Donnell 理論による薄肉円筒殻の横方向振動に関する
軸方向すきま流励起振動*藤田 勝久^{*1}, 新谷 篤彦^{*2}, 小野 正和^{*3}Axial Leakage Flow-induced Vibration of a Thin Cylindrical Shell with
Respect to Lateral Vibration by Donnell Shell TheoryKatsuhisa FUJITA^{*4}, Atsuhiko SHINTANI and Masakazu ONO^{*1} Mechanical Systems Engineering, Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University,
1-1 Gakuen cho, Sakai shi, Osaka, 599-8531 Japan

In this paper, the stability of a thin cylindrical shell subjected to an axial leakage flow is discussed. Here, we focus on a lateral vibration of a cylindrical shell, that is the beam-like vibration of a shell. The coupled equations between a shell and a fluid are obtained by using the Donnell's shell theory and the Navier-Stokes equation. The influence of the axial velocity on the unstable vibration phenomena is clarified concerning the beam-like vibration mode of a shell. The applicable range of Donnell shell theory is confirmed for axial leakage flow-induced vibration of a thin cylindrical shell. The numerical results on the shell theory are compared with those on beam theory which have been already reported by the authors. And, the numerical parameter studies are done for several dimensions of shell and fluid.

Key Words: Flow-induced Vibration, Axial Leakage Flow, Stability Analysis, Shell Vibration, Lateral Vibration, Complex Eigenvalue Analysis

1. 緒 言

近年, 各種プラントの機械・構造物については, プラントの効率を上げるために介在する流体の流速は高速化する傾向がある。これらの流体の高速化は, しばしば機械・構造物に流力弾性不安定を引き起こす。

ここでは軸方向すきま流を受ける円筒殻(シェル)の自励振動のメカニズムを考察する。これらの構造はガスタービン燃焼器や原子炉構造物, 大口径配管, 各種大口径シール, バルブ部に存在する。このような軸方向すきま流を受ける円筒殻の流体励起振動についてはいくつかの研究例がある⁽¹⁾⁻⁽⁷⁾。たとえば M. P. Paidoussis ら⁽³⁾は Flügge の方程式に基づき, 流れる流体を含む 2 重円筒殻のダイナミクスと安定性を検討している。しかしながら, この報告では流体力は速度ポテンシャルにより解析されている。また, 著者の一人⁽⁶⁾は実験的, 解析的に環状すきま流による円筒殻の不安定現象について研究を行っている。

本論文では, 著者ら⁽⁸⁾がすでに環状すきま流をうける軸対称弾性棒(梁)の流体励起振動について報告したと同様に, Navier-Stokes に基づくすきま流近似により軸方向すきま流による薄肉円筒殻に作用する付加質量, 付加減衰, 付加剛性に相当する非定常流体力を導出する。薄肉円筒殻は Donnell の円筒殻理論で扱い, Navier-Stokes 方程式に基づく流体との間の連成方程式を導き, 数値シミュレーションを行う。

薄肉円筒シェルの振動特性は, 一般に図 1 に示すようにリング振動と呼ばれる軸対称振動, 梁状振動の横方向振動, さらにオーバリング振動とも呼ばれる円周方向波数を示す振動に分類することができる。ここでは, 著者らの円周方向波数を示す振動⁽⁹⁾, 軸対称振動⁽¹⁰⁾の報告に引き続き, 横方向振動について報告する。また, 横方向振動における Donnell 理論の適用範囲についても検討を行なう。

2. 運動方程式

図 2 に示される軸方向すきま流をうける薄肉円筒殻を考える。内側の円筒殻は弾性体, 外側の円筒殻は剛体とする。内側の円筒殻の諸元は長さ: ℓ , 半径: a , 厚さ: h , Young 率: E , ポアソン比: ν , 密度: ρ とする。

* 原稿受付 2004 年 11 月 11 日。

^{*1} 正員, フェロー, 大阪府立大学大学院工学研究科(〒599-8531 堺市学園町 1-1)。^{*2} 正員, 大阪府立大学大学院工学研究科。^{*3} 大阪府立大学大学院工学研究科[現: セイコーエプソン(株)]。

E-mail: fujita@mecha.osakafu-u.ac.jp

Fig. 1 Vibrational characteristics of a thin cylindrical shell

Fig. 2 Analytical model of a thin cylindrical shell

流体は2つの円筒殻の間のすきまを流れる。内側の円筒殻は軸方向すきま流によって振動する。本論文では半径方向すきま幅は円筒殻の半径に比べて十分小さいとする。もし、内側の円筒殻が剛体で、外側が弾性体であっても、流体圧力の方角を考慮することによってこの理論により同様の解析ができる。

