接触回転系の時間遅れに基づく不安定振動の防止対策*

(第 1 報, 新しい安定判別法の適用)

宗 和 伸 行^{*1}, 近 藤 孝 広^{*1}
森 博 輝^{*2}, 崔 銘 秀^{*3}

Prevention Method for Unstable Vibration Caused by Time Delay in Contact Rotating Systems (1st Report, Application of New Stability Analysis)

Nobuyuki SOWA^{*4}, Takahiro KONDOU,
Hiroki MORI and Myung-Soo CHOI

^{*4} Department Intelligent Machinery and Systems, Kyushu University,
6-10-1 Hakozaki, Higashi ku, Fukuoka shi, Fukuoka, 812-8581 Japan

In the field of mechanical engineering, a large number of time delay systems are found. While the systems are operating, unstable vibrations often occur due to the time delay caused by viscoelastic deformation, plastic deformation, cutting, grinding, wear and so on. Such phenomena are well known as the chattering of machine tools and the pattern formation phenomena in contact rotating systems. In this report, the authors study the property of new stability analysis developed for unstable vibration in contact rotating systems and apply it to system with time delay of a half rotating period. As a typical example, the prevention method by changing structural design is formulated for two- and three-degree-of-freedom system. The validity of the present method is confirmed from the numerical computational results.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Self-Excited Vibration, Stability, Time Delay System, Viscoelastic Body, Pattern Formation Phenomena

1. 結 言

機械工学の分野では、システム内に含まれる時間遅れ要素が原因となって不安定振動を引き起こし、機械の継続運転が不可能となったり、製品品質が低下する現象が数多く見受けられる。具体例として、工作機械のびびり現象や接触回転系のパターン形成現象⁽¹⁾などがあげられる。この時間遅れの原因としては、粘弾性変形、塑性変形、切削、研削、摩擦などがあり、不安定振動が発生すると、接触部分の表面に周期的なパターンが形成されることが多い。このような不安定振動に対する通常の解析手法は、線形時間遅れ系の特性根を直接求めて安定性を判別するものであり、非常に厳密で得られる情報量も豊富である。その反面、計算過

程において超越方程式を解く必要があり、とりわけ大規模系に対しては必ずしも使い易いものではない。

そこで、著者らはモード解析の概念を援用することによって、モード毎の不安定度を表すエネルギー指数を導出するとともに、特性根を求める必要のない簡易安定判別法を定式化し、解析の劇的な効率化を実現した⁽²⁾⁽³⁾。ところが、簡易安定判別法には一部近似が含まれているため、定量的な誤差が生じる可能性があり、厳密な安定判別法による最終確認が必要となる。

この問題を解決するため、既報では⁽⁴⁾安定・不安定境界の存在条件に基づく新しい安定判別法を開発し、1自由度接触回転系のパターン形成現象に対する動吸振器の最適設計に適用した。この安定判別法は簡易安定判別法と比較すると計算量は若干増加するものの、厳密で効率的な安定判別が可能である。

本報では、新しい安定判別法を遅れ時間が半回転周期のモデルへ拡張するとともに、その特長をより詳細に検討し、パターン形成現象が発生しにくい構造設計法に適用する。基本概念の明確化のために、遅れ時間

* 原稿受付 2005 年 3 月 10 日。

^{*1} 正員, 九州大学大学院工学研究院 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

^{*2} 正員, 日本学術振興会特別研究員, 九州大学大学院工学府。

^{*3} 正員, 釜慶大学校工科大学 (〒608-739 韓国釜山広域市南区龍塘洞山 100)。

E-mail: sowa@mech.kyushu-u.ac.jp

が1回転周期および半回転周期となるモデルの代表として、2自由度系および3自由度系の粘弾性モデルを例にとって、数値計算によりその有効性を検証する。

2.2 自由度系に対する適用

2.1 解析モデル 粘弾性変形が原因でパターン形成現象が発生するシステムの典型例^{(1),(2)}として、2自由度系の解析モデルを図1に示す。このモデルは、質量が m_1 のロールⅠと表面に粘弾性特性を有する質量 m_2 のロールⅡの2つのロールから構成されており、ともに長手方向の弾性変形が無視できるものとする。また、ロールⅠおよびロールⅡは、それぞればね定数 k_1 および k_2 のばね、粘性減衰係数 c_1 および c_2 の減衰器からなる基礎支持要素で支持されており、図の上下方向にのみ可動である。さらに、ばね定数 $\hat{k}$ のばねと粘性減衰係数 $\hat{c}$ の減衰器とからなる防止対策用のロール間結合要素が両ロールの軸受間に付加されているものとする。

両ロールは、比較的大きな接触荷重のもとで一定角速度の接触回転を行っており、接触部においてロールⅡ表面には粘弾性変形が生じる。この粘弾性変形の残留変形量がロールⅡの1回転後に接触部にフィードバックされることにより時間遅れ効果もたらされる。この粘弾性特性を、ばね定数 k_d のばねからなる瞬時弾性変形部とばね定数 k_e のばねおよび粘性減衰係数 c_d の減衰器からなる遅延弾性変形部とから構成される3要素モデル⁽⁵⁾で表す。

2.2 運動方程式および特性方程式 図1に示すようにロールⅠおよびロールⅡの上下方向の変位をそれぞれ $x_1 = x_1(t)$ および $x_2 = x_2(t)$ 、瞬時弾性変形部と遅延弾性変形部境界の変位を $z = z(t)$ とし、時間遅れ効果を考慮して運動方程式を導くと次のようになる。

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky - \varepsilon C_D \dot{y}_T - \varepsilon K_D y_T = 0 \quad \dots\dots(1)$$

