圧電素子と LR 回路を用いた受動制振の 定点理論による最適設計*

山田 啓 介^{*1}, 松 久 寛^{*2}
宇津野 秀 夫^{*2}, 朴 正 圭^{*2}

Optimum Design of Passive Vibration Suppression Using Piezoelectric Elements and LR Circuit

Keisuke YAMADA^{*3}, Hiroshi MATSUHISA,
Hideo UTSUNO and Jeong Gyu PARK

^{*3} Department of Precision Engineering, Kyoto University,
Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501 Japan

This paper describes design methods of passive vibration suppression in flexible structures using piezoelectric elements. The piezoelectric device on the structure with an inductance and a resistance connected in series or parallel works like a mechanical dynamic vibration absorber. However, until now the optimum value of the resistance had not been formulated for each series or parallel connection. In this study, new formulations were derived by making use of the two fixed points method, and their effectiveness was investigated by calculation and experiment. Furthermore, formulations to obtain the optimum values for mobility and accelerance were also derived.

Key Words: Vibration Control, Flexible Structure, Piezo-Element, Dynamic Absorber, Modal Analysis

1. 結 言

圧電素子を用いてはりや平板等の柔軟構造物の屈曲振動を抑制する方法が注目され、多数の研究が行われている。その制振の方法には圧電素子に外部から制御電圧を加える能動制振⁽¹⁾と、インダクタンス、抵抗を接続することによって系を機械式動吸振器のようにふるまわせる受動制振がある。

能動制振では大きな制振力を得られるが、安定性に問題がある。逆に、受動制振は制振力が小さいが、不安定になることはない。制振では系の安定性が最も重要であるので本研究では受動制振を取り上げる。受動制振ではインダクタンスと抵抗を直列に接続する方法^(2,3)と並列に接続する方法⁽⁴⁾の二つが提案されている。機械式動吸振器の場合には定点理論⁽⁵⁾を用いて動吸振器の固有振動数と減衰係数の最適値を求めるのが一般的であるが、圧電素子を用いた従来の受動制振の研究では抵抗の最適値算出式が定点理論に則していない近

似式であり、モビリティやアクセラランスで評価する場合の回路の最適値算出式も求められていない。そこで、本論文ではそれぞれの評価指標において定点理論による厳密な定式化を行い、数値計算と実験によって提案する式の妥当性を確認する。

2. 実 験 装 置

2・1 実験装置の概略 本研究で用いる実験装置の概略を図1に示す。周辺を固定したアルミニウム製の平板 (300×400×1mm) に薄い板状の圧電素子 (22×32×0.22mm) を貼り付け、LR 回路を接続して制振を行う。

Fig. 1 Schematic diagram of the experimental apparatus.

2・2 平板の固有振動モード 圧電素子は平板の屈曲振動の最大曲率の位置に貼り付けると効率が良い。

* 原稿受付 2004 年 7 月 26 日。

^{*1} 准員, 京都大学大学院工学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)。

^{*2} 正員, 京都大学大学院工学研究科。

E-mail: keisu@t01.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

これは最大曲率の位置で圧電素子の伸縮が最も大きくなり、圧電効果による発生電圧が最大になることによる。そこで、平板の固有振動モードを求め、その曲率を調べる。

使用する平板は周辺を固定した長方形板であり、その振動解析は非常に複雑である。そこで、 i 次モードの固有関数 $\Psi_i(x, y)$ を次式の Rajalingham らの近似式⁶⁾で与える。

$$\Psi_i(x, y) = \alpha_i X_r(x) Y_s(y) \quad (1)$$

$$X_r(x) = \frac{\cosh\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) p_2^{(r)} - \cos\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right) p_1^{(r)}}{\cosh \frac{p_2^{(r)}}{2} - \cos \frac{p_1^{(r)}}{2}} \quad (2)$$

$$Y_s(y) = \frac{\cosh\left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right) q_2^{(s)} - \cos\left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right) q_1^{(s)}}{\cosh \frac{q_2^{(s)}}{2} - \cos \frac{q_1^{(s)}}{2}} \quad (3)$$

ここで、図2に示すように a は平板の x 方向の長さ、 b は y 方向の長さ、 α_i は次章に示す質量行列 $\mathbf{M}$ を単位行列に正規化するための係数、 $p_1^{(r)}$ 、 $p_2^{(r)}$ と $q_1^{(s)}$ 、 $q_2^{(s)}$ はそれぞれ x 方向と y 方向の振動モードの形状を決定する係数であり、 r と s は平板の振動モード (r, s) を表す。また、振動モード (r, s) を固有振動数の低いものから順に 1 次、2 次、 $\dots$ 、 i 次、 $\dots$ モードとおく。式(2)、(3)はそれぞれ $x = a/2$ 、 $y = b/2$ に関して対称となる場合の式である。反対称となるモードでは $\cosh$ を $\sinh$ に、 $\cos$ を $\sin$ に置き換えればよい。

Fig. 2 The rectangular plate.