薄肉円筒殻に対しては、十分薄い円筒殻 ($h/a \ll 1$) であれば、Donnell 理論で十分精度よく振動を表す^{(11),(12)}ので、ここでは比較取り扱いの容易な Donnell 理論を用いることにする。なお、薄肉である範囲は文献⁽¹³⁾によれば $h/a \leq 1/20$ と述べており、本論文では $h/a = 1/100$ 程度を対象としている。Donnell 理論による運動方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial x} \right. \\ \left. + \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = p_x \quad (1) \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - C \left\{ \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial x} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} = p_\theta \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial x^2} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right\} \\ + C \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{a} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \\ = p_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial m_\theta}{\partial \theta} \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、 $\mu = \rho h$, p_x, p_θ, p_z : 円筒殻に働く流体力, m_x, m_θ : 円筒殻に働く流体モーメントであり、伸び剛性 C と曲げ剛性 D は $C = Eh/(1-\nu^2)$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ である。

3. 非定常圧力

既報^{(8),(9)}同様 Navier-Stokes 方程式に基づく非圧縮性流体の運動方程式から非定常圧力 ΔP と非定常すきま ΔH の間の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta P = \frac{1}{\bar{H}} \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial t^2} \\ + \frac{2\bar{Q}_x}{\bar{H}^2} \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x \partial t} + \frac{12\nu_f}{\bar{H}^3} \frac{\partial \Delta H}{\partial t} \\ + \frac{\bar{Q}_x^2}{\bar{H}^3} \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} + \frac{36\nu_f \bar{Q}_x}{\bar{H}^4} \frac{\partial \Delta H}{\partial x} \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{H}$: 定常すきま幅、 $\bar{Q}_x$: 軸方向定常流量、 ρ_f : 流体の密度、 ν_f : 流体の動粘性係数、 $y = a\theta$ である。

4. 横方向振動

ここでは横方向振動について述べる。このとき、軸方向、円周方向、半径方向の非連成モード (真空中モードまたはドライモード) $\hat{u}_m(x), \hat{v}_m(x), \hat{w}_m(x)$ を用いると、軸方向、円周方向、半径方向の変位 $u(x, \theta, t), v(x, \theta, t), w(x, \theta, t)$ は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} u(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, t) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{u}_m(x) \cos \theta \\ \hat{v}_m(x) \sin \theta \\ \hat{w}_m(x) \cos \theta \end{pmatrix} \xi_m(t), \quad (5)$$

ここで $\xi_m(t)$ はモード (時間) 関数である。

5. 円筒殻-流体連成方程式

非定常すきま幅 ΔH は円筒殻の半径方向変位に一致する、すなわち $\Delta H = w$ である。これらの関係を用いると式 (4) は以下のようにかける。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Delta P(x, \theta, t) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \theta \left\{ A_m(x) \ddot{\xi}_m(t) \right. \end{aligned}$$

$$+B_m(x)\dot{\xi}_m(t) + C_m(x)\xi_m(t)\} \quad (6)$$

ここで、係数 $A_m(x)$, $B_m(x)$, $C_m(x)$ はモード (時間) 関数 $w_m(x)$ とその微分で与えられる関数である^{(8),(9)}. 非定常圧力 ΔP は $\Delta P(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta P_n(x, t) \cos n\theta$ と書けると仮定する. これを式 (6) に代入し, $\partial^2(\cos n\theta)/\partial\theta^2 = -n^2 \cos n\theta$ に注意すると, 次の常微分方程式を得る.

$$\frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \right) \Delta P_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m(x) \frac{d^2 \xi_m(t)}{dt^2} + B_m(x) \frac{d \xi_m(t)}{dt} + C_m(x) \xi_m(t) \right\} \quad (7)$$

円周方向 n 次と n' 次 ($n \neq n'$) は直交するため, それぞれ独立に考えることができる. ここでは横方向振動を対象とするので $n = 1$ のみを扱う. 式 (7) を境界条件^{(8),(9)}のもとで解くと, 非定常圧力 $\Delta P(x, \theta, t)$ とモード (時間) 関数との関係が得られる.

$$\Delta P(x, \theta, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \cos \theta \left\{ \bar{m}_m(x) \ddot{\xi}_m(t) + \bar{c}_m \dot{\xi}_m(t) + \bar{k}_m \xi_m(t) \right\} \quad (8)$$