ここに、 $"\cdot" = d/dt$ 、および、

$$\left. \begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & c_d \end{bmatrix}, \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_d \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} K_{11} & -K_{12} \\ -K_{12}^T & k_d + k_i \end{bmatrix}, \quad K_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_d \end{bmatrix} \\ M_{11} &= \text{diag}[m_1, m_2] \\ C_{11} &= \begin{bmatrix} c_1 + \hat{c} & -\hat{c} \\ -\hat{c} & c_2 + \hat{c} \end{bmatrix} \\ K_{11} &= \begin{bmatrix} k_1 + \hat{k} + k_i & -(\hat{k} + k_i) \\ -(\hat{k} + k_i) & k_2 + \hat{k} + k_i \end{bmatrix}, \quad K_{12} = \begin{bmatrix} k_i \\ -k_i \end{bmatrix} \\ y &= [{}^T x(t), u(t)], \quad x = [x_1(t), x_2(t)] \\ y_T &= [{}^T x(t-T), u(t-T)] \\ u(t) &= z(t) - x_1(t), \quad \varepsilon = \exp(-\alpha T) = \exp\left(-\frac{2\pi\alpha}{\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(2)$$

Fig. 1 Modeling of 2-degree-of-freedom system

であり、 $u = u(t)$ は接触部通過直後の遅延弾性変形部の変形量、 T および ω はそれぞれロールⅡの回転周期および回転角速度、 ε はロールⅡの残留変形量のフィードバック率、 α は粘弾性体の回復特性指数⁽¹⁾を表す。また、 $\text{diag}[\dots]$ は対角行列を表し、左上添字 $"t"$ は転置記号である。

式(1)に対して回転周期が 2π となるように $\tau = \omega t$ の変数変換を行ったのち、初期値を零としてラプラス変換を施すと、特性方程式として次式が求められる。

$$[\omega^2 s^2 M + \omega s C + K - \varepsilon'(\omega s C_D + K_D)]Y = 0 \quad (3)$$

$$\det[\omega^2 s^2 M + \omega s C + K - \varepsilon'(\omega s C_D + K_D)] = 0 \quad (4)$$

ここに、

$$\varepsilon' = \varepsilon \exp(-2\pi s), \quad Y = \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad \dots\dots(5)$$

であり、 X および U はそれぞれ x および u の像関数である。従来の厳密な安定判別法は、式(4)から求められる特性根 $s = \sigma + iN$ ($i = \sqrt{-1}$)の実部 σ により系の安定判別を行う方法⁽¹⁾である。式(4)は超越方程式であるため特性根 s は加算無限個存在し、そのうち σ が正値の特性根がひとつでもあれば系は不安定となり、その値が大きいほど不安定度も高くなる。また、特性根の虚部 N は発生するパターンの角形数に相当し、不安定領域では整数値より若干小さな値となる。

接触回転系の時間遅れに基づく不安定振動⁽¹⁾⁻⁽³⁾は、減衰および時間遅れ項を無視して得られる j 次の不減衰固有角振動数 ω_j および固有モードに非常に近い角振動数および振動モードで振動する。また、形成されるパターンの角形数を $\bar{n}$ (正整数)とすると、 $\omega \approx \omega_j / \bar{n}$ を満たす複数の回転数領域において、不安定振動が発生し得る。よって、従来の安定判別法を用いて安定性を論じる場合、不安定振動が発生し得るすべての領域の特性根を求める必要があり、自由度が大きくなるほどその計算量は膨大となり、計算手続きも煩雑となる。そこで、既報⁽⁴⁾で開発した新しい安定判別法を2自由度系に適用し解析の効率化を図る。

2.3 新しい安定判別法の適用 安定・不安定境界上では式(4)の特性根の実部 σ は零となるので, $s = iN$ を式(3)に代入することにより, 境界上の特性方程式は,

$$[K - \Omega^2 M + i\Omega C - \rho(K_D + i\Omega C_D)]Y = 0 \quad (6)$$

となる。ここに,

$$\rho = \varepsilon \lambda, \quad \lambda = \exp(-i2\pi N), \quad \Omega = \omega N \quad \dots\dots\dots(7)$$

であり, 式(6)から Y 中の X を消去して整理すると,

$$\left\{ \begin{aligned} &[(k_d + k_i + ic_d \Omega) - \rho(k_d + ic_d \Omega)] \\ &- {}^t K_{12} (K_{11} - \Omega^2 M_{11} + i\Omega C_{11})^{-1} K_{12} \end{aligned} \right\} U = 0 \quad (8)$$

となる。したがって, $U \neq 0$ の条件から次式を得る。

$$\rho = \rho(\Omega) = \frac{(k_d + k_i + ic_d \Omega) D(\Omega) - Q(\Omega) k_i^2}{(k_d + ic_d \Omega) D(\Omega)} \quad (9)$$

ここに,

$$\left\{ \begin{aligned} D(\Omega) &= D_{11}(\Omega) D_{22}(\Omega) - D_{12}^2(\Omega) \\ D_{11}(\Omega) &= k_1 + \hat{k} + k_i - m_1 \Omega^2 + i(c_1 + \hat{c}) \Omega \\ D_{22}(\Omega) &= k_2 + \hat{k} + k_i - m_2 \Omega^2 + i(c_2 + \hat{c}) \Omega \\ D_{12}(\Omega) &= \hat{k} + k_i + i\hat{c} \Omega \\ Q(\Omega) &= k_1 + k_2 - (m_1 + m_2) \Omega^2 + i(c_1 + c_2) \Omega \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

である。 ε は定義より実数で $0 < \varepsilon \leq 1$ であり, 式(7)の第2式より, $|\lambda| = 1$ および $\arg \lambda = -2\pi N$ となるので,

$$|\rho| = \varepsilon = \exp\left(-\frac{2\pi N \alpha}{\Omega}\right) \Rightarrow N = -\frac{\Omega}{2\pi \alpha} \ln |\rho| \quad (11)$$

$$\arg \rho = \arg \lambda = -2\pi N \Rightarrow N = -\frac{1}{2\pi} \arg \rho \quad (12)$$