本論文では基本振動モードを制振対象とする。そこで、 $p_1^{(1)}$ 、 $p_2^{(1)}$ 、 $q_1^{(1)}$ 、 $q_2^{(1)}$ の数値⁶⁾を a 、 b と合わせて表1に示す。これらの値から得られる基本振動モードの固有関数と x 方向、 y 方向の曲率を図3に示す。曲率はそれぞれ x 方向、 y 方向に固有関数を2階微分することで得られる。曲率は x 方向の方が大きいこと

Table 1 Mode parameters of the rectangular plate.

a	0.3 m	$p_1^{(1)}$	4.46581	$q_1^{(1)}$	4.11939
b	0.4 m	$p_2^{(1)}$	5.76518	$q_2^{(1)}$	7.75027

Fig. 3 Mode shape and curvatures of the rectangular plate.

と、平板の中央付近は広い範囲で値が大きくなることを考慮して、圧電素子の貼り付け位置は図2に示すように中央とし、圧電素子の有効な伸縮方向を平板の x 方向に一致させる。

2・3 圧電方程式 図2のように平板に貼り付けた圧電素子では、機械的パラメータの応力 $\mathbf{T}$ とひずみ $\mathbf{S}$ 、電気的パラメータの電場 $\mathbf{E}$ と電気変位 $\mathbf{D}$ とが圧電効果および逆圧電効果を介して互いにつりあっている。それらの関係は次の圧電方程式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_{12} \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & -\nu_p s_{11}^E & 0 & d_{31} \\ -\nu_p s_{11}^E & s_{11}^E & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & 2(1+\nu_p)s_{11}^E & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{p1} \\ T_{p2} \\ T_{p12} \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 S_1 、 S_2 、 S_{12} はそれぞれ x 方向、 y 方向のひずみ、 xy 平面内のせん断ひずみ、 T_{p1} 、 T_{p2} 、 T_{p12} は x 方向、 y 方向の応力、 xy 平面内のせん断応力、 D_3 は z 方向の電気変位、 E_3 は z 方向の電場、 s_{11}^E は機械的コンプライアンス、 ν_p はポアソン比、 d_{31} 、 d_{32} は圧電定数、 ε_{33}^T は誘電率である。上付き文字 E と T はそれぞれ一定電場、一定応力下での値であることを表し、その条件下において値は定数である。本論文で用いる圧電素子の d_{32} は d_{31} に比べて十分小さいので、次式以降では無視する。式(4)を変形すると

$$\begin{Bmatrix} T_{p1} \\ T_{p2} \\ T_{p12} \\ D_3 \end{Bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 & -d_{31} \\ \nu_p & 1 & 0 & -\nu_p d_{31} \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_p}{2} & 0 \\ d_{31} & \nu_p d_{31} & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_{12} \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_p^2)}, \quad \lambda_2 = s_{11}^E(1-\nu_p^2)\varepsilon_{33}^S$$

$$\varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^T \left\{ 1 - \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_p^2)} \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^T} \right\} \quad (6)$$

となる。圧電素子のひずみと平板の z 方向変位 $W(x, y, t)$ の関係式は Kirchhoff-Love の仮定より、

$$S_1 = -z \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$S_2 = -z \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$S_{12} = -2z \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

で与えられるとする。ここで、 z は中立面からの距離である。電場 E_z と電位 $\phi(z, t)$ の関係式は

$$E_z = -\frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \quad (10)$$

である。また、変位 $W(x, y, t)$ と電位 $\phi(z, t)$ は

$$W(x, y, t) = \Psi(x, y) \xi(t) \quad (11)$$

$$\phi(z, t) = \phi(z) v(t) \quad (12)$$

と、それぞれ時間の関数を変数分離した関係式で与えられる。ここで、 $\Psi(x, y)$ は平板の固有関数列、 $\xi(t)$ はモード変位ベクトル、 $\phi(z)$ は z 方向電位の境界条件を満足する仮想電位、 $v(t)$ は圧電素子電極間の電圧である。仮想電位 $\phi(z)$ は平板の厚さ方向の中心を中立面として、

$$\phi(z) = \frac{z - \frac{h}{2}}{h_p} \quad (13)$$

と与えられる。ここで、 h 、 h_p はそれぞれ平板と圧電素子の厚さである。

3. アクチュエータ方程式とセンサ方程式

平板のひずみと応力の関係は

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E_b}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_{12} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

で与えられる。ここで、 E_b は平板のヤング率、 ν はポアソン比、 T_1 、 T_2 、 T_{12} は x 方向、 y 方向の応力、 xy 平面内のせん断応力である。平板のひずみと z 方向変位 $W(x, y, t)$ の関係式は圧電素子の場合の関係式と等しく、式(7)、(8)、(9)で与えられる。

ハミルトンの原理に基づいてモデルの運動方程式および回路方程式を導く。時刻 t_1 から t_2 までの仮想仕事の積分が 0 になるという条件より、次式が成り立つ。

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(V - U + W_e) + \delta W_f] dt = 0 \quad (15)$$