関数 $\bar{m}_m(x)$, $\bar{c}_m(x)$, $\bar{k}_m(x)$ は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_m(x) &= -\rho_f \frac{1}{H} g_{0m}(x) \\ \bar{c}_m(x) &= -\rho_f \left\{ \frac{12\nu_f}{H^3} g_{0m}(x) + \frac{2\bar{Q}_x}{H^2} g_{1m}(x) \right\} \\ \bar{k}_m(x) &= -\rho_f \left\{ \frac{36\nu_f \bar{Q}_x}{H^4} g_{1m}(x) + \frac{\bar{Q}_x^2}{H^3} g_{2m}(x) + \frac{\bar{Q}_x^2}{H^3} \beta_m(x) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで関数 $g_{jm}(x)$ ($j = 0, 1, 2$) と $\beta_m(x)$ は入口, 出口での圧力損失係数 ζ_{in} , ζ_{out} ^{(8),(9)} を用いて次式で与えられる.

$$g_{jm}(x) = f_{jm}(x)$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{a}x\right) \left(\exp\left(-\frac{\ell}{a}\right) f_{jm}(0) - f_{jm}(\ell) \right) - \exp\left(-\frac{\ell}{a}\right) - \exp\left(\frac{\ell}{a}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{a}x\right) \left(-\exp\left(-\frac{\ell}{a}\right) f_{jm}(0) + f_{jm}(\ell) \right) - \exp\left(-\frac{\ell}{a}\right) - \exp\left(\frac{\ell}{a}\right)}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \beta_m(x) &= \frac{1}{\exp\left(-\frac{\ell}{a}\right) - \exp\left(\frac{\ell}{a}\right)} \\ &\times \left[(1 + \zeta_{in}) \hat{w}_m(0) \left\{ \exp\left(\frac{x-\ell}{a}\right) - \exp\left(\frac{-x+\ell}{a}\right) \right\} \right. \\ &\left. + \zeta_{out} \hat{w}_m(\ell) \left\{ \exp\left(\frac{1}{a}x\right) - \exp\left(-\frac{1}{a}x\right) \right\} \right] \quad (11) \end{aligned}$$

ここで用いられている $f_{jm}(x)$ ($j = 0, 1, 2$) は常微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{a^2} \right) f_{0m}(x) = \hat{w}_m(x) \quad (12)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{a^2} \right) f_{1m}(x) = \frac{d\hat{w}_m(x)}{dx} \quad (13)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{a^2} \right) f_{2m}(x) = \frac{d^2\hat{w}_m(x)}{dx^2} \quad (14)$$

の解である.

円筒殻に働く流体力は

$$\begin{aligned} p_x &= -\mu_f \frac{\partial \Delta U}{\partial z_f} \Big|_{z_f=0} & m_x &= \mu_f \frac{\partial \Delta U}{\partial z_f} \Big|_{z_f=0} \frac{h}{2} \\ p_\theta &= -\mu_f \frac{\partial \Delta V}{\partial z_f} \Big|_{z_f=0} & m_\theta &= \mu_f \frac{\partial \Delta V}{\partial z_f} \Big|_{z_f=0} \frac{h}{2} \\ p_z &= \Delta P(x, \theta, t) \Big|_{z_f=0} = \Delta P(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (15)$$

で与えられる (ここで $\mu_f = \rho_f \nu_f$).

速度分布を $\Delta U = (1/2\mu_f)\partial\Delta P/\partial x z_f(z_f - \bar{H})$, $\Delta V = (1/2\mu_f)\partial\Delta P/\partial\theta z_f(z_f - \bar{H})$ と仮定すれば流体力は $p_x = -(\bar{H}/2)\partial\Delta P/\partial x$, $p_\theta = (\bar{H}/2)\partial\Delta P/\partial\theta$, $p_z = \Delta P(x, \theta, t)$, $m_x = (h\bar{H}/4)\partial\Delta P/\partial x$, $m_\theta = (h\bar{H}/4)\partial\Delta P/\partial\theta$ となる. これらの関係と式 (8) を円筒殻の運動方程式に代入し, 積分などすると次の連成方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} (\delta_{pm} + \hat{m}_{pm}) \ddot{\xi}_m(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{c}_{pm} \dot{\xi}_m(t) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m^2 \delta_{pm} + \hat{k}_{pm}) \xi_m(t) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