が得られる。 N は正負どちらの値も取り得るが, 以下では $N > 0$ の場合を考える。このとき, 式(12)より $\arg \rho < 0$ であり, $-2\pi \leq \arg \rho < 0$ となる値を $\hat{\phi}$ とすると,

$$\arg \rho = \hat{\phi} - 2(n-1)\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots(13)$$

と表される。後述するように, 式(13)の $\hat{\phi}$ は, n が対応する不安定領域で発生するパターンの角形数 $\bar{n}$ と等しくなるように定義されている。式(11)および式(12)より N を消去し, 式(13)を代入して整理すると,

$$\sigma(\Omega, n) \equiv \frac{\Omega}{\alpha} \ln |\rho| - \hat{\phi} + 2(n-1)\pi = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

が成立する。式(14)を満たす Ω および n が存在すれば安定・不安定境界が存在し, 2つの境界に挟まれた領域が不安定領域となる。したがって, 式(14)で定義された $\sigma(\Omega, n)$ の正負によって安定判別が可能となる。詳細は省略するが, 既報⁽⁴⁾と同様に, $\Omega \rightarrow 0 (\omega \rightarrow 0)$ では不安定振動が発生しないという条件から, 安定条件は,

$$\sigma(\Omega, n) > 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

となる。以上の議論は $N < 0$ の場合も同様に成立する。

2.4 新しい安定判別法の特長 $\sigma(\Omega, n) < 0$ となる不安定領域には, Ω の変化に対して $\sigma(\Omega, n)$ の極小値が存在する。極小値は n の増加とともに 2π ずつ大きく

なり, ある n を境に式(15)を満たすようになる。これは, 粘弾性モデルの場合, 同じ振動モードの不安定振動であれば発生するパターンの角形数 $\bar{n}$ が大きくなるほど安定度が高くなり, ある角形数以上(ある回転数以下)の不安定振動は発生しないことに対応している。このことから, $\sigma(\Omega, n)$ の極小値は不安定振動が発生し得る領域 ($\omega \approx \omega_j / \bar{n}$) の安定度を代表する値であることがわかる。 $\bar{n}$ 角形の不安定領域では $N \approx \bar{n}$ であり, その値は $\bar{n}$ より若干小さな値となる⁽¹⁾⁻⁽³⁾。このことから, 1角形の領域では式(12)より $\arg \rho = \hat{\phi} \approx -2\pi$ となるはずであり, 式(13)より $n = 1$ である。同様に, 2角形の領域では $n = 2$, 3角形の領域では $n = 3$ となり式(13)の n は発生角形数 $\bar{n}$ に対応する。

以上の特性を利用すると, $n = 1$ における $\sigma(\Omega, 1)$ の極小値から, すべての角形数の安定性を効率的に判別できる。その手順を以下に説明する。

(i) $\Omega \approx \omega_j$ に存在する $\sigma(\Omega, 1)$ の極小値を求める。その極小値を $\sigma_{\min, j}$ とする。

(ii) $\sigma_{\min, j}$ は j 次モード 1 角形の安定度を代表する値であり, $\sigma_{\min, j} > 0$ あるいは $\sigma_{\min, j}$ が存在しなければ j 次モードのすべての角形数(全回転数領域)で不安定振動は発生しないと判別される。

(iii) $\bar{\sigma}_{\min, j} = \sigma_{\min, j} + 2\pi(\bar{n} - 1)$ を求める。 $\bar{\sigma}_{\min, j} > 0$ であれば j 次モード $\bar{n}$ 角形は安定, $\bar{\sigma}_{\min, j} < 0$ であれば不安定と判別される。

2.5 新しい安定判別法による防止対策 接触回転系の時間遅れに基づく不安定振動の抜本的な防止対策として, 不安定振動が発生しにくい構造設計を試みる。その際, 全回転数領域で安定化を図るのが理想ではあるが, 回転機械で時間遅れに基づく不安定振動が問題となるのは, 固有振動数よりかなり低い回転数領域であるので, 使用回転数領域において発生を防止することができれば十分であろう。前述の通り, 粘弾性モデルでは, ある角形数より大きな領域(ある回転数より低い領域)では不安定振動は発生しない。それゆえ, この特性を利用して最大使用回転数以下の領域をすべて安定化するのが現実的である。この方法は, 使用回転数が広範囲に変動する場合の防止対策にも有効であり, 新しい安定判別法を利用すれば容易に実現できる。その具体的な手法について説明する。

(i) 安定化が必要な最大回転角速度 $\bar{\omega}$ を設定する。

(ii) 式(4)の減衰および時間遅れ項を除いた特性方程式から不減衰固有角振動数 ω_j を求める。

(iii) $\sigma(\Omega, 1)$ の極小値 $\sigma_{\min, j}$ を求める。

(iv) $\bar{N}_j = \omega_j / \bar{\omega}$ を求める。

(v) $\bar{n}_j - 1 < \bar{N}_j \leq \bar{n}_j$ ($\bar{n}_j$ は正整数) のとき, 2.4 節(iii)

より、 $\bar{\sigma}_{\min,j} = \sigma_{\min,j} + 2\pi(\bar{N}_j - 1) > 0$ であれば少なくとも $\bar{n}_j$ 角形の領域 ($\omega < \bar{\omega}$) は安定となる。

