リンク構造のシミュレーションに関する一考察*

加 鳥 裕 明^{*1}

A Note on the Simulation of Linkage Mechanism

Hiroaki KATORI^{*2}^{*2} Department of Vehicle System Engineering, Meijo University,
1 501 Shiogamaguchi, Tempaku ku, Nagoya-shi, Aichi, 468-8502 Japan

The dynamic analysis of link structure, including flexible elements is developed in this study. This analysis is based on the finite element method and the direct numerical integration, and can be used to predict the dynamic response of link structures. The purpose of this report is to establish the scheme using FEM for 2-D motional link structures. Some simulation tests are carried out using the scheme and the validity is verified.

Key Words: Linkage Mechanism, Finite Element Method, Multi Body Dynamics, Flexible Structure, Computer Aided Analysis

1. 緒 言

近年、メカトロニクス技術の発展により建設機械などのメカトロ化、ロボット化が進んでいる。ロボットや建設機械などリンク構造を含む機械の設計においては機構部の干渉、動的強度の検討などが必要であり、さらに、リンク構造の動的挙動を事前に予測することも重要となっている。ロボットや建設機械など、リンク構造を含む構造物の動的解析を行うためにマルチボディダイナミクスが注目され、活発な研究が行われている。従来、リンク構造の問題はラグランジュ法などにより運動方程式を導出し解析されてきた。この手法では各リンクの情報が他のリンクの情報に依存することとなる。一方、有限要素法は局所的関係を示す行列を組合わせて全体系の行列を構築することからスパースな行列が得られる。このような有限要素法の性質を有効に活用し解析が行われてきている。Uicker⁽¹⁾は、閉回路リンク機構の運動を対偶間の座標変換行列を用いた逐次計算によって数値解析する方法を提案し

ている。さらに、長松⁽²⁾⁻⁽⁴⁾らは、この方法を発展させ、三次元空間において、閉回路、開回路および両者の複合回路への適用を可能にした。山田ら⁽⁵⁾や村上ら⁽⁶⁾は、多数の剛体からなるシステムの運動に関して、Kaneの方法⁽⁷⁾により運動方程式を導き、リアルタイムシミュレーションに適した手法を提案している。近年、より精度の高い解析を行うために構成要素の柔軟性を考慮した解析が要求されるようになってきた。このような柔軟体を含んだリンク構造の解析に関する研究として、Sunada ら⁽⁸⁾は、産業用ロボットに対して有限要素法による部分構造合成法を用いた手法を示している。また、文献(9)では、弾性変形と剛体運動との間の幾何学的非線形性を考慮したモデル化法についてFEMに基づく定式化を示している。ここで示された絶対節点座標法に注目し、より実用的な定式化を高橋、清水⁽¹⁰⁾が提案している。今西⁽¹¹⁾らは、柔軟体が長手方向に移動する場合の振動制御問題を非線形有限要素を適用して解析する手法を示している。さらに、長田⁽¹²⁾は剛体/柔軟マルチボディ・システムに適用するペナルティ法を基礎とする新たな定式化手法を提案し、効率良く多自由度の柔軟多体系の並列計算に適しているシステムの構築を可能にした。

ところで、有限要素法ははん用性にとむ解析手法と

* 原稿受付 2004年5月19日。

^{*1} 正員、名城大学理工学部(〒468-8502 名古屋市天白区塩釜1-1-501)。

E-mail: katori@ccmfs.meijo-u.ac.jp

して構造解析をはじめさまざまな分野で応用されている。構造解析において有限要素法の利用により複雑な非線形問題も解析が可能となり、著者も材料および幾何学的非線形性を考慮した粘塑性大変形解析⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾を提案した。機構解析においても静的・動的に部材の変形特性を考慮する、またより複雑な拘束条件を扱うようにするなどを考えるとき、新たな有限要素法による計算プログラムを作成することなく、既存の構造解析手法に基づく計算プログラムを活用し機構解析が実施できれば大変有益であると思われる。

そこで本報では、文献(13)に示される有限要素法による構造物の大変形解析手法を利用して、リンク機構などの運動を解析し、各部の内力、速度、加速度などを求める手法を示す。ここでは、その第一歩としてリンク構造を対象として議論する。