ここで δ_{pm} は Kronecker のデルタであり,

$$\begin{aligned} \hat{m}_{pm} &= a\pi \int_0^\ell \left\{ -\frac{\bar{H}}{2} \frac{d\bar{m}_m(x)}{dx} \hat{w}_p(x) \right. \\ &+ \frac{\bar{H}}{2} \bar{m}_m(x) \hat{v}_p(x) + \bar{m}_m(x) \hat{w}_p(x) \\ &+ \frac{h\bar{H}}{4} \frac{d^2\bar{m}_m(x)}{dx^2} \hat{w}_p(x) - \frac{h\bar{H}}{4a} \bar{m}_m(x) \hat{w}_p(x) \Big\} dx \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{c}_{pm} &= a\pi \int_0^\ell \left\{ -\frac{\bar{H}}{2} \frac{d\bar{c}_m(x)}{dx} \hat{w}_p(x) \right. \\ &+ \frac{\bar{H}}{2} \bar{c}_m(x) \hat{v}_p(x) + \bar{c}_m(x) \hat{w}_p(x) \\ &+ \frac{h\bar{H}}{4} \frac{d^2\bar{c}_m(x)}{dx^2} \hat{w}_p(x) - \frac{h\bar{H}}{4a} \bar{c}_m(x) \hat{w}_p(x) \Big\} dx \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \hat{k}_{pm} = a\pi \int_0^\ell \left\{ -\frac{\bar{H}}{2} \frac{d\bar{k}_m(x)}{dx} \hat{w}_p(x) \right. \\ \left. + \frac{\bar{H}}{2} \bar{k}_m(x) \hat{v}_p(x) + \bar{k}_m(x) \hat{w}_p(x) \right. \\ \left. + \frac{h\bar{H}}{4} \frac{d^2\bar{k}_m(x)}{dx^2} \hat{w}_p(x) - \frac{h\bar{H}}{4a} \bar{k}_m(x) \hat{w}_p(x) \right\} dx \quad (19) \end{aligned}$$

である。モード数を M で打ち切りベクトル、マトリクスを用いると、式 (16) は次式のようになる。

$$[M_s + M_a]\{\ddot{\xi}(t)\} + [C_a]\{\dot{\xi}(t)\} + [K_s + K_a]\{\xi(t)\} = \{0\} \quad (20)$$

ここで、 $\{\xi(t)\} = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_M(t)\}^T$, $[M_s] = [I_M]$, $[K_s] = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_M^2\}$, $[M_a] = [\hat{m}_{mj}]_{1 \leq m, j \leq M}$, $[C_a] = [\hat{c}_{mj}]_{1 \leq m, j \leq M}$, $[K_a] = [\hat{k}_{mj}]_{1 \leq m, j \leq M}$ である。マトリクス $[M_s]$, $[K_s]$ は構造体のモード質量、モード剛性であり、 $[M_a]$, $[C_a]$, $[K_a]$ はすきま流の質量、減衰、剛性マトリクスである。

6. 連成固有値解析と安定性判別

新しいベクトルとして $\{Z\}$ を $\{Z\} = \{\xi^T \xi^T\}^T$ のように導入すると、 $\{\dot{Z}\} = \{\xi^T \xi^T\}^T = s\{Z\}$ となる。ここで $\mathcal{T}$ は転置を意味し、 s は連成固有値 (複素固有値) である。式 (20) にこれらを適用すると、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} [K_g] & [O_M] \\ [O_M] & [I_M] \end{bmatrix} \{Z\} = s \begin{bmatrix} -[C_g] & -[M_g] \\ [I_M] & [O_M] \end{bmatrix} \{Z\} \quad (21)$$

ここで $[I_M]$, $[O_M]$ はそれぞれ $M \times M$ 次の単位マトリクス、零マトリクスであり、 $[M_g] = [M_s] + [M_a]$, $[C_g] = [C_a]$, $[K_g] = [K_s] + [K_a]$ である。それゆえに連成系の安定性は次式で評価される。

$$\left\| \begin{bmatrix} [K_g] & [O_M] \\ [O_M] & [I_M] \end{bmatrix} - s \begin{bmatrix} -[C_g] & -[M_g] \\ [I_M] & [O_M] \end{bmatrix} \right\| = 0 \quad (22)$$

根軌跡 (Argand 線図) は式 (22) を解析し、複素数である連成固有値 s の実部、虚部をプロットすることにより得られる。連成固有値 s の虚部が $\text{Im}(s) \neq 0$ かつ実部が $\text{Re}(s) > 0$ であれば動的不安定 (フラッター) であり、 $\text{Im}(s) = 0$ かつ $\text{Re}(s) > 0$ であれば静的不安定 (ダイバージェンス) となる。

ここで、式 (22) に $2M$ 個の連成モードが存在する。それぞれのペアを小さい順に、1 次、2 次、3 次、 $\dots$, M 次と呼ぶことにする。複素数である連成固有値の虚部が 0 でないなら、複素共役の固有値のペアのうち正の虚部を持つ連成固有値をとる。一方、連成固有値の虚部が 0 ならば、2 つの実固有値のうち大きい