(vi) すべてのモードで $\bar{\sigma}_{\min,j} > 0$ となるように、支持要素および結合要素等の系パラメータを調整する。

3. 2 自由度系の数値計算結果

3.1 新しい安定判別法の特長の検証 2自由度系の基準パラメータの値および不減衰固有振動数を表1に示す。まず、新しい安定判別法の特長について検証する。基準パラメータにおける新しい安定判別法の結果を図2に示す。横軸は Ω 、縦軸は $\sigma(\Omega, 1)$ であり、太線は $\sigma(\Omega, 1) < 0$ となる不安定領域を表している。また、この不安定領域の拡大図も表示している。一点鎖線は $\Omega = \omega_j (= 2\pi f_j)$ を表す。 $\sigma(\Omega, 1)$ の極小値は ω_1 近傍には存在せず $\Omega \approx \omega_2$ にのみ存在し、その値は負であり不安定となっている。この不安定領域は $n=1$ に対する不安定領域であり、 $\sigma(\Omega, 1)=0$ の点が安定・不安定境界となる。また、拡大図中の点線は $\sigma(\Omega, 1) = -2\pi(n-1)$ ($n=2, 3, \dots, 7$) であり、それぞれ $\sigma(\Omega, n)=0$ の線を表す。つまり、 $\sigma(\Omega, 1) < -2\pi(n-1)$ となる領域がそれぞれの n に対する不安定領域であり、 $\sigma(\Omega, 1) = -2\pi(n-1)$ となる点が安定・不安定境界となる。安定・不安定境界は $n=5$ まで存在し、拡大図に $n=1, 2, 3, 4$ および 5 に対応する安定・不安定境界をそれぞれ '○', '◇', '△', '□' および '▽' で表している。この結果より、1次モードの不安定振動は発生せずに2次モードの不安定振動が最大5角形まで発生することが予想できる。なお、 $\Omega \approx 156$ および 292 (rad/s) にある $\sigma(\Omega, 1)$ の不連続点は、 $\hat{\phi}$ の不連続性 ($0 \neq 2\pi$) によるものである。

新しい安定判別法の精度を検証するため、従来の厳密な安定判別法による結果を図3に示す。横軸はローレルIIの回転数 f 、縦軸は式(4)から求められる特性根 $s = \bar{\sigma} + iN$ の虚部 N であり、太線は $\bar{\sigma} > 0$ となる不安定特性根、細線は $\bar{\sigma} < 0$ となる安定特性根、双曲線状に存在する点線は不減衰固有振動数 f_j と f との比 f_j/f を表す。図中には、 $N=4$ および 5 近傍の不安定領域の拡大図も表示している。'○'等の記号の意味は図2と同一であり、 $\sigma(\Omega, n)=0$ となる Ω に対する N の値を式(9)および式(11)あるいは式(12)より求め、 f を $\Omega = \omega N = 2\pi f N$ の関係式より計算しプロットしている。新しい安定判別法による予想通り、1次モードには不安定領域がなく2次モードの不安定領域が最大5角形まで存在している。また、図2と図3の安定・不安定境界の対応から、 n が発生角形数 n に対応することが確認できる。新しい安定判別法による安定・不安定境界は、従来の厳密な安定判別法の境界と数値的にも完全に一致

することを確認しており、新しい安定判別法により厳密な結果が得られることが示された。さらに、従来の安定判別法では少なくとも安定な角形数の領域が現れるまで広範囲の回転数に対して非常に多くの特性根を求める必要があるが、新しい安定判別法では $\sigma(\Omega, 1)$ を求めるだけで全領域の安定性を厳密に判別することができるので、安定性解析の大幅な効率化が実現される。

次に、 $\sigma(\Omega, n)$ の極小値 $\bar{\sigma}_{\min,j}$ を用いた安定性解析の妥当性について検証する。 $\bar{\sigma}_{\min,j}$ は対応する不安定領域の安定度を代表する値である。ここで、 $\bar{\sigma}_{\min,j}$ をとる Ω を $\Omega_{\min}$ 、 $\Omega_{\min}$ に対応するローレルIIの回転数を $f_{\min}$ とすれば、式(9)、式(11)および式(12)は不安定領域でも近似的に成り立つので、図2の安定・不安定境界を図3にプロットする場合と同様の計算方法で $f_{\min}$ を求めることができる。一方、図3において、特性根の実部は不安定領域毎にピーク値 $\bar{\sigma}_{\text{peak}}$ をとる。従来の安定判別法では、この $\bar{\sigma}_{\text{peak}}$ を領域毎の不安定度を代表する重要な指標として取り扱ってきた。このピーク値 $\bar{\sigma}_{\text{peak}}$ をとる

Table 1 Standard values of 2-degree-of freedom model

Parameters	Values	Parameters	Values
m_1, m_2 (kg)	1.4×10^3	k_s (MN/m)	34
k_1, k_2 (MN/m)	43	k_d (MN/m)	190
c_1, c_2 (kNs/m)	20	c_d (kNs/m)	370
$\hat{k}$ (MN/m)	0	α (1/s)	2.0
$\hat{c}$ (kNs/m)	0	f_1, f_2 (Hz)	27.9, 42.7

Fig. 2 Result of new stability analysis (Standard parameters)

Fig. 3 Result of conventional stability analysis (Standard parameters)

Fig. 4 Relationship between k_1 and $f_{\min}$, f_{peak}

ロールⅡの回転数を f_{peak} とする。図4にロールⅠの支持剛性 k_1 と1角形および2角形領域 ($\bar{n}=1, 2$) の $f_{\min}$ および f_{peak} との関係を示す。薄い破線は $f_{\min}$ 、濃い実線は f_{peak} を表す。両者がほとんどの領域で重なっていることからわかるように、 k_1 に関わらず $f_{\min} \approx f_{\text{peak}}$ となっている。1次モードの曲線にデータの欠損がみられるのは、極小値およびピーク値が存在しないためであり、この領域では1次モードは安定となる。また、結果の表示は省略するが、 k_1 に対する $\bar{\sigma}_{\min,j}$ と $\bar{\sigma}_{\text{peak}}$ の変化の様相も (符号は逆でその絶対値も異なるが) ほぼ相似であり、3角形以上の領域も含め k_1 以外のパラメータに対しても同様の結果が得られている。以上のことから、 $\bar{\sigma}_{\min,j}$ を $\bar{\sigma}_{\text{peak}}$ と同様に安定性解析の重要な指標として取り扱うことが可能であることが確認された。