2. 理 論

2.1 運動方程式 リンク構造などの運動を解析するため、既報で示した大変形解析法を利用する。いま、ある時刻 t においてダランベールの原理による平衡状態を考えて、仮想変位による仮想仕事の原理を適用すると構造全体に対して、式(1)が得られる。

$$\delta \mathbf{r}^T \mathbf{R} = \sum_i \delta \mathbf{s}^T \mathbf{S} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{r}$ は節点における一般変位ベクトルであり、 $\delta \mathbf{r}$ は仮想変位を表す。 $\mathbf{R}$ は一般化変位 $\mathbf{r}$ に対応する節点荷重を表し、外力と慣性力とからなる。すなわち、

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

ここに、右辺第1項の $\mathbf{F}$ は外力および反力であり、第2項は慣性力を表し、 $\mathbf{M}$ は質量行列、 $\mathbf{q}$ は節点における速度であり、 $\dot{\cdot}$ は時間微分を表す。

一方、式(1)の右辺の $\sum$ は全要素に対する総和を表す。また、 $\mathbf{S}$ は要素の部材力で、これに対応する部材変形を $\mathbf{s}$ と書き表す。 $\delta \mathbf{s}$ は仮想変位による部材変形であり、仮想変位 $\delta \mathbf{r}$ との関係を下記のように書き表すことができる。

$$\delta \mathbf{s} = \mathbf{a} \delta \mathbf{r} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{a}$ は後述するように座標値を含むマトリックスである。

スである。

以上の3式より節点の運動方程式が下記のように得られる。

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} - \sum_i \mathbf{a}^T \mathbf{S} \quad (4)$$

2.2 部材の構成方程式 本報では、簡単のためトラス構造に限ることとする。図1に示すように、右手直交座標系 $\mathbf{x}(x, y, z)$ を全体座標系として、ある時刻 t における部材両端 A, B の座標をそれぞれ $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{x}_B$ とすると部材変形 $\mathbf{s}$ は $l = \sqrt{(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)^T (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)}$ より次のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \Delta l = \left(\frac{\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A}{l} \right)^T (\dot{\mathbf{x}}_B - \dot{\mathbf{x}}_A) \\ &= (-\lambda^T \quad \lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_B \end{pmatrix} = \mathbf{a} \mathbf{q} \quad (5) \end{aligned}$$

ここに、節点 A, B における速度成分をそれぞれ $\dot{\mathbf{x}}_A = \mathbf{q}_A$, $\dot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{q}_B$ と表し、 $\lambda = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A)/l$ は部材軸 AB を x' 、これに垂直に断面主軸方向を y' , z' とする局所座標系の全体座標系 $\mathbf{x}(x, y, z)$ に対する方向余弦を表す。また、先に述べたように式(5)の $\mathbf{a}$ は、両節点 A, B の座標値 $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{x}_B$ によって書き表される。

この部材変形の時間増分 $\mathbf{s}$ に対応する部材力の時間増分を $\dot{\mathbf{S}}$ とすると弾性棒における構成式は剛性行列を用いて示すことができる。また、ダンパが部材として含まれる場合、減衰力が線形減衰として表されるとすると、減衰力は減衰行列を用いて示すことができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \text{弾性棒の場合: } \dot{\mathbf{S}} &= \mathbf{k} \mathbf{s} = \mathbf{k} \mathbf{a} \mathbf{q} \\ \text{ダンパの場合: } \mathbf{S} &= \mathbf{c} \mathbf{s} = \mathbf{c} \mathbf{a} \mathbf{q} \\ \text{トラス部材の場合: } \mathbf{k} &= EA/l \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{k}$ は剛性行列、 $\mathbf{c}$ は減衰行列を表す。なお、 E はヤング率、 A は断面積、 l は部材長を表す。

2.3 運動方程式の直接積分 前述の2.1節で示された式(4)の運動方程式の右辺第2項に式(6)で示された弾性棒とダンパに関する構成方程式をそれぞれ区別して書き直すと次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{F} - \sum_i \mathbf{a}^T \mathbf{S} - \sum_i \mathbf{a}^T \mathbf{c} \mathbf{a}' \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{S}} &= \mathbf{k} \mathbf{a} \mathbf{q}, \quad \mathbf{S}' = \mathbf{c} \mathbf{a}' \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{q} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、式(7-1)の右辺第2項、第3項はそれぞれ弾性棒に関する総和とダンパに関する総和を示し、ダンパに関する部材力および節点変位との関係を表す行列 $\mathbf{a}$ にそれぞれ ()' を付けて書き表し、ダンパにおける部材力 $\mathbf{S}' = \mathbf{c} \mathbf{a}' \mathbf{q}$ を運動方程式の中に入れて示している。

