5 非線形連成特性 卓越すると仮定したモードと非線形に連成するモードの連成特性について考察する。ここでは, 卓越モードを C_p として考える。卓越モードと連成するモード C_q [オーダは $O(\varepsilon^{2/3})$] に関する微分方程式を $O(\varepsilon^{2/3})$ まで保存すると次式となる。

$$\ddot{C}_q + 2\zeta_q \omega_q \dot{C}_q + \omega_q^2 C_q = P_{q,p,p}^{(1)} C_p^2 + P_{q,p,p}^{(2)} \dot{C}_p^2 \dots\dots\dots (13)$$

上式から係数 $P_{q,p,p}^{(1)}$, $P_{q,p,p}^{(2)}$ が値を持つときには, C_q のモードに(卓越モードの振動数)×2の入力が作用することがわかる。そのため, $\omega_q = 2\omega_p$ の関係が成り立つ場合には, 非線形連成によって励振の直接作用しないモードであっても励起される可能性がある。

4. 実験

実験装置のブロック線図を図3に示す。低周波発振器で正弦波を発生させ, 油圧加振器に入力し, 揺動台の先端に鉛直方向励振を加えることによって直方体容器にピッチング励振を与えた。液面揺動が定常状態に達した後, 超音波式変位計を用いて液位を測定した。

実験で用いた容器を図4に示す ($a_1 = a_2 = 310$ mm, $\Delta d = 20$ mm)。

Fig. 3 Experimental apparatus

5. 結果および考察

使用した容器の非線形連成特性を把握するために、まず、液深と固有振動数の関係から、内部共振の起こる液深を求め、次に、調和ピッチング励振に対する液位の応答波形を調べる。

5・1 固有振動数 図5に液深 h で無次元化したしきり開口幅 c に対する容器(液深 $h=200$ mm)の固有振動数の変化を示す。横軸は液深で無次元化したし

Fig. 4 Model tank

Fig. 5 Natural frequency ($h=200$ mm)

Fig. 6 Mode shapes

きり開口幅 c/h の値、縦軸は固有振動数である。実験および計算により得られた三次までの固有振動数をそれぞれ○, ×, ▽印および実線、点線および一点鎖線で、また最低次モードの固有振動数の2倍の振動数を破線で示した。

図5より、 $c/h=0.45$ 付近で、最低次モードの固有振動数の2倍と二次モードの固有振動数がほぼ一致するため、内部共振が生じると考えられる。

5・2 考慮する振動モード 開口幅 $c/h=0.45$ とし、最低次モードおよび、三次モードがそれぞれ主共振となる振動数で励振実験を行った。5・1節の考察により、この開口幅では、最低次モードが共振すると二次モードも内部共振によって成長するが、一方、三次モードが共振する場合には内部共振は生じないことが予想される。

解析では、最低次モードおよび、三次モードをそれぞれ卓越モードとした場合、厳密には3・3節で述べたように非線形性により連成するモードは多数存在するため、式(11)を考慮して非線形に連成するモードの打ち切りを行う。本研究では、両者の場合とも二次および四次モードを考慮した解析を行った。図6に考慮した

Fig. 7 Liquid surface displacement response ($h=200$ mm, $c=90$ mm, $f=0.794$ Hz, $\xi_0=0.26^\circ$, $\zeta_1=0.0307$, $\zeta_2=0.0054$, $\zeta_3=0.0054$, $\zeta_4=0.0054$)

モード形状を示す(横軸は a_1 で無次元化した容器幅)。
図 6(a), (b) は卓越すると仮定する最低次および三次モード, (c), (d) は連成する二次および四次モードである。

5.3 時刻歴応答 しきり開口幅 $c/h=0.45$ ($h=200$ mm, $c=90$ mm) の場合, 調和ピッチング励振 $[\xi_0(t)=\xi_0 \sin \omega t]$ に対する側壁近傍での液位の時刻歴応答波形を図 7 に示す。励振振動数 $f=(2\pi)/\omega=0.794$ Hz(一次モード共振点近傍), 励振振幅 $\xi_0=0.26^\circ$ である。計算で用いる減衰比 ζ_i は, 一次, および, 三次モードを共振させた後, 励振を止め, 得られる減衰自由振動波形より求めた。なお, 二次, 四次モードの減衰比は直接計測できないので, 三次モードの値とした。上段が解析, 下段が実験結果であり, 両者はよく一致している。また, 時間の経過とともに二倍波が励起するようすが両結果とも現れ, 5.2 節の非線形連成により内部共振の発生を予想した考察と一致している。