3.2 新しい安定判別法による防止対策の検証 ロールⅡの最大回転数を $\bar{f} = \bar{\omega}/2\pi = 15.0$ Hz と設定し、安定化に必要な支持減衰 c_1 および c_2 を最小とするような構造設計を行う。まず、基準パラメータを例に2.5節の手順に従った計算方法を説明する。基準パラメータでは、 $\sigma(\Omega, 1)$ の極小値は ω_2 近傍にしか存在しないので、2次モードのみ検討すればよい。2次モードの固有振動数は $f_2 = 42.7$ Hz であり、 $\bar{f}$ において $\bar{N}_2 = f_2/\bar{f} = 42.7/15.0 = 2.85$ となる。 ω_2 近傍の極小値を求めると $\sigma_{\min,2} = -25.8$ であり、 $\bar{f}$ における2次モードの安定度は2.5節(v)の式から、 $\bar{\sigma}_{\min,2} = \sigma_{\min,2} + 2\pi(\bar{N}_2 - 1) = -25.8 + 2\pi(2.85 - 1) = -14.2 < 0$ となる。したがって、 $\bar{f}$ 以下の領域で不安定振動が発生する。この領域を安定化するために $\bar{\sigma}_{\min,j} > 0$ となる最小の減衰を $c_1 = c_2$ として求めると $c_1 = c_2 = 33.3$ kNs/m であった。

次に、ロールⅠの支持剛性 k_1 を変化させて、より小さな減衰で安定化することを試みる。その結果、 $k_1 = 136.8$ MN/m のときに安定化に必要な減衰が最小となり、その値は $c_1 = c_2 = 13.5$ kNs/m となった。このとき、基準パラメータの場合とは異なり、 $\sigma(\Omega, 1)$ の極小値は ω_1 近傍にも存在するため、1次モードおよび2次モードともに $\bar{\sigma}_{\min,j} > 0$ となるような減衰を求めた。このパラメータにおける新しい安定判別法の結果を図5に示す。

Fig. 5 Result of new stability analysis
($k_1 = 136.8$ MN/m, $c_1 = c_2 = 13.5$ kNs/m) Fig. 6 Result of conventional stability analysis
($k_1 = 136.8$ MN/m, $c_1 = c_2 = 13.5$ kNs/m)

す。図5は極小値付近の拡大図を表示しており、 ω_1 近傍にも極小値が存在することが確認できる。点線は $\sigma(\Omega, 1) = -2\pi(\bar{N}_j - 1)$ を表し、両モードとも極小値は $\sigma_{\min,j} > -2\pi(\bar{N}_j - 1)$ となっていることから $\bar{\sigma}_{\min,j} > 0$ であり、 $\bar{f}$ 以下の回転数領域で安定化されている。確認のため、図5と同じパラメータにおける従来の安定判別法による結果を図6に示す。ロールⅡの回転数 $\bar{f} = 15.0$ Hz より低い領域で1次モードおよび2次モードともに安定化が実現されていることが確認できる。

さらに、結合要素に $\hat{k} = 20.0$ MN/m のばねを取り付けて同様の検討を行うと、 $k_1 = 179.1$ MN/m および $c_1 = c_2 = 9.5$ kNs/m となり、より小さな減衰で安定化が実現できる。また、結合要素に $\hat{k} = 20.0$ MN/m のばねとともに $\hat{c} = 5.0$ kNs/m の減衰を付加すれば $k_1 = 128.7$ MN/m および $c_1 = c_2 = 4.9$ kNs/m で安定化が可能であり、 c_1, c_2 だけでなく k_1 も大幅に減少する。同様に、ロールの質量や粘弾性特性を変更する等、設計変数が多い場合でも安定性解析を効率的に行えるので目的に応じた柔軟な検討が可能であり、強度等の他の条件やコスト面の制限が加わる場合でも新しい安定判別法を利用することによる最適設計の簡易化が期待できる。

4.3 自由度系に対する適用

4.1 解析モデルおよび運動方程式 図7に3自由度系の解析モデルを示す。このモデルは、図1のモデルに対してロールⅢを追加し、粘弾性特性を有するロ

ールⅡが他の2つのロールに挟まれるようにして、3本のロールの回転中心が同一直線上になるように配置したものである。解析にあたり2自由度系の場合と同様にモデル化するが、接触部がロールⅡの上下にあるため、残留変形量は半回転($T/2$)後に変形が生じた接触部と反対側の接触部にフィードバックされる点が大きく異なる。ここでは、ロールⅡの上下2つの接触部の粘弾性特性は同一であるものとする。各記号は2自由度系に準じるものとして、図7のモデルの運動方程式を求めると次式ようになる。