ほうの実固有値をとる。このようにして注目した M 個の連成固有値を $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$ と書くことにする。連成固有値 λ_j に対応する固有ベクトルを $\{\Psi_j\}$ とし、 $\{\Psi_j\}$ の第 m 番目の要素を $\Psi_{j,m}$ とする。さらに、 $\eta_j(t)$ を $\{\Psi_j\}$ に対応する時間関数とする。その結果、 j 次の連成固有モード (ウェットモード) は次のように表現される。

$$\left. \begin{aligned} u_j^c(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \hat{u}_m(x) \cos \theta \Psi_{j,m} \\ v_j^c(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \hat{v}_m(x) \sin \theta \Psi_{j,m} \\ w_j^c(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \hat{w}_m(x) \cos \theta \Psi_{j,m} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

これらの方程式を用いると円筒殻の変位は次のように表現される。

$$\begin{pmatrix} u(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^M \begin{pmatrix} u_j^c(x, \theta) \\ v_j^c(x, \theta) \\ w_j^c(x, \theta) \end{pmatrix} \eta_j(t) \quad (24)$$

ここで、流速 ($\bar{U} = \bar{Q}_x / \bar{H}$) が変化するとマトリクス $[M_g]$, $[C_g]$, $[K_g]$ が軸方向定常流量 $\bar{Q}_x$ に依存するため、連成固有値、連成モードは変化する。

この手順に従ってすきま流励起振動に対する限界流速や連成モードが求められる。

7. 数 値 解 析

数値解析の対象例として環状の軟鋼製の剛体シェルと弾性体シェルを考える。ここでは流体として水を用いる。円筒殻は半径方向と円周方向に両端支持されているとする。軸方向、円周方向、半径方向の固有モード $\hat{u}_m(x)$, $\hat{v}_m(x)$, $\hat{w}_m(x)$ はそれぞれ次のように表現される。 $\hat{u}_m(x) = C_{1m} \cos(m\pi x / \ell)$, $\hat{v}_m(x) = C_{2m} \sin(m\pi x / \ell)$, $\hat{w}_m(x) = C_{3m} \sin(m\pi x / \ell)$ 連成計算においてはここでは収束が十分に満足される 10 個の非連成モード近似を用いる。

7.1 Donnell 殻理論の適用可能な寸法諸元 すでに著者らは、Euler-Bernoulli 梁理論に基づく軸方向すきま流励起振動について報告⁽⁸⁾してきたが、設計上梁理論では得られない殻としての変形や応力等の情報も得たい場合に対応できるように、円筒殻理論の取扱いをまず比較的流体連成解析の扱いが容易な Donnell 理論で進めてきた。しかし、一般に Donnell 理論は横方向振動については、円筒殻の寸法形状のある範囲は精度が劣るとされている。ここでは、改めて寸法諸元に関する適用範囲について考察する。すでに、Forsberg^{(11),(12)} は半径と長さの比 (ℓ/a) を変えて、

Table 1 Eigenfrequencies on Euler-Bernoulli, Timoshenko, Donnell, Flügge Theories [rad/s]

$a/h = 100$	ℓ/a				
	0.5	1	2	4	10
Euler-Bernoulli	1428439	357110	89277	22319	3571.1
Timoshenko	144891	71112	33289	13783	3166.8
Donnell	50170	45352	30726	13780	3172.4
Flügge	50164	45350	30725	13780	3170.3

Fig. 3 Eigenfrequencies on Euler-Bernoulli, Timoshenko, Donnell, Flügge Theories

Flügge 理論, Donnell 理論, 梁理論 (Euler-Bernoulli 理論, Timoshenko 理論) の非連成固有値の比較を行っている。著者らも同様に Euler-Bernoulli 理論, Timoshenko 理論, Donnell 理論, Flügge 理論の 4 つで非連成固有値の精度比較を行った。ここでは円筒を軟鋼とし, 諸元を長さ $\ell = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 1$ [m], 半径 $a = 0.1$ [m], 厚さ $h = 0.001$ [m] ($a/h = 100$) とする。その結果を表 1 と図 3 に示す。

これらの結果からおよそ $\ell/a < 10$ の範囲では Donnell 理論は梁理論に比べ十分精度があるといえる。また Forsberg の報告⁽¹¹⁾から, $a/h = 100$ の場合 ℓ/a がおよそ 25 より小さい範囲では Donnell 理論は Flügge 理論とほぼ同じ精度があり, それより ℓ/a が大きくなると Donnell 理論は精度が悪くなることがわかる。さらに, Forsberg の報告⁽¹²⁾から, $\ell/a > 10$ では梁理論と Flügge 理論はほぼ同じ精度があるとわかる。我々の計算でも同じ傾向が確認出来た。以上のことから $a/h = 100$ 程度の薄い円筒殻に対しては概ね,