ここで、 V 、 U 、 W_e は系全体の運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、電気エネルギーであり、 W_f は外力による仕事である。平板と圧電素子の xy 平面内の存在領域を A_b 、 A_p とおくと、これらは

$$V = \frac{1}{2} \int_{A_b} \rho h \dot{W}^2 dA_b \quad (16)$$

$$U = \int_{A_b} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta U_b dz \right] dA_b + \int_{A_p} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta U_p dz \right] dA_p \quad (17)$$

$$\Delta U_b = \frac{1}{2} S_1 T_1 + \frac{1}{2} S_2 T_2 + \frac{1}{2} S_{12} T_{12} \quad (18)$$

$$\Delta U_p = \frac{1}{2} S_1 T_{p1} + \frac{1}{2} S_2 T_{p2} + \frac{1}{2} S_{12} T_{p12} \quad (19)$$

$$W_e = \int_{A_p} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta W_e dz \right] dA_p \quad (20)$$

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} E_3 D_3 \quad (21)$$

$$\delta W_f = \int_{A_b} \delta W \cdot P_f dA_b - \delta \phi \cdot q \quad (22)$$

と与えられる。ここで、 ρ は平板の密度、 P_f は平板に加わる分布荷重、 q は圧電素子に加わる電荷である。式(16)では圧電素子の運動エネルギーは平板の運動エネルギーに比べて十分小さいとして無視した。式(18)、(19)、(21)は式(5)、(14)、(7)、(8)、(9)、(10)より

$$\Delta U_b = \frac{1}{2} z^2 \frac{E_b}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (23)$$

$$\Delta U_p = -\frac{1}{2} z \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu_p^2)} d_{31} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_p \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (24)$$

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} z \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu_p^2)} d_{31} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_p \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^T \left\{ 1 - \frac{1}{s_{11}^E (1-\nu_p^2)} \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^T} \right\} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \quad (25)$$

と変形できる。ただし、式(24)では圧電素子の機械的なひずみエネルギーは平板に比べて十分小さいとして無視した。式(16)、(17)、(20)、(22)を式(15)に代入すると、オイラーの微分方程式より、平板と圧電素子からなる系のアクチュエータ方程式とセンサ方程式が得られる。

$$\mathbf{M} \ddot{\xi} + \mathbf{K} \xi - \Theta v = \mathbf{Q} P_f \quad (26)$$

$$\Theta^T \xi + C_p^S v = q \quad (27)$$

ここで、

$$\mathbf{M} = \rho h \int_{A_b} \Psi^T \Psi dA_b = \mathbf{I} \quad (28)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{12} h^3 \int_{A_b} [\mathbf{L}_b \Psi]^T \mathbf{c}_b [\mathbf{L}_b \Psi] dA_b \quad (29)$$

$$\Theta = \int_{A_p} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{L}_b \Psi \right]^T [\mathbf{d} \mathbf{c}_p]^T \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dz dA_p \quad (30)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{A_b} \Psi^T dA_b \quad (31)$$

$$C_p^S = \int_{A_p} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{33}^S \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 dz \right] dA_p = \frac{\varepsilon_{33}^S A_p}{h_p} \quad (32)$$

$$\mathbf{L}_b = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

$$\mathbf{d} = [d_{31} \quad 0 \quad 0] \quad (34)$$

$$\mathbf{c}_b = \frac{E_b}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{c}_p = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_p^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_p & 0 \\ \nu_p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_p}{2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

である。 $\mathbf{M}$ はモード質量行列、 $\mathbf{K}$ はモード剛性行列、 Θ はモード電気機械結合係数列、 C_p^S は圧電素子のキャパシタンス、 ξ はモード変位ベクトル、 $\mathbf{Q}$ はモード外力影響係数列である。上付き文字 S は一定ひずみ下での値であることを、上付き文字 t は転置行列をそれぞれ表す。式(26)のアクチュエータ方程式は平板の運動方程式に圧電素子による力を付加したもので、式(27)のセンサ方程式は圧電素子の電荷のつりあいである。圧電素子電極間の電圧 v を求めると

$$v = -\frac{\Theta^t}{C_p^S} \xi + \frac{q}{C_p^S} \quad (37)$$

となる。式(37)より圧電素子は交流電圧源とキャパシタンスを直列に接続した等価回路で表現できることが分かる。圧電素子に接続する外部回路の分圧を v_z とおくと、電圧のつりあいより

$$v_z + v = 0 \quad (38)$$

となる。これは圧電素子と外部回路による回路方程式である。式(26)、(38)を用いて理論解析と数値計算を行う。

4. インダクタンスと抵抗による受動制振

4・1 LR 直列回路を接続した場合 図4のように一組の LR 直列回路と圧電素子を用いて単一の振動モードを抑える方法を検討する。ただし、図4では圧電素子の起電力を v_o とおいた。また、 L_i と R_i は後述するように外部に付加するインダクタンスと抵抗である。

Fig. 4 Series LR circuit with a piezoelectric element.