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky - \varepsilon C_D \dot{y}_{T/2} - \varepsilon K_D y_{T/2} = 0 \quad (16)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}, C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{D22} \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} K_{11} & -K_{12} \\ -{}^t K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}, K_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{D22} \end{bmatrix} \\ M_{11} &= \text{diag}[m_1, m_2, m_3] \\ C_{11} &= \begin{bmatrix} c_1 + \hat{c}_1 & -\hat{c}_1 & 0 \\ -\hat{c}_1 & c_2 + \hat{c}_1 + \hat{c}_2 & -\hat{c}_2 \\ 0 & -\hat{c}_2 & c_3 + \hat{c}_2 \end{bmatrix}, C_{22} = \begin{bmatrix} c_d & 0 \\ 0 & c_d \end{bmatrix} \\ K_{11} &= \begin{bmatrix} k_1 + \hat{k}_1 + k_i & -(\hat{k}_1 + k_i) & 0 \\ -(\hat{k}_1 + k_i) & k_2 + \hat{k}_1 + \hat{k}_2 + 2k_i & -(\hat{k}_2 + k_i) \\ 0 & -(\hat{k}_2 + k_i) & k_3 + \hat{k}_2 + k_i \end{bmatrix} \\ K_{12} &= \begin{bmatrix} k_i & -k_i & 0 \\ 0 & k_i & -k_i \end{bmatrix}, K_{22} = \begin{bmatrix} k_i + k_d & 0 \\ 0 & k_i + k_d \end{bmatrix} \\ C_{D22} &= \begin{bmatrix} 0 & c_d \\ c_d & 0 \end{bmatrix}, K_{D22} = \begin{bmatrix} 0 & k_d \\ k_d & 0 \end{bmatrix} \\ y &= {}^t[x(t), {}^t u(t)], x = {}^t[x_1(t), x_2(t), x_3(t)] \\ u &= {}^t[u_1(t), u_2(t)] \\ y_{T/2} &= \begin{bmatrix} {}^t x\left(t - \frac{T}{2}\right), {}^t u\left(t - \frac{T}{2}\right) \end{bmatrix} \\ u_1(t) &= z_1(t) - x_1(t), u_2(t) = x_3(t) - z_2(t) \\ \varepsilon &= \exp\left(-\frac{\alpha T}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi \alpha}{\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Fig. 7 Modeling of 3-degree-of-freedom system

4.2 新しい安定判別法の適用

2自由度系と同様に、式(16)に対して $\tau = \omega t$ の変数変換および初期値を零としたラプラス変換を施し、 $s = iN$ とおくことで安定・不安定境界上の特性方程式が求められる。その結果は、式(6)と形式上同一となる。ただし、遅れ時間が半回転周期であるため、

$$\lambda = \exp(-i\pi N) \quad \dots\dots\dots(18)$$

である。境界上の特性方程式から Y 中の X を消去して整理すると、

$$\{A(\Omega) - \rho B(\Omega)\}U = 0 \quad \dots\dots\dots(19)$$

となる。ここに、 U は u の像関数、および、

$$\left. \begin{aligned} A(\Omega) &= K_{22} + i\Omega C_{22} \\ &\quad - {}^t K_{12}(K_{11} - \Omega^2 M_{11} + i\Omega C_{11})^{-1} K_{12} \\ B(\Omega) &= K_{D22} + i\Omega C_{D22} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

である。 $U \neq 0$ の条件より、次式を得る。

$$\det\{A(\Omega) - \rho B(\Omega)\} = 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

ρ は式(21)から一般固有値問題として求めることができる。3自由度系の場合 $A(\Omega)$ 、 $B(\Omega)$ は 2×2 の複素行列であるので、2つの複素固有値を $\rho_r = \rho_r(\Omega)$ ($r=1, 2$)として、2自由度系と同様に次式を定義する。

$$\sigma_r(\Omega, n) \equiv \frac{\Omega}{\alpha} \ln |\rho_r| - \hat{\phi}_r + 2(n-1)\pi \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$N = -\frac{1}{\pi} \arg \rho_r, \arg \rho_r = \hat{\phi}_r - 2(n-1)\pi \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここに、 $n=1, 2, 3, \dots$ および $\hat{\phi}_r$ は $-2\pi \leq \arg \rho_r < 0$ となる $\arg \rho_r$ の値である。式(22)は式(14)の $\sigma_r(\Omega, n)$ と同一形式であり、安定条件も2自由度系と同様に、

$$\sigma_r(\Omega, n) > 0 \quad (r=1, 2) \quad \dots\dots\dots(24)$$

となる。詳細は省略するが式(24)も $\Omega \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$)における安定性の条件から導出可能である。

遅れ時間が半回転周期となる系では、式(22)の n と対応する不安定領域の角形数 $\bar{n}$ との関係が1回転周期の系とは異なる。式(23)より n が1増加する毎に N はほぼ2増加することになり、 $N \approx \bar{n}$ であるから対応するパターンの角形数 $\bar{n}$ は2角形ずつ変化する。それゆえ、 $r=1$ および2に対してそれぞれ存在し得る $\sigma_r(\Omega, 1)$ の2つの極小値は、一方が1角形、他方が2角形の発生領域の安定度を表すはずであり、 n が増加するに伴って、前者が奇数角形、後者が偶数角形の発生領域の安定度を表す。3自由度系では式(21)から一般固有値を求める必要があり、その計算量は2自由度系より増加するが、従来の安定判別法と比較すると劇的に減少している。

4.3 新しい安定判別法による防止対策

2自由度系と同様に最大使用回転数 $\bar{\omega}$ 以下の領域で安定化を図る。3自由度系では、式(22)の n に対応する発生角形数 $\bar{n}$ の値が $\hat{\phi}_r$ の値によって奇数角形($2n-1$)あるいは偶

数角形(2n)となるため、 $\bar{\omega}$ における安定性を判別するには以下の工夫が必要である。2自由度系の式(12)の第2式と同様に、式(23)の第1式は不安定領域でも近似的に成り立つ。そこで、極小値 $\sigma_{\min,j}$ をとるとき $\hat{\phi}_{\min,j}$ の値を $\hat{\phi}_{\min,j}$ とし、 $\bar{\omega}$ における $\bar{N}_j = \omega_j / \bar{\omega}$ に対応する n を実数値 $\bar{n}_j$ で表すと、式(23)から $\pi \bar{N}_j + \hat{\phi}_{\min,j} \approx 2(\bar{n}_j - 1)\pi$ の関係が成り立つ。2・5節(v)と同様に考えると、 j 次モードに対して $\omega < \bar{\omega}$ の領域が安定となる条件は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{\min,j} &= \sigma_{\min,j} + \pi \bar{N}_j + \hat{\phi}_{\min,j} \\ &\approx \sigma_{\min,j} + 2\pi(\bar{n}_j - 1) > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