三次モード固有振動数近傍での液位の時刻歴応答波形を図 8 に示す。励振振動数 $f=1.640$ Hz(三次モード共振点近傍), 励振振幅 $\xi_0=0.083^\circ$ である。上段が

Fig. 8 Liquid surface displacement response ($h=200$ mm, $c=90$ mm, $f=1.640$ Hz, $\xi_0=0.083^\circ$, $\zeta_1=0.030$, $\zeta_2=0.0054$, $\zeta_3=0.0054$, $\zeta_4=0.0054$)

解析, 下段が実験結果であり, 25~60 秒付近の実験での振幅の包絡線が若干早く小さくなるが, 両者はほぼ一致している。また, 両者とも励振振動数以外の振動数成分は見られず, 内部共振の生じないことを予想した 5.2 節の考察とも一致している。

6. 結 言

底面まで達しないしきりを設けた直方体容器を対象とし, 多液面系の線形自由振動解析ならびに有限振幅理論に基づいた非線形解析, さらに, しきりに関して対称なモデル容器を用いた振動実験を行い, 以下の知見が得られた。

(1) 開口幅を変化させた場合の, 一次~三次の固有振動数を求め, 解析と実験がよく一致することを示した。

(2) 境界要素法により求めた固有振動モードを用いて, 液位および速度ポテンシャルの許容関数を構成し, ガレルキン法を適用して, 液面揺動を支配する非線形振動方程式を導出した。

(3) 得られた非線形振動方程式より, 内部共振によるモード間の非線形連成メカニズムを明らかにした。

(4) 調和ピッチング励振に対して, 内部共振が生じる場合と生じない場合の時刻歴応答を求め, 解析と実験結果がほぼ一致することを示し, 本解析手法の有効性を明らかにした。

付 録

液位, 速度ポテンシャルのモード形状 S_a , V_a および関数 Π に関する液面での積分値を以下のように定義した。

$$K_{a,b,c}^{(1)} = \int_{S_s} S_a S_b S_c dS, \quad K_a^{(2)} = \int_{S_s} x S_a dS$$

$$K_{a,b}^{(2)} = \int_{S_s} x S_a S_b dS, \quad K_{a,b}^{(3)} = \int_{S_s} S_a \frac{\partial S_b}{\partial x} dS$$

$$K_{a,b,c}^{(3)} = \int_{S_s} S_a \frac{\partial S_b}{\partial x} \frac{\partial S_c}{\partial x} dS$$

$$K_{a,b,c,d}^{(3)} = \int_{S_s} S_a S_b \frac{\partial S_c}{\partial x} \frac{\partial S_d}{\partial x} dS$$

$$K_a^{(4)} = \int_{S_s} S_a \Pi|_{z=h} dS$$

$$K_{a,b}^{(5)} = \int_{S_s} S_a \frac{\partial S_b}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \Big|_{z=h} dS$$

$$K_a^{(6)} = \int_{S_s} S_a \frac{\partial \Pi}{\partial z} \Big|_{z=h} dS$$

$$K_{a,b}^{(6)} = \int_{S_s} S_a S_b \frac{\partial \Pi}{\partial z} \Big|_{z=h} dS$$

$$K_{a,b}^{(7)} = \int_{S_s} S_a S_b \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \Big|_{z=h} dS$$

$$K_{a,b,c}^{(8)} = \int_{S_s} S_a S_b \frac{\partial^2 V_c}{\partial z^2} \Big|_{z=h} dS$$

$$K_{a,b,c,d}^{(8)} = \int_{S_s} S_a S_b S_c \frac{\partial^2 V_d}{\partial z^2} \Big|_{z=h} dS$$

$$K_{a,b}^{(9)} = \int_{S_s} x S_a \frac{\partial^2 V_b}{\partial z^2} \Big|_{z=h} dS$$