4・1・1 支配方程式 柔軟構造物の i 次モードを制振対象とする場合、その近傍の振動数で考えるため、他の振動モードは近似的に無視できるので、式(26)、(38)の運動方程式と回路方程式は

$$M_i \ddot{\xi}_i + K_i \xi_i - \Theta_i v = Q_i P_i \quad (39)$$

$$v_z + v = 0 \quad (40)$$

となる。ここで、変数の下付き文字 i は i 次モードを

表す。 i 次モードの制振に用いるインダクタンスと抵抗を L_i 、 R_i とおくと、外部回路の分圧は

$$v_z = L_i \ddot{q} + R_i \dot{q} \quad (41)$$

と与えられる。式(37)、(41)より式(39)、(40)は

$$M_i \ddot{\xi}_i + K_i \xi_i + \Theta_i (L_i \ddot{q} + R_i \dot{q}) = Q_i P_i \quad (42)$$

$$L_i \ddot{q} + R_i \dot{q} + \frac{q}{C_p^S} = \frac{\Theta_i}{C_p^S} \xi_i \quad (43)$$

と変形できる。

4・1・2 コンプライアンス、モビリティ、アクセラランス 加振振動数を ω とすると式(42)、(43)は

$$\frac{\xi_i}{\xi_{sti}} = \frac{1}{-\frac{M_i}{K_i} \omega^2 + 1 + \frac{\Theta_i^2}{K_i C_p^S} G_{LRseries}} \quad (44)$$

$$\xi_{sti} = \frac{Q_i P_i}{K_i} \quad (45)$$

$$G_{LRseries} = \frac{-\omega^2 L_i + j\omega R_i}{-\omega^2 L_i + j\omega R_i + \frac{1}{C_p^S}} \quad (46)$$

となる。式(44)より無次元化したコンプライアンス u_c 、モビリティ u_M 、アクセラランス u_A を導くと次式になる。

$$u_c = \left| \frac{\xi_i}{\xi_{sti}} \right| = \sqrt{\frac{A_i^2 + 4\zeta_i^2 B_i^2}{C_i^2 + 4\zeta_i^2 D_{Si}^2}} \quad (47)$$

$$u_M = \frac{1}{\Omega_i} \left| \frac{\dot{\xi}_i}{\xi_{sti}} \right| = \sqrt{\frac{E_i^2 + 4\zeta_i^2 F_i^2}{C_i^2 + 4\zeta_i^2 D_{Si}^2}} \quad (48)$$

$$u_A = \frac{1}{\Omega_i^2} \left| \frac{\ddot{\xi}_i}{\xi_{sti}} \right| = \sqrt{\frac{G_i^2 + 4\zeta_i^2 H_i^2}{C_i^2 + 4\zeta_i^2 D_{Si}^2}} \quad (49)$$

ここで、

$$A_i = f_i^2 - g_i^2, \quad B_i = f_i g_i$$

$$C_i = (1 - g_i^2)(f_i^2 - g_i^2) - \beta_i g_i^2$$

$$D_{Si} = f_i g_i (1 + \beta_i - g_i^2)$$

$$E_i = g_i (f_i^2 - g_i^2), \quad F_i = f_i g_i^2$$

$$G_i = g_i^2 (f_i^2 - g_i^2), \quad H_i = f_i g_i^3$$

$$f_i = \frac{\omega_{a1}}{\Omega_i}, \quad g_i = \frac{\omega}{\Omega_i}, \quad \beta_i = \frac{\Theta_i^2}{K_i C_p^S}, \quad \zeta_i = \frac{R_i}{2} \sqrt{\frac{C_p^S}{L_i}}$$

$$\xi_{sti} = \frac{Q_i P_i}{K_i}, \quad \omega_{a1} = \sqrt{\frac{1}{L_i C_p^S}}, \quad \Omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}}$$

である。

4・1・3 定點理論を用いた最適調整 定點理論⁽⁹⁾とは周波数応答の最大値を最小にする付加系の固有振動数と減衰係数を求める方法のひとつであり、簡便であるため機械式動吸振器や回路の最適調整に多く用いられている。すなわち、式(47)、(48)、(49)はそれぞれ ζ_i の値に関わらず二つの定點を通るので、その2定點の

高さがそう最適固有振動数比 $f_{\text{opt}i}$ を求め、そこで最大値となる最適減衰比 $\zeta_{\text{opt}i}$ を導出する。

a. コンプライアンスでの最適調整 式(47)が ζ_i の恒等式になるという条件より、定点での加振振動数比が求められる。

$$g_{P_c, Q_c i} = \sqrt{\frac{\sigma_i \mp \sqrt{\sigma_i^2 - \varepsilon_i}}{2}} \quad (50)$$

$$\sigma_i = 1 + \beta_i + f_i^2, \quad \varepsilon_i = 2(2 + \beta_i) f_i^2$$

ただし、2 定点を P_c , Q_c とし、定点での加振振動数比を $g_{P_c i}$, $g_{Q_c i}$ とおいた。 P_c , Q_c での振幅が等しい条件より、最適固有振動数比 $f_{\text{Copt}i}$ が求められる

$$f_{\text{Copt}i} = \sqrt{1 + \beta_i} \quad (51)$$

となる。式(50)から 2 定点の加振振動数比は

$$g_{P_c, Q_c i} = \sqrt{(1 + \beta_i) \mp \sqrt{\beta_i(1 + \beta_i)}} \quad (52)$$

となる。そして、2 定点での振幅は

$$u_c|_{g_i = g_{P_c, Q_c i}} = \sqrt{\frac{2}{\beta_i(1 + \beta_i)}} \quad (53)$$