となる。なお、 $\Omega \approx \omega_j$ には2つの極小値が存在し得るが、より値の小さな極小値を $\sigma_{\min,j}$ として安定化を行えば、一方も同時に安定化される。

4・4 2自由度系と3自由度系との間の相違点 2

2自由度系に対する安定判別と3自由度系に対する安定判別との間の主な相違点を表2にまとめた。両者間の最も大きな違いは、粘弾性特性を有するロールIIと他のロールとの間の接触部が2自由度系では1点のみであるのに対し、3自由度系ではロールIIの直径方向の対向する円周上に2点存在することである。これに伴い、遅れ時間 T_d は2自由度系ではロールIIの1回転周期 T となり、3自由度系では半回転周期 $T/2$ となる。また、系の安定度を表す指標である $\sigma(\Omega, n)$ の個数 M は、前者では1、後者では2となる。この M の値は、接触部の個数にのみ依存し、自由度や遅れ時間には依存しない。3自由度系における2個の $\sigma(\Omega, n)$ は、一方が奇数角形、他方が偶数角形の発生領域の安定度を表す。それゆえ、 $\sigma(\Omega, n)$ 中の n と対象となる領域の発生角形数 $\bar{n}$ との関係は、奇数あるいは偶数の場合で異なる。このように、奇数角形と偶数角形とで取り扱いが若干異なることが、遅れ時間が半回転周期であることによる特徴である。さらに、安定化が必要な最大回転数 $\bar{\omega}$ における j 次モードの安定度を表す $\bar{\sigma}_{\min,j}$ は、2自由度系と3自由度系とは異なる式で表される。ただし、この点を除けば防止対策の取り扱いは2自由度系と全く同様であり、対象となる領域の角形数を考慮することなく厳密な安定判別を行うことが可能である。

5. 3 自由度系の数値計算結果

5・1 新しい安定判別法の特長の検証 3自由度系の基準パラメータの値および不減衰固有振動数を表3に、基準パラメータにおける新しい安定判別法の結果を図8に示す。実線および破線はそれぞれ $\sigma_1(\Omega, 1)$ および $\sigma_2(\Omega, 1)$ を表す。既報⁽²⁾より、基準パラメータの様な上下が完全に対称なモデルでは、2次モードでは偶数角形、1次モードおよび3次モードでは奇数角形の不安定

振動のみ発生することがわかっている。いま、 $\sigma_1(\Omega, 1)$ は $\Omega \approx \omega_2$ で、 $\sigma_2(\Omega, 1)$ は $\Omega \approx \omega_1$ および ω_3 で極小値を持つことから、 $\sigma_1(\Omega, 1)$ の極小値が偶数角形、 $\sigma_2(\Omega, 1)$ の極小値が奇数角形の安定度を表すと考えられる。図中の拡大図には、式(22)の n の値が1, 2, 3および4に対応する安定・不安定境界を $\sigma_1(\Omega, 1)$ は黒印、 $\sigma_2(\Omega, 1)$ は白印として、図2と同じ記号で表示している。図8より、1次モードは $n=3$ まで、2次モードは $n=2$ まで不安定領域が存在することがわかる。発生するパターンの角形数 $\bar{n}$ が奇数が偶数かを考慮して n と $\bar{n}$ との関係を求めると、1次モードは最大5角形まで奇数角形のみ、

Table 2 Difference between 2-degree-of-freedom model and 3-degree-of-freedom model

	2-DOF	3-DOF
T_d	T	$T/2$
M	1	2
$\bar{n}$	n	$2n-1$ or $2n$
$\bar{\sigma}_{\min,j}$	$\sigma_{\min,j} + 2\pi(\bar{N}_j - 1)$	$\sigma_{\min,j} + \pi \bar{N}_j + \hat{\phi}_{\min,j}$

Table 3 Standard values of 3-degree-of-freedom model

Parameters	Values	Parameters	Values
m_1, m_2, m_3 (kg)	1.4×10^3	k_1 (MN/m)	34
k_1, k_3 (MN/m)	43	k_d (MN/m)	190
c_1, c_3 (kNs/m)	20	c_d (kNs/m)	370
$k_2, \hat{k}_1, \hat{k}_2$ (MN/m)	0	α (1/s)	2.0
$c_2, \hat{c}_1, \hat{c}_2$ (kNs/m)	0	f_1, f_2, f_3 (Hz)	20.6, 36.1, 43.8

Fig. 8 Result of new stability analysis (Standard parameters)

Fig. 9 Result of conventional stability analysis (Standard parameters)

2 次モードは最大 4 角形まで偶数角形のみ不安定振動が発生すると予想できる。3 次モードは奇数角形で極小値 $\sigma_{\min,3}$ は $-2\pi \times (10-1) < \sigma_{\min,3} = -54.9 < -2\pi \times (9-1)$ を求めると、1 次モードは最大 5 角形まで奇数角形のみ、2 次モードは最大 4 角形まで偶数角形のみ不安定振動が発生すると予想できる。3 次モードは奇数角形で極小があるので、 $n=9$ すなわち最大 17 角形までの奇数角形の不安定領域が存在すると予想される。

2 自由度系の図 3 と同様な従来の厳密な安定判別法による結果を図 9 に示す。新しい安定判別法による予想通り、1 次モードは最大 5 角形まで奇数角形のみ、2 次モードは最大 4 角形まで偶数角形のみ不安定領域が存在することが確認できる。図 9 の範囲外ではあるが 3 次モードの最大角形数も 17 角形であり同様の結果が得られた。図 8 と図 9 の安定・不安定境界の対応からも、 $\sigma_1(\Omega, 1)$ の極小値が偶数角形、 $\sigma_2(\Omega, 1)$ の極小値が奇数角形の安定度を表すことがわかる。数値的にも安定・不安定境界が一致することを確認しており、遅れ時間が半回転周期である 3 自由度系でも、新しい安定判別法により厳密な結果が得られることが示された。

5.2 新しい安定判別法による防止対策の検証 3

自由度系ではロール II の最大使用回転数を $\bar{f} = 10.0$ Hz とし、 $f \leq \bar{f}$ の領域の安定化に必要な支持減衰係数 c_1 および c_3 が最小となるような構造設計を試みる。基準パラメータの場合、すべてのモードに対して極小値は 1 つずつ存在し、その値は $\sigma_{\min,1} = -15.5$ 、 $\sigma_{\min,2} = -11.0$ および $\sigma_{\min,3} = -54.9$ である。これらの極小値における $\hat{\phi}_r$ の値はそれぞれ $\hat{\phi}_{\min,1} = -2.81$ 、 $\hat{\phi}_{\min,2} = -5.93$ および $\hat{\phi}_{\min,3} = -2.40$ であり、 $\bar{N}_1 = f_1/\bar{f} = 20.6/10.0 = 2.06$ となるので $\bar{f}$ における 1 次モードの安定度は、式(25)から $\bar{\sigma}_{\min,1} = \sigma_{\min,1} + \pi \bar{N}_1 + \hat{\phi}_{\min,1} = -15.5 + \pi \times 2.06 - 2.81 = -11.8$ となる。2 次および 3 次モードも同様に計算すると、 $\bar{\sigma}_{\min,2} = -5.59$ および $\bar{\sigma}_{\min,3} = -43.5$ となり、すべてのモードで不安定である。 $f \leq \bar{f}$ の領域を安定化するために、すべてのモードで $\bar{\sigma}_{\min,j} > 0$ となるような最小の減衰を求めると $c_1 = c_3 = 87.6$ kNs/m となった。

より小さな減衰で安定化を実現するために、ロール I の支持剛性 k_1 を変更して、より適切なパラメータを求めると $k_1 = 3.0$ MN/m のとき $c_1 = c_3 = 79.0$ kNs/m の減衰で安定化が可能となった。さらに、結合要素に $\hat{k}_1 = \hat{k}_2 = 20.0$ MN/m のばねを取り付けて同様に検討を行うと $k_1 = 122.8$ MN/m、 $c_1 = c_3 = 20.6$ kNs/m となった。このパラメータにおける新しい安定判別法の結果を図 10 に示す。基準パラメータとは異なりすべてのモードに対して $r=1, 2$ とも $\sigma_r(\Omega, 1)$ の極小値が存在するが、いずれも $\sigma_2(\Omega, 1)$ の極小値が小さいので、 $\sigma_2(\Omega, 1)$ の極小値

を $\sigma_{\min,j}$ として安定化することで $\sigma_1(\Omega, 1)$ の極小値も同時に安定化される。図 10 の点線は、 $-\pi \bar{N}_j - \hat{\phi}_{\min,j}$ を表し、すべてのモードで極小値は $\sigma_{\min,j} > -\pi \bar{N}_j - \hat{\phi}_{\min,j}$ となっていることから $\bar{\sigma}_{\min,j} > 0$ であり、 $f \leq \bar{f}$ の領域で安定化されていることがわかる。図 11 に従来の安定判別法による確認結果を示す。目標通り $\bar{f} = 10$ Hz 以下で安定化が実現されており、3 自由度系でも新しい安定判別法を利用した構造設計が可能であることが確認された。

図 11 において $f > 10$ Hz の領域に注目すると、偶数角形の領域はすべて安定であり、奇数角形の不安定領域のみ存在することがわかる。図 10 において、すべてのモードで $\sigma_1(\Omega, 1)$ の極小値は正で安定であり、 $\sigma_2(\Omega, 1)$ の極小値は負で不安定であることから、基準パラメータと同様に $r=1$ が偶数角形、 $r=2$ が奇数角形に対応することがわかる。他のパラメータでも同様の結果を確認しており、固有値 ρ_r と発生角形数の奇数・偶数には何らかの関係があると考えられる。また、適切なパラメータで安定化を行うと少なくとも 2 つのモードで $\bar{\sigma}_{\min,j} \approx 0$ となる結果が得られていることがわかる。これらの性質に関しては、さらに検討を行う予定である。なお、本報では新しい安定判別法の妥当性を確認するために従来の安定判別法を併用したが、実際には新しい安定判別法だけで防止対策としての構造設計を厳密かつ能率的に行うことが可能である。

Fig. 10 Result of new stability analysis ($k_1 = 122.8$ MN/m, $\hat{k}_1 = \hat{k}_2 = 20.0$ MN/m, $c_1 = c_2 = 20.6$ kNs/m)

Fig. 11 Result of conventional stability analysis ($k_1 = 122.8$ MN/m, $\hat{k}_1 = \hat{k}_2 = 20.0$ MN/m, $c_1 = c_2 = 20.6$ kNs/m)

6. 結 言

遅れ時間が1回転周期および半回転周期となるモデルの代表である, 2自由度系および3自由度系を対象として, 新しい安定判別法を適用するとともに, 不安定振動の発生しにくい構造設計法を提案した. その結果, 新しい安定判別法は遅れ時間が半回転周期の場合にも適用でき, 遅れ時間によらず目的に応じた柔軟な構造設計が可能であることが確認された. 本手法は厳密で非常に高効率であるので, 遺伝的アルゴリズムをはじめとする種々の最適設計法と結びつけることで, より大規模な系の最適設計へと発展させることが期待