式(7)を基に、時刻 $t = t_0$ における $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{S}_0$ を既知として、時刻 $t = t_1 = t_0 + \Delta t$ における $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{S}_1$ を直接数値積分によって求めることを考える。直接数値

Fig.1 Three-dimensional Truss element

積分法にはさまざまな方法があるが、Runge-Kutta-Gill 法は精度に優れているが、高周波成分に対して不安定という欠点があり、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) は精度は不十分であるが無条件安定性と簡便さにおいて優れて、刻み時間を Runge-Kutta-Gill 法の場合の $1/3$ 程度にとれば精度も同程度となり計算労力も小さいことが文献(14)に示されている。このことから、ここでは Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) を用いることとする。

いま、式(7)を時刻 t_0 および t_1 において書き直すとそれぞれ次のように書き表される。すなわち、時刻 t_0 において

$$\left. \begin{aligned} M\dot{q}_0 &= F_0 - \sum_i a_0^T S_0 - \sum_i a_0'^T c a_0' q_0 \\ \dot{S}_0 &= k a_0 q_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

時刻 t_1 において

$$\left. \begin{aligned} M\dot{q}_1 &= F_1 - \sum_i a_1^T S_1 - \sum_i a_1'^T c a_1' q_1 \\ \dot{S}_1 &= k a_1 q_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに示した式の中、 a_0 、 a_1 などには式(5)からわかるようにその時刻における座標値を含むこととなるが、増分は微小であることから、 $a=a_0=a_1$ および $a'=a'_0=a'_1$ として計算を簡単にする。このような簡単化による解析結果が実用上十分な精度の解が得られるのであれば、有限要素法を用いたリンク構造の運動解析の定式化や演算は極めて単純となり、少ない計算労力で解析が実行できることとなる。また、質量行列は集中質量系として解析を行う。なお、より精密に解析するため a_0 、 a_1 の差を取り入れるには、幾何剛性行列を用いることとなる。

Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) において、 q_1 などは次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_0 + \frac{\Delta t}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_0) \\ S_1 &= S_0 + \frac{\Delta t}{2} (\dot{S}_1 + \dot{S}_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式(10-1)に質量行列を掛け得られた式の右辺に式(8)、(9)、(10-2)を代入し整理すると式(11)が得られる。

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2} C + \frac{\Delta t^2}{4} K \right) (q_1 + q_0) = 2Mq_0 + \frac{\Delta t}{2} (F_1 + F_0) - \Delta t \sum_i a'^T S_0 \dots\dots\dots (11)$$

ここに、

$$C = \sum_i a'^T c a', \quad K = \sum_i a'^T k a \dots\dots\dots (12)$$

であり、 C は減衰行列、 K は剛性行列である。

式(11)を解いて $q_1 + q_0$ が求められると、 q_0 は既知であることから q_1 が得られることとなり、式(8-2)、(9-2)、(10-2)より S_1 が求められる。また、

$$r_1 = r_0 + \frac{\Delta t}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_0) \dots\dots\dots (13)$$

より r_1 が得られる。いま、得られた r_1 、 q_1 、 S_1 を r_0 、 q_0 、 S_0 に置換えてこれまでの手順を繰返すという形で計算を進めていくことができる。

3. 数 値 計 算 例

ここでは、2章で示した手法の精度、有効性を検討するため、いくつかの問題について解析を行った。

3・1 スライダ・クランク機構 最初に図2に示すようなスライダ・クランク機構について解析を行った。この機構の構成要素の諸元を表1に示す。ここでは、コネクティングロッド AB の軸剛性 EA が十分高い場合(剛体：CASE-1)と低い場合(柔軟体：CASE-2)の二つのケースについて計算を行った。シミュレーションで行う積分の時間刻みは 0.000 5 秒とした。最初に CASE-1 の剛性を持つリンク機構のクランクを一定の角速度 $\omega=0.2\pi$ rad/s で回転すなわち 10 秒で 1 回転とゆっくりな運動について計算を行った。図3(a)はこの機構の挙動図を示し、図3(b)、(c)は点 B の位置 (x) およびコネクティングロッドの軸力 (S) の時刻歴応答図を示す。図3(b)の中には、式(14)で与えられる点 B の位置に関する解析結果も点線で示してあるが、本解析結果はその解析結果と重なっており、よい一致を示している。

$$x = l_1 \cos \omega t + l_2 \sqrt{1 - (l_1/l_2)^2 \sin^2 \omega t} \dots\dots\dots (14)$$