と求められる。2 定点 P_c , Q_c でそれぞれ極大値になる $\zeta_{P_c \text{opt}i}$ と $\zeta_{Q_c \text{opt}i}$ が存在するがほとんど差はなく、最適減衰比 $\zeta_{\text{Copt}i}$ は両者の相加平均として問題ない。

$$\zeta_{\text{Copt}i} = \frac{1}{2}(\zeta_{P_c \text{opt}i} + \zeta_{Q_c \text{opt}i}) \quad (54)$$

$$\zeta_{P_c, Q_c \text{opt}i} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-A_i A'_i + u_c^2 C_i C'_i}{B_i B'_i - u_c^2 D_i D'_i}} \Big|_{g_i = g_{P_c, Q_c i}} \quad (55)$$

ここで、記号 $'$ は $\partial/\partial g_i$ を表す。式(51), (52), (53), (54)はいずれも等価剛性比 β_i の関数である。機械式動吸振器の場合、最適固有振動数比と最適減衰比、制振性能は動吸振器と主系の質量比の関数で与えられる。一方、圧電素子を用いた動吸振器の場合、圧電素子によって電氣的に付加される剛性と主系の剛性の比、つまり前項で定義した等価剛性比 β_i の関数となる。

b. モビリティでの最適調整 コンプライアンスでの最適調整と同様の方法で求める。モビリティでの 2 定点を P_M , Q_M とおくと、最適固有振動数比 $f_{\text{Mopt}i}$, 2 定点の加振振動数比, 2 定点での振幅, 最適減衰比 $\zeta_{\text{Mopt}i}$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$f_{\text{Mopt}i} = \sqrt{\frac{2}{2 + \beta_i}} (1 + \beta_i) \quad (56)$$

$$g_{P_M, Q_M i} = \sqrt{\frac{(1 + \beta_i)[(4 + 3\beta_i) \mp \sqrt{\beta_i(8 + 5\beta_i)}]}{2(2 + \beta_i)}} \quad (57)$$

$$u_M|_{g_i = g_{P_M, Q_M i}} = \sqrt{\frac{2 + \beta_i}{\beta_i(1 + \beta_i)}} \quad (58)$$

$$\zeta_{\text{Mopt}i} = \frac{1}{2}(\zeta_{P_M \text{opt}i} + \zeta_{Q_M \text{opt}i}) \quad (59)$$

$$\zeta_{P_M, Q_M \text{opt}i} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-E_i E'_i + u_M^2 C_i C'_i}{F_i F'_i - u_M^2 D_i D'_i}} \Big|_{g_i = g_{P_M, Q_M i}} \quad (60)$$

c. アクセラランスでの最適調整 コンプライアンスでの最適調整と同様の方法で求める。アクセラランスでの 2 定点を P_A , Q_A とおくと、最適固有振動数比 $f_{\text{Aopt}i}$, 2 定点の加振振動数比, 2 定点での振幅, 最適減衰比 $\zeta_{\text{Aopt}i}$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$f_{\text{Aopt}i} = 1 + \beta_i \quad (61)$$

$$g_{P_A, Q_A i} = \sqrt{\frac{(1 + \beta_i)[(2 + \beta_i) \mp \sqrt{\beta_i(2 + \beta_i)}]}{2}} \quad (62)$$

$$u_A|_{g_i = g_{P_A, Q_A i}} = \sqrt{\frac{2 + \beta_i}{\beta_i}} \quad (63)$$

$$\zeta_{\text{Aopt}i} = \frac{1}{2}(\zeta_{P_A \text{opt}i} + \zeta_{Q_A \text{opt}i}) \quad (64)$$

$$\zeta_{P_A, Q_A \text{opt}i} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-G_i G'_i + u_A^2 C_i C'_i}{H_i H'_i - u_A^2 D_i D'_i}} \Big|_{g_i = g_{P_A, Q_A i}} \quad (65)$$

d. インダクタンスと抵抗の最適値 最適固有振動数比 $f_{\text{opt}i}$ と最適減衰比 $\zeta_{\text{opt}i}$ より、最適インダクタンスと最適抵抗の値は

$$L_{\text{opt}i} = \frac{1}{f_{\text{opt}i}^2} \frac{1}{C_p^S} \frac{1}{\Omega_i^2} \quad (66)$$

$$R_{\text{opt}i} = 2\zeta_{\text{opt}i} \sqrt{\frac{L_{\text{opt}i}}{C_p^S}} = 2\zeta_{\text{opt}i} \frac{1}{f_{\text{opt}i}} \frac{1}{C_p^S} \frac{1}{\Omega_i} \quad (67)$$

となる。

4・2 LR 並列回路を接続した場合 図 5 のように LR 並列回路と圧電素子を用いて単一の振動モードを抑える。

Fig. 5 Parallel LR circuit with a piezoelectric element.