また、非線形振動方程式中に現れる係数 $H^{()}$ 、 $P^{()}$ 、 σ_{pa} 、 σ_{xa} は以下のように与えられる。

$$H_{a,i,j}^{(1,1)} = K_{a,j,i}^{(8)} - K_{a,i,j}^{(3)} = H_{a,i,j}^{(1,3)}$$

$$H_{a,i,j,k}^{(1,2)} = \left(\frac{1}{2} \alpha_i + a_a \right) K_{a,k,j,i}^{(8)} - (a_a + \alpha_i) K_{a,k,j,i}^{(3)} - a_a \sum_{l=1}^{m+n} K_{a,j,l}^{(1)} (K_{l,k,i}^{(8)} - K_{l,i,k}^{(3)})$$

$$H_{a,i,j}^{(1,3)} = K_{a,j,i}^{(8)} - K_{a,i,j}^{(3)} = H_{a,i,j}^{(1,1)}, \quad H_{a,i}^{(1,4)} = K_{a,i}^{(9)} - K_{a,i}^{(3)}$$

$$H_{a,i}^{(1,5)} = a_a K_{a,i}^{(6)} + K_{a,i}^{(7)} + h K_{a,i}^{(3)} - K_{a,i}^{(5)}$$

$$H_{a,i,j}^{(2,1)} = g \alpha_i K_{a,i,j}^{(1)}$$

$$H_{a,i,j}^{(2,2)} = -\frac{1}{2} (K_{a,i,j}^{(3)} + \alpha_i \alpha_j K_{a,i,j}^{(1)}) = \frac{1}{2} H_{a,i,j}^{(2,6)}$$

$$H_{a,i,j,k}^{(2,3)} = \frac{1}{2} g K_{a,j,k,i}^{(8)} - g \sum_{l=1}^{m+n} \alpha_k \alpha_l K_{a,i,l}^{(1)} K_{a,l,k,i}^{(1)}$$

$$H_{a,i,j,k}^{(2,4)} = -(\alpha_i K_{a,k,i}^{(3)} + \alpha_i K_{a,k,i}^{(8)})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m+n} \alpha_l K_{a,k,l}^{(1)} (K_{l,i,j}^{(3)} + \alpha_i \alpha_j K_{l,i,j}^{(1)})$$

$$H_{a,i,j}^{(2,5)} = g(\alpha_i + \alpha_j) K_{a,i,j}^{(1)}$$

$$H_{a,i,j}^{(2,6)} = -(K_{a,i,j}^{(3)} + \alpha_i \alpha_j K_{a,i,j}^{(1)}) = 2H_{a,i,j}^{(2,2)}$$

$$H_{a,i}^{(2,7)} = g \alpha_i K_{a,i}^{(2)}, \quad H_{a,i}^{(2,8)} = -K_{a,i}^{(6)}$$

$$H_{a,i}^{(2,9)} = -(\alpha_i K_{a,i}^{(2)} - h K_{a,i}^{(3)} + K_{a,i}^{(5)} + \alpha_i K_{a,i}^{(6)})$$

$$\sigma_{pa} = -a_a (K_a^{(4)} - z_p K_a^{(2)}) + K_a^{(6)}, \quad \sigma_{xa} = -a_a K_a^{(2)}$$

$$P_{a,i,j}^{(1)} = \alpha_a H_{a,i,j}^{(2,1)} - g H_{a,i,j}^{(1,1)}$$

$$P_{a,i,j}^{(2)} = \frac{\alpha_a}{\alpha_i \alpha_j} H_{a,i,j}^{(2,2)} + \frac{1}{\alpha_i} H_{a,i,j}^{(1,1)}$$

$$P_{a,i,j}^{(3)} = \alpha_a H_{a,i,j}^{(2,5)} - g(H_{a,i,j}^{(1,3)} + H_{a,i,j}^{(1,3)})$$

$$P_{a,i,j}^{(4)} = \frac{\alpha_a}{\alpha_i \alpha_j} H_{a,i,j}^{(2,6)} + \frac{1}{\alpha_i} H_{a,i,j}^{(1,3)} + \frac{1}{\alpha_j} H_{a,i,j}^{(1,3)}$$

$$P_{a,i,j,k}^{(5)} = \alpha_a H_{a,i,j,k}^{(2,3)} - g H_{a,i,j,k}^{(1,2)} + \sum_{l=1}^{m+n} H_{a,l,i}^{(1,1)} H_{l,j,k}^{(2,1)}$$

$$P_{a,i,j,k}^{(6)} = \frac{\alpha_a}{\alpha_i \alpha_j} H_{a,i,j,k}^{(2,4)} + \frac{1}{\alpha_i} (H_{a,i,j,k}^{(1,2)} + H_{a,i,k,j}^{(1,2)})$$

$$+ \sum_{l=1}^{m+n} \left(-2 \frac{\alpha_a}{\alpha_i \alpha_j \alpha_l} H_{l,j,i}^{(1,1)} H_{a,i,j}^{(2,2)} + \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} H_{a,l,i}^{(1,1)} H_{l,j,i}^{(2,2)} - \frac{1}{\alpha_j \alpha_l} H_{a,l,i}^{(1,1)} H_{l,j,k}^{(1,1)} \right)$$