(i) $\ell/a < 10$; Donnell 理論は Flügge 理論とほぼ同じ精度があり, 梁理論の精度は劣る。

(ii) $10 \leq \ell/a \leq 25$; Donnell 理論, 梁理論, Flügge

理論はほぼ同じ精度がある。

(iii) $\ell/a > 25$; 梁理論は Flügge 理論とほぼ同じ精度があり, Donnell 理論の精度は劣る。
と 3 つの範囲に分けられると考えられる。

7.2 根軌跡 前節の考察をもとに, Donnell 殻理論が精度を有する適用範囲にある計算モデル諸元について軸方向すきま流と円筒殻の連成振動解析を行い, 根軌跡を検討する。諸元は, 長さ $\ell = 0.4$ [m], 半径 $a = 0.1$ [m], 厚さ $h = 0.001$ [m], 定常すきま幅 $\bar{H} = 0.001$ [m] とした。すなわち, $\ell/a = 4$, $a/h = 100$ である。流速を変えて得られる根軌跡を図 4(a) に示す。流速をあげていくと 1 次モード, 2 次モード, 3 次モー

(a) $\ell/a = 4$ (b) $\ell/a = 6$

Fig. 4 Root locus for short shell

ドがそれぞれ $\bar{U} = 91, 127, 135$ [m/s] でダイバージェンスになることが分かる。また, 図 4(b) は $\ell/a = 6$ にしたときの根軌跡を示す。

7.3 Donnell 殻理論と Euler-Bernoulli 梁理論による根軌跡の比較 7.1 節での考察により, 比較的长度が長い円筒殻では, 梁理論特に Timoshenko 梁

理論でも十分精度があるとわかったが、ここでは殻理論と梁理論との精度の比較を目的とするのではなく、本論文のねらいとする軸方向すきま流下における構造物・流体の連成解析法の妥当性を、当面比較する実験値もないので、すでに報告した Euler-Bernoulli 梁理論による解との比較により確認することにする。横方向振動が不安定になる条件を調べるために、梁理論、Donnell 理論ともに精度が悪くならない長さとして、前述の 7.1 節の範囲 (ii) から、両モデルの諸元を長さ $\ell = 1[\text{m}]$ 、半径 $a = 0.1[\text{m}]$ 、厚さ $h = 0.001[\text{m}]$ 、定常すきま幅 $\bar{H} = 0.001[\text{m}]$ とする。限界流速に関して 2 組の連成振動モードを図 5 の根軌跡に示す。また、表 2

Fig. 5 Root locus for long shell (*-shell, o-beam)

は 2 つのモデル (梁と円筒殻) の振動特性を比較するために、真空中と静止流体中の円筒殻の固有振動数を示す。ここで 'm' は軸方向のモード数である。

まず最初に 1 次モードに注目する。図 5 に示されるように、円筒殻理論に基づく円筒殻の横方向振動と梁理論に基づく振動の両方のモデルの 1 次モードはどちらも速度を増加させたとき不安定領域に近づき、ダイバージェンス現象になることがわかる。また両方の根軌跡は非常に近く、両方の限界流速も円筒殻理論では、 $\bar{U} = 44[\text{m/s}]$ 、梁理論では $\bar{U} = 48[\text{m/s}]$ となり、両者は近い値となっている。1 次モードは、円筒殻理論に基づく結果は梁理論に基づく結果より早く不安定になることがわかる。

次に 2 次モードに注目する。図 5 から流速が高くなるにつれて、円筒殻理論に基づく円筒殻の横方向 2 次モードも梁理論に基づく 2 次モードも 1 次モード同様不安定領域に近づく。2 次モードは 1 次モードと異なり、フラッター現象になる (限界流速、円筒殻理論: $\bar{U} = 78[\text{m/s}]$ 、梁理論: $\bar{U} = 97[\text{m/s}]$)。両モデルの 2 次の固有振動数を比較すると、表 2 より 1 次モードと

Table 2 The comparison of natural frequency in a vacuum and in a fluid for shell and beam theory

		in a vacuum [rad/s]		in a fluid at rest [rad/s]	
shell theory	m	1	3172	135	
		2	9997	486	
		3	17546	960	
beam theory	m	1	3571	147	
		2	14284	665	
		3	32139	1741	