次に柔軟体の要素を有する CASE-2 のリンク構造において、点 B に集中質量 5 kg が付加されクランクが一定の角速度 $\omega=2\pi$ rad/s で回転すなわち 1 秒で 1 回転する運動について計算を行った。図4にその結果

Table 1 Parameter of the analysis		
	CASE-1	CASE-2
Length ℓ_1 (m)	0.2	
Length ℓ_2 (m)	0.35	
Density (kg/m ³)	2700	
Axial Rigidity of Rods (N)	7×10^6	7×10^5

Fig. 2 Slider-crank linkage

を示す。図4(a)は機構の挙動図、図4(b)および(c)はスライダ(点B)の位置およびコネクティングロッドの軸力の時刻歴応答をそれぞれ示している。図4(a)では、コネクティングロッドの剛性が小さいことからコネクティングロッドが弾性大変形しながらスライダが直線運動していくようすがわかる。また、図4(b)にはCASE-1で示す軸剛性を持つ場合の計算結果も示してあるが、図4(b)、(c)には機構を構成する要素として柔軟体を有することや集中質量の慣性力の影響により点B(スライダ)の応答および部材に生じる軸力の時刻歴応答に位相差が現れているようすが示されている。

Fig. 3 Slider-crank linkage (CASE-1)

次に、図5には、CASE-2において角速度 $\omega=4\pi$ rad/s としたときの解析結果を示す。図5(a)には点B(スライダ)の位置の時刻歴応答を、図5(b)にはコネクティングロッドの軸力の時刻歴応答を示す。図5(a)の中にはCASE-1の場合の結果も示している。これらの結果から、角速度が増したことによりスライダは、その移動量が減少し、コネクティングロッドには最大値で47%大な軸力が生じていることがわかる。

3・2 平面4節機構 次にさまざまなシステムに使用される基本的機構の一つである図6に示す平面4節機構について解析を行った。この機構の構成要素の緒元を表2に示す。ここでは、角速度 $\omega=2\pi$ rad/s お

Fig. 4 Slider-crank linkage (CASE 2, $\omega=2\pi$ rad/s)

よび 40π rad/s で入力節 O_2A が回転する場合について計算を行った。 $\omega=2\pi$ rad/s で回転させた場合の挙動図を図7(a)に示し、入力角(θ)と出力角(ϕ)の関係を図7(b)にそれぞれ示す。図7(b)の中には式(15)で与えられる入力角と出力角の解析結果も点線で示されているが、本解析結果はその解析結果と重なっており、よい一致を示している。

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{l_2 \sin \theta}{l_1 + l_2 \cos \theta} \right] + \cos^{-1} \left[\frac{l^2 + l_4^2 - l_3^2}{2l l_4} \right] \dots\dots\dots (15)$$

Table 2 Parameter of the analysis (four bar linkage)

Length l_1, l_3, l_4 (m)	0.3
Length l_2 (m)	0.2
Density (kg/m ³)	2700
Axial Rigidity of Rods (N)	7×10^6

(a) Location of the slider

(b) Axial force of the connecting rod

Fig. 5 Slider crank linkage (CASE 2, $\omega=4\pi$ rad/s)

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta.$$

次に $\omega=40\pi$ rad/s の場合の挙動図と入出力角の関係図を図8(a), (b)にそれぞれ示す。角速度が増したことで慣性力の影響により中間節が変形し、入力角が約 $2.6 \sim 4$ rad (約 $150 \sim 230^\circ$) の範囲において出力角が剛体として計算される式(15)とは若干ではあるが差を生じることがわかる。

図9には中間節 AB の中央点 C の xy 平面での軌跡

Fig. 6 Four-bar linkage

(a) Animation

(b) Input angle vs. output angle

Fig. 7 Four-bar linkage ($\omega=2\pi$ rad/s)