4・2・1 支配方程式 支配方程式は式(39), (40)であるが、外部回路の分圧が LR 直列回路を接続した場合と異なり、

$$v_z = \frac{j\omega L_i R_i}{j\omega L_i + R_i} \dot{q} \quad (68)$$

で与えられる。式(39), (40)を変形すると支配方程式は

$$M_i \ddot{\xi}_i + K_i \xi_i + \Theta_i \frac{j\omega L_i R_i}{j\omega L_i + R_i} \dot{q} = Q_i P_f \quad (69)$$

$$\frac{j\omega L_1 R_1}{j\omega L_1 + R_1} \dot{q} + \frac{q}{C_p^S} = \frac{\Theta_1}{C_p^S} \xi_1 \quad (70)$$

となる。

4・2・2 コンプライアンス、モビリティ、アクセラランス LR 直列回路を接続した場合と同様に式(69), (70)は

$$\frac{\xi_1}{\xi_{sti}} = \frac{1}{-\frac{M_1}{K_1} \omega^2 + 1 + \frac{\Theta_1^2}{K_1 C_p^S} G_{LR \text{ parallel}}} \quad (71)$$

$$G_{LR \text{ parallel}} = \frac{-\omega^2 L_1}{-\omega^2 L_1 + j\omega \frac{L_1}{R_1 C_p^S} + \frac{1}{C_p^S}} \quad (72)$$

と変形できる。式(44)と式(71)は $G_{LR \text{ series}}$ と $G_{LR \text{ parallel}}$ のみが異なる。これらの式から無次元化したコンプライアンス u_c 、モビリティ u_M 、アクセラランス u_A を導く

$$u_c = \left| \frac{\xi_1}{\xi_{sti}} \right| = \sqrt{\frac{A_i^2 + 4Z_i^2 B_i^2}{C_i^2 + 4Z_i^2 D_{Pi}^2}} \quad (73)$$

$$u_M = \frac{1}{\Omega_i} \left| \frac{\dot{\xi}_1}{\xi_{sti}} \right| = \sqrt{\frac{E_i^2 + 4Z_i^2 F_i^2}{C_i^2 + 4Z_i^2 D_{Pi}^2}} \quad (74)$$

$$u_A = \frac{1}{\Omega_i^2} \left| \frac{\ddot{\xi}_1}{\xi_{sti}} \right| = \sqrt{\frac{G_i^2 + 4Z_i^2 H_i^2}{C_i^2 + 4Z_i^2 D_{Pi}^2}} \quad (75)$$

ここで、

$$D_{Pi} = f_i g_i (1 - g_i^2), \quad Z_i = \frac{1}{2R_i} \sqrt{\frac{L_i}{C_p^S}}$$

である。LR 直列回路の場合と比べると D_{Pi} と減衰比 Z_i が異なるが、その他の項は同じ式で与えられる。

4・2・3 定点理論を用いた最適調整 LR 並列回路を接続した場合も定点理論を用いた最適調整を行うことができる。式(73), (74), (75)はそれぞれ Z_i の値に関わらず二つの定点を通るので、その2定点の高さがそろって最適固有振動数比 f_{opti} を求め、そこで最大値となる最適減衰比 Z_{opti} を導出すればよい。

a. コンプライアンスでの最適調整 LR 直列回路を接続した場合の最適調整と同様の方法で求める。2定点を P_c 、 Q_c とおくと、最適固有振動数比 f_{copti} 、2定点の加振振動数比、2定点での振幅、最適減衰比 Z_{copti} はそれぞれ次式で与えられる。

$$f_{copti} = \sqrt{\frac{2 - \beta_i}{2}} \quad (76)$$

$$g_{P_c, Q_c i} = \sqrt{1 \mp \sqrt{\frac{\beta_i}{2}}} \quad (77)$$

$$u_c|_{g_i = g_{P_c, Q_c i}} = \sqrt{\frac{2}{\beta_i}} \quad (78)$$

$$Z_{copti} = \frac{1}{2} (Z_{P_c opti} + Z_{Q_c opti}) \quad (79)$$

$$Z_{P_c, Q_c opti} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-A_i A_i' + u_c^2 C_i C_i'}{B_i B_i' - u_c^2 D_{Pi} D_{Pi}'}} \Big|_{g_i = g_{P_c, Q_c i}} \quad (80)$$

b. モビリティでの最適調整 モビリティでの2定点を P_M 、 Q_M とおくと、最適固有振動数比 f_{Mopti} 、2定点の加振振動数比、2定点での振幅、最適減衰比 Z_{Mopti} はそれぞれ次式で与えられる。

$$f_{Mopti} = 1 \quad (81)$$

$$g_{P_M, Q_M i} = \sqrt{\frac{(4 + \beta_i) \mp \sqrt{\beta_i (8 + \beta_i)}}{4}} \quad (82)$$

$$u_M|_{g_i = g_{P_M, Q_M i}} = \sqrt{\frac{2}{\beta_i}} \quad (83)$$

$$Z_{Mopti} = \frac{1}{2} (Z_{P_M opti} + Z_{Q_M opti}) \quad (84)$$

$$Z_{P_M, Q_M opti} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-E_i E_i' + u_M^2 C_i C_i'}{F_i F_i' - u_M^2 D_{Pi} D_{Pi}'}} \Big|_{g_i = g_{P_M, Q_M i}} \quad (85)$$

c. アクセラランスでの最適調整 アクセラランスでの2定点を P_A 、 Q_A とおくと、最適固有振動数比 f_{Aopti} 、2定点の加振振動数比、2定点での振幅、最適減衰比 Z_{Aopti} はそれぞれ次式で与えられる。