違って、梁理論と円筒殻理論による固有振動数とはかなり相違していることがわかる。勿論、1 次のモードと同様 2 次モードにおいても、円筒殻理論に基づく結果は梁理論に基づく結果より速く不安定になる。

以上のように 1 次、2 次の両方のモードにおいて、円筒殻理論に基づく結果は梁理論に基づく結果より速く不安定になることがわかった。これは、円筒殻効果による剛性低下の影響によるものであると考えられる。

以下、パラメータスタディは図 4(a) の寸法諸元を用いて解析をすすめる。

7.4 すきま幅が不安定振動挙動に与える影響
すきま幅が円筒殻の安定性に与える影響を調べる。すきま幅 $\bar{H} = 0.5 \times 10^{-3} \sim 3 \times 10^{-3}[\text{m}]$ に対して、図 4(a) で用いた諸元と同じ諸元 (すきまを除く) を用いて、不安定現象 (ダイバージェンス) を引き起こす限界流速を図 6 に示す。すきま幅が大きくなるにつれて限界流速は高くなることがわかる。

Fig. 6 Effect of the gap width on critical velocity

Fig. 7 Effect of the length of shell on critical velocity of 1st mode

7.5 不安定振動挙動に与える長さの影響 図 4(a) で用いた諸元と同じもの (長さを除く) を用いて、長さと限界流速の関係を図 7 に示す。円筒殻が長くなると円筒殻の柔軟性が増加するため限界流速は減少す

る。このことは、短い円筒殻ほど安定になりやすいことを示している。

7.6 不安定振動挙動に与える半径の影響 すきま幅と厚さを一定にしたときの半径の安定性への影響を考察する。図4(a)に示されるのと同じ諸元(半径を除く)を用いて、円筒殻の半径と限界流速の関係を図8に示す。半径が大きくなると円筒殻の振動挙動はよ

Fig. 8 Effect of the radius of shell on critical velocity of 1st mode

Fig. 9 Effect of the thickness of shell on critical velocity of 1st mode

り不安定になる。ここで用いられる諸元と大きく変わらないときにはこの傾向は似ていると考えられる。このことは半径が大きくなるとき、相対的に付加質量が大きくなるためと考えられる。

7.7 振動挙動に与える厚さの影響 図4(a)で用いられた諸元と同じもの(厚さを除く)を用いて、円筒殻の厚さと、限界流速の関係を図9に示す。厚みが大きくなると、円筒殻の曲げ剛性が増加することにより固有振動数が増大するから、より安定となると考えられる。

なお、7.4-7.7で示した、すきま幅、長さ、半径、厚さの影響は円周方向波数を示す振動⁽⁹⁾、軸方向振動⁽¹⁰⁾についても同様の傾向がある。

7.8 不安定振動発生前後の振動モードの変化 ここでは連成モードを考察する。1次モードについては比較的短いものとして長さを $\ell = 0.2[\text{m}]$ としたものを用いる。2次モードについては軸方向の変化を見やすくするため長さを $\ell = 0.6[\text{m}]$ としたものを用いる。図10-12に横方向振動の連成モードを示す。これらの図において、振動の1周期 T の間を9時刻 $t = 0, (1/8)T, (2/8)T, \dots, T$ に分けてその連成モードの形状を示す。連成モードは非連成モードの線形結合で表されるので、連成モードに含まれる非連成モードの比率を検討する。連成モードに含まれる非連成モードの比率は一般には複素数で表現される。それゆえに、比率をよりわかりやすくするために、複素数比率の絶対値を計算し、10個のモードの合計が1となるように正規化する。その結果の1次、2次の連成モードに

Fig. 10 1st coupled eigenmode in case of $\bar{U} = 0[\text{m/s}]$, $\ell = 0.2[\text{m}]$

Fig. 11 1st coupled eigenmode in case of divergence ($\bar{U} = 127[\text{m/s}]$, $\ell = 0.2[\text{m}]$)

Table 3 Ratios of eigenmodes in a vacuum in 1st complex eigenmode ($\ell = 0.2[\text{m}]$)

Eigenmode in a vacuum	$\bar{U} = 0$ [m/s]	$\bar{U} = 126$	$\bar{U} = 127$ (divergence)
1	1.0000	0.9194	0.9187
2	0.0000	0.0706	0.0714
3	0.0000	0.0036	0.0034
4	0.0000	0.0044	0.0005
5	0.0000	0.0006	0.0000