を示す。上述の出力角に差を生じる範囲において軌跡にも差が生じているようすが示されている。

3・3 直線運動機構 次に図10(a)および(b)に示すような直線運動機構としてよく知られたボースリエの機構をCASE-1として、さらにダンパと部材が取付けられた機構をCASE-2として解析を行い、ダンパが含まれる場合の解析の有効性を確認した。最初にCASE-1の場合において部材 O_2A を $\omega=0.2\pi$

(a) CASE 1

(a) Animation

(b) Input angle vs. output angle

Fig. 8 Four-bar linkage ($\omega=40\pi$ rad/s)

Fig. 9 Locus of point C

(b) CASE 2

Fig. 10 Peaucellier's linkage

(a) Animation

(b) Axial force and location

Fig. 11 Peaucellier's linkage (CASE-1, $\omega=0.2\pi$ rad/s)

Fig. 12 Peaucellier's linkage (CASE-2, $v_{Eu}=0.1$ m/s)

rad/sの角速度で O_1 点まわりに2秒回転させた場合について計算を行った。計算に用いた構成要素の軸剛性や質量は3・1節で示した解析例CASE-1で用いた値を使用した。なお、各部材の長さは $l_1=0.6$ m, $l_2=0.3$ m, $l_3=0.2$ mとした。この解析結果を図11に示す。図11(a)はこの機構の挙動図であり、図11(b)は点Cの x 座標値と部材BC, CDの軸力の時刻歴応答図である。これらの結果において点Cが直線上を移動することが示されており、妥当な結果が得られている。また、点Cが直線運動できる幾何学的限界に近づくとき軸力の絶対値が大きくなることが示されている。次に、CASE-2の場合において点Cに集中質量5 kgを取付け、点Eを速度0.1 m/sで鉛直上方に動かしたときの機構の挙動を解析した。その結果を図12に示す。図12(a)にはこの機構の挙動図を示し、図

12(b)には各部材の軸力の時刻歴応答図を示す。点Bの動きがダンパにより拘束されることから、各部材に大きな軸力が生じることがわかる。

4. 結 論

本研究では柔軟体やダンパを含むリンク機構を対象として、有限要素法による構造物の大変形解析手法を利用して、リンク機構の運動解析を行い、各部材の内力、速度、加速度などを求める手法を示した。いくつかのシミュレーションの結果、本手法は比較的低速な場合の結果のみではあるが、2種類の基本的なリンク機構の運動に対して実用上十分な精度で解析できることが確認できた。また、本手法は、三次元リンク機構や二次元においてもより複雑なリンク機構に対しても応用が可能であると考えられる。今後は、はり要素など他の構成要素を含むシステムについても解析できるように拡張し、実用性をさらに高めていきたいと考えている。

文 献

- (1) Uicker, J. J. Jr., Denavit, J. and Hartenberg, R. S., *Trans. ASME, Ser. E*, **31** (1964), 309.
- (2) 長松昭男・斉藤俊・一柳高時, 機論, **51**-470, C (1985), 2668-2676.
- (3) 長松昭男・斉藤俊・一柳高時, 機論, **51**-470, C (1985), 2677-2683.
- (4) 長松昭男・斉藤俊・桜井康雄, 機論, **51**-470, C (1985), 2684-2689.
- (5) 山田克彦・土屋和雄, 機論, **53**-491, C (1987), 1598-1605.
- (6) 村上晃・加藤寛一郎, 日本航空宇宙学会誌, **39**-444 (1991), 39-43.
- (7) Kane, T. R. and Levinson, D. A., *J. Appl. Mech.*, **50** (1983), 1071-1078.
- (8) Sunada, W. H. and Dubowsky, S., *Trans. ASME, J. Mech. Trans. Autom. Des.*, **105** (1983), 42-51.
- (9) Shabana, A. A., Hussien, H. A. and Escalona, J. L., *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, **120** (1998), 188-195.
- (10) 高橋義孝・清水信行, 機論, **67**-655, C (2001), 626-632.
- (11) Imanishi, E. and Sugano, N., *JSME Int. J., Ser. C*, **46**-2 (2003), 527-532.
- (12) Nagata, T., *JSME Int. J., Ser. C*, **46**-2 (2003), 459-466.
- (13) 村瀬勝彦・加鳥裕明・西村融, 機論, **48**-434, A (1982), 1318-1324.
- (14) 村瀬勝彦・加鳥裕明・西村融, 機論, **49**-438, A (1983), 223-229.