$$f_{Aopti} = \sqrt{\frac{2 + \beta_i}{2}} \quad (86)$$

$$g_{P_A, Q_A i} = \sqrt{\frac{(2 + \beta_i) \mp \sqrt{\beta_i (2 + \beta_i)}}{2}} \quad (87)$$

$$u_A|_{g_i = g_{P_A, Q_A i}} = \sqrt{\frac{2 + \beta_i}{\beta_i}} \quad (88)$$

$$Z_{Aopti} = \frac{1}{2} (Z_{P_A opti} + Z_{Q_A opti}) \quad (89)$$

$$Z_{P_A, Q_A opti} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-G_i G_i' + u_A^2 C_i C_i'}{H_i H_i' - u_A^2 D_{Pi} D_{Pi}'}} \Big|_{g_i = g_{P_A, Q_A i}} \quad (90)$$

d. インダクタンスと抵抗の最適値 最適固有振動数比 f_{opti} と最適減衰比 Z_{opti} より、最適インダクタンスと最適抵抗の値は

$$L_{opti} = \frac{1}{f_{opti}^2} \frac{1}{C_p^S} \frac{1}{\Omega_i^2} \quad (91)$$

$$R_{opti} = \frac{1}{2Z_{opti}} \sqrt{\frac{L_{opti}}{C_p^S}} = \frac{1}{2Z_{opti}} \frac{1}{f_{opti}} \frac{1}{C_p^S} \frac{1}{\Omega_i} \quad (92)$$

となる。

4・3 LR 直列回路と LR 並列回路の比較 それぞれの回路を接続した場合の制振性能、最適インダクタンス、最適抵抗を比較する。

4・3・1 制振性能の比較 定点理論を用いた最適調整では2定点でほぼ最大値になるため、その2定点での振幅を制振性能の尺度として用いることができる。そこで、LR 直列回路と LR 並列回路を用いた場合

の 2 定点における振幅を表 2 に示す。制振性能は等価剛性比 β_i のみによって決まることが分かる。等価剛性比 β_i が 1 に比べて十分に小さい場合はコンプライアンス、モビリティ、アクセラランスのいずれについても二種類の回路で制振性能はほぼ等しい。しかし、等価剛性比 β_i が大きい場合はコンプライアンス、モビリティの順で制振性能に差が生じ、LR 直列回路の方が有利であることが分かる。なお、アクセラランスは常に性能が等しい。一般に圧電素子の等価剛性比 β_i は 1 に比べて十分小さいが、将来性能のよい圧電素子が開発されたり、圧電素子の使用枚数を増やせばこの限りではない。圧電素子によって電気的に付加される剛性の割合が大きくなるためである。

Table 2 Amplitudes at the two fixed points.

	Series LR	Parallel LR
compliance	$\sqrt{\frac{2}{\beta_i(1+\beta_i)}}$	$\sqrt{\frac{2}{\beta_i}}$
mobility	$\sqrt{\frac{2+\beta_i}{\beta_i(1+\beta_i)}}$	$\sqrt{\frac{2}{\beta_i}}$
accelerance	$\sqrt{\frac{2+\beta_i}{\beta_i}}$	$\sqrt{\frac{2+\beta_i}{\beta_i}}$

4・3・2 最適インダクタンスの比較 最適固有振動数 f_{opti} はいずれの場合も LR 直列回路を接続した場合の方が大きい。これは LR 直列回路の方が圧電素子に戻る電圧が少し大きいため、系全体の剛性も少し大きくなるのが原因である。コンプライアンス、モビリティ、アクセラランスのいずれでも最適インダクタンスは LR 直列回路を用いた場合の方が小さくなる。ただし、等価剛性比 β_i が 1 に比べて十分に小さい場合はほとんど差がない。

4・3・3 最適抵抗の比較 等価剛性比 β_i が 1 に比べて十分に小さい場合、最適抵抗の値は次式で与えられる比をほぼ満たす。

$$R_{\text{Sopti}} : R_{\text{Popti}} = 4\zeta_{\text{opti}} Z_{\text{opti}} \sqrt{\frac{L_{\text{Sopti}}}{L_{\text{Popti}}}} : 1 = 4\zeta_{\text{opti}}^2 : 1 \quad (93)$$

ただし、LR 直列回路、LR 並列回路を接続した場合の最適インダクタンスをそれぞれ L_{Sopti} 、 L_{Popti} 、最適抵抗をそれぞれ R_{Sopti} 、 R_{Popti} とした。等価剛性比 β_i が 1 に比べて十分に小さい場合、 ζ_{opti} と Z_{opti} はほぼ等しく、一般に 1 に比べて非常に小さくなる。ゆえに $R_{\text{Sopti}} \ll R_{\text{Popti}}$ となる。これらの回路による制振力はインダクタンスの分圧によるところが大きく、インダクタンスに流れる電流は大きい必要がある。つまり、LR

直列回路の抵抗は小さく、LR 並列回路の抵抗は大きくなければならない。その結果、式(93)のように最適抵抗の値に大きな差が生じる。

振動変位あるいは振動速度を抑えたい場合は LR 直列回路の方が有利であると前述した。しかし、実際の電子回路ではインダクタンスや圧電素子に内部抵抗が存在し、それらの和が R_{Sopti} より大きくなる場合がある。このような時に LR 直列回路を接続しても本来の制振性能は得られない。そこで、LR 並列回路を用いると内部抵抗の問題を解決できる場合が多い。