含まれる低次5つの非連成モードの比率をそれぞれ表3, 4に示す。軸方向流速が0のとき、図10に示される1次の連成モードは、表3から非連成1次モードとほぼ同じである。ダイバージェンス現象が起こったとき($\bar{U} = 127[\text{m/s}]$)のモードの形状を図11に示す。 $\bar{U} = 127[\text{m/s}]$ (ダイバージェンス)のときの1次モード形状は表3に示されるように静止流体中 $\bar{U} = 0$ で

Fig. 12 2nd complex eigenmode in case of flutter ($\bar{U}=108[\text{m/s}]$, $\ell=0.6[\text{m}]$)

Table 4 Ratios of the eigenmode in a vacuum in the 2nd complex eigenmode ($\ell=0.6[\text{m}]$)

Eigenmode in a vacuum	$\bar{U}=0$ [m/s]	$\bar{U}=107$	$\bar{U}=108$ (flutter)
1	0.0000	0.3724	0.3476
2	1.0000	0.4270	0.4923
3	0.0000	0.1495	0.1232
4	0.0000	0.0333	0.0211
5	0.0000	0.0067	0.0073

のそれとは少し異なっている。さらに速度が増加するにつれて、1次の連成モードに含まれる非連成モードの比率は変わってくる。

2次の連成モードを検討する。軸方向流速が0のとき、2次の連成モードは非連成2次モードとほぼ同じである。それゆえに、図示は省略する。フラッター現象に突入後の $\bar{U}=108[\text{m/s}]$ でのモード形状を図12に示す。表4からこの形は静止流体中 $\bar{U}=0$ のそれとは異なっている。表4に示されるように2次の非連成モード以外のモードの比率の和が50%以上である。さらに、図12の2次のモード形状を物理的に観察すると、このモード形状は静止流体中の2次モードのような反対称ではない。連成モードの最大振幅の位置が、非連成モードの間の位相遅れのために、1周期の間に軸方向に移動することが理解できる。すなわち進行波の現象が存在すると思われる。

8. 結 言

本研究では半径方向、円周方向に両端支持された薄肉円筒殻の横方向振動に注目して円筒殻と流体の連成振動を導出し、安定性解析手法を示した。

- 1) 薄肉円筒殻の横方向振動に対して、Flügge 理論をもとに、梁理論と Donnell 理論を比較し、Donnell 理論の精度のよい形状範囲、梁理論の精度のよい形状範囲、両方の理論とも精度のよい範囲の目安を示し、Donnell 理論の有効性を示した。
- 2) 流速をあげるにつれて、円筒殻の挙動は不安定になり、ここで示した寸法諸元例では、1次モードがダイバージェンス型不安定に、ついで2次モードがダイバージェンス型不安定(円筒殻が比較的短い場合)またはフラッター型不安定(比較的長い場合)になる。
- 3) さらに、似た形状の寸法諸元では、各諸元を同一にして、一つの諸元のみを変化させるとき、すきまが大きいほど、半径が小さいほど、厚さが厚いほど、長さが短いほど、円筒殻の挙動がより安定となる。
- 4) 静止流体中では、連成モード形状は真空中のそれとほぼ同じであるが、不安定現象をおこす前後では連成モードの形状は静止流体中のモードとはかなり異なる。

References

- (1) Chen, S. S. and Rosenberg, G. S., *Nuclear Eng. and Design*, **32** (1975), 302-310.
- (2) Yeh, T. T. and Chen, S. S., *J. of Acoust. Sec. Am.*, **62-2** (1977), 262-270.
- (3) Paidoussis, M. P., et. al., *Journal of Sound and Vibration*, **97-2** (1984), pp.201-235.
- (4) Ziada, S., et al., *Int. Conf. on Flow-Induced Vibrations Bowness-on Windermere, England*, M2 (1987), 521-529.
- (5) Misra, A. K., Wong, S. S. T., Paidoussis, M. P., *Journal of Fluids and Structures*, **15-2** (2001), 1153-1166.
- (6) Fujita, K., Ito, T. and Baba, K., *Proc. of the Int. Conf. on Aero-Hydroelasticity*, (1993), 286-295.
- (7) 高柳, 水野, 塩幡, 機論, **67-658**, C (2001), 1763-1770.
- (8) 藤田, 新谷, 機論, **68-674**, C (2002), 2889-2895.
- (9) 藤田, 新谷, 小野, 機論, **70-694**, C (2004), 1629-1635.
- (10) 藤田, 新谷, 小野, 機論, **71-705**, C (2005), 1481-1488.
- (11) Forsberg, K., *NASA CR-613* (1966).
- (12) Forsberg, K., *AIAA Journal*, **7-2** (1969), 221-227.
- (13) Novozhilov, V. V., *Thin Shell Theory*, (1964), P. Noordhoff, Groningen.