$$P_{a,i}^{(7)} = \alpha_a H_{a,i}^{(2,7)} - g H_{a,i}^{(1,4)}$$

$$P_{a,i}^{(8)} = \frac{\alpha_a}{\alpha_i} H_{a,i}^{(2,9)} + \frac{1}{\alpha_i} H_{a,i}^{(1,4)} + H_{a,i}^{(1,5)}$$

$$-2 \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_a}{\alpha_i \alpha_j} K_j^{(6)} H_{a,i,j}^{(2,2)} - \sum_{j=1}^{m+n} \frac{1}{\alpha_j} K_j^{(6)} H_{a,j,i}^{(1,1)}$$

$$- \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{\alpha_a}{\alpha_i \alpha_j} K_j^{(6)} H_{a,i,j}^{(2,6)}$$

$$= \frac{\alpha_a}{\alpha_i} H_{a,i}^{(2,9)} + \frac{1}{\alpha_i} H_{a,i}^{(1,4)} + H_{a,i}^{(1,5)}$$

$$- \sum_{j=1}^{m+n} \frac{1}{\alpha_j} K_j^{(6)} \left(2 \frac{\alpha_a}{\alpha_i} H_{a,i,j}^{(2,2)} + H_{a,j,i}^{(1,1)} \right)$$

$$P_{a,i}^{(9)} = \alpha_a H_{a,i}^{(2,8)} + H_{a,i}^{(1,5)} - \sum_{j=1}^{m+n} (K_j^{(4)} - z_p K_j^{(2)}) H_{a,j,i}^{(1,1)}$$

$$P_{a,i}^{(10)} = - \sum_{j=1}^{m+n} K_j^{(2)} H_{a,j,i}^{(1,1)}$$

$$\alpha_a = \frac{\omega_a^2}{g}$$

文 献

- (1) Abramson, H. N., *NASA SP-106*, (1966).
- (2) 橋本弘之, 機誌, **89**-810 (1986), 512-517.
- (3) Miles, J. W., *J. Fluid Mech.*, **75** (1976), 419-448.
- (4) Funakoshi, M. and Inoue, S., *J. Fluid Mech.*, **192** (1988), 219-247.
- (5) 葉山眞治・有賀敬治・渡辺辰郎, 機論, **49**-437, C (1983), 22-30.
- (6) Faltinsen, O. M., *J. Ship Res.*, **18**-4 (1974), 224-241.
- (7) 木村康治・高原弘樹・小倉秀夫, 機論, **62**-596, C (1996), 1285-1294.
- (8) 木村憲明・大橋弘隆, 機論, **44**-385 (1978), 3024-3033.
- (9) 大森博司・松井哲也・加藤啓一・藤原健, 日本建築学会構造系論文報告集, **375** (1987), 65-72.
- (10) 小松敬治, 航空宇宙技術研究所報告, 757 (1983), 1-20.
- (11) 木村康治・高原弘樹・伊東健・坂田勝, 機論, **58**-556, C (1992), 3564-3571.
- (12) Shibata, H., Tokuda, N. and Sakurai, T., *ASME PVP Fluid-Structure Interaction and Structure Mechanics*, **310** (1995), 55-61.
- (13) Modi, V. J. and Welt, F., *J. Ship Res.*, **34**-4 (1990), 253-261.
- (14) Welt, F. and Modi, V. J., *Trans. ASME, J. Vib. Acoust.*, **114** (1992), 10-16.
- (15) 木村康治・高原弘樹, 機論, **67**-663, C (2001), 3390-3397.
- (16) Choun, Y. S. and Yun, C. B., *Comput. Struct.*, **61**-3 (1996), 401-413.
- (17) 渡辺昌宏・小林伸之・本多智一・大野克徳・本井久之, 機論, **67**-657, C (2001), 1422-1429.
- (18) Kimura, K., Ogura, K., Mieda, T., Yamamoto, K., Eguchi, Y., Moriya, S., Hagiwara, Y., Takakuwa, M., Kodama, T. and Koike, K., *Nucl. Eng. Des.*, **157** (1995), 49-63.
- (19) 木村康治・風間研一・坂田勝・内海雅彦, 機論, No. **900**-59, D (1990-9), 29-31.
- (20) Hutton, R. E., *NASA TND-1870*, (1963).
- (21) 木村康治・高原弘樹・坂田勝, 機論, **60**-578, C (1994), 3259-3267.