5. 数値計算結果と実験結果

本研究で行う実験では図 1 に示すように平板を音圧で加振し、その透過音圧を測定する。そこで、数値計算では等分布荷重で加振し、透過音圧と比例関係にある平板の振動速度、つまりモビリティで評価する。数値計算に用いる諸元を表 3 に示す。これらの値は全て実験で求めた。理論解析では主系減衰 Y_1 は小さいので無視したが、周波数応答には主系減衰の大きさに関わらず、その有無の差が鮮明に現れる。そこで、主系減衰を含めて数値計算を行った。主系減衰は圧電素子電極間を短絡した時の実験結果から求めた。なお、実験ではインダクタンスとしてコイルではなく、インダクタンスシミュレーションによる合成可変インダクタンス⁷⁾を用いた。コイルで最適値を実現するとそのサイズが非常に大きくなるためである。

Table 3 Values of material parameters.

Plate	M_1	1.000 kg
	K_1	2.456×10^5 N/m
	Y_1	8.20 Ns/m
Piezo	C_{pl}^s	0.040 μ F
	Θ_1	-3.154×10^{-3} N/V
	β_1	0.0010

制振対象は平板の基本振動モードとする。図 6, 7 に LR 直列回路と LR 並列回路を接続した場合の数値計算結果と実験結果を示す。数値計算による回路の最適値を表 4 に、実験での回路の値を表 5 に示す。周波数応答、回路の値ともに数値計算結果と実験結果はよく一致している。詳細を比較すると反共振による谷の形状等が若干異なっているが、これは合成可変インダクタンスを LR 回路に使用することで式(46)、(72)で与えられる伝達関数を完全には再現できていないことが原因だと考えられる。

この実験では使用する圧電素子に対して平板の剛性

Fig. 6 Calculated results of frequency response when the series and parallel LR circuit is connected.

Fig. 7 Experimental results of frequency response when the series and parallel LR circuit is connected.

Table 4 Calculated optimum values of the circuit.

LR	Series LR	Parallel LR
L_{opt}	101.6 H	101.8 H
R_{opt}	1964 Ω	1295k Ω

Table 5 Values of the circuit in experiment.

LR	Series LR	Parallel LR
L_{opt}	108.7 H	108.7 H
R_{opt}	2270 Ω	1032k Ω

が大きいため、等価剛性比が 0.0010 と非常に小さい。その結果、振動の評価指標がいずれであっても回路の最適値や周波数応答に実質的な差を生じない。しかし、実際には大きな圧電素子を用いたり、複数枚の圧電素子を使用するなどして制振力を大きくする場合が多く、そのような場合には差が生じる。図 8 に圧電素子 25 枚と LR 直列回路を使用した $\beta_1 = 0.025$ の場合のモビリティの数値計算結果を示す。モビリティで最適調整した回路のみでなく、従来どおりコンプライアンスで最適調整した回路を接続した場合の結果も表示した。コンプライアンスで最適調整した回路では二つの山の振幅がわずかに異なり、最適制振状態とはいえない。十分に等価剛性比が小さい場合は大きな問題とはならないが、等価剛性比の大きい圧電素子を使用した場合やアクセラランスを振動の評価指標にした場合は二つ

の山の振幅の差異がさらに大きくなるため、適した評価指標で回路の最適値を求める重要性は高まる。また、表 4, 5 に示した回路の理論最適値と実験値の誤差を考慮すると、振動の評価指標に応じた回路の最適値自体よりも、それらを用いて最適制振状態の数値計算結果を得ることが重要であるといえる。

Fig. 8 Calculated results of frequency response (optimum values were derived by compliance and mobility designs).

6. 結 言

圧電素子と LR 直列回路または LR 並列回路を用いた受動制振で定点理論に則した最適抵抗値を導出した。また、コンプライアンスでの最適値算出式のみでなく、モビリティとアクセラランスでの最適値算出式も同様に導出した。LR 直列回路と LR 並列回路を比較し、制振性能と最適インダクタンスの値がほぼ等しいことと、最適抵抗値が大きく異なることを解析的に示した。

文 献

- (1) J. J. Dosch, Daniel J. Inman and E. Garcia, *J. of Intelligent Material Systems and Structures*, 3 (1992), 166-185.
- (2) N. W. Hagood and A. von Flotow, *J. of Sound and Vibration*, 146-2 (1991), 243-268.
- (3) 藤田隆史・ほか 4 名, 機論, 66-644, C (2000), 1097-1101.
- (4) C. H. Park and D. J. Inman, *Proc. of SPIE Smart Structures and Materials 1999: Smart Structures and Integrated Systems*, 3668, part two, (1999), 797-804.
- (5) Ormondroyd J. and Den Hartog, J. P., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50-7 (1928), 9.
- (6) C. Rajalingham, R. B. Bhat, and G. D. Xistris, *J. of Sound and Vibration*, 203-1 (1997), 169-180
- (7) 堀敏夫, アナログフィルタの回路設計法, (1998), 154-156, 総合電子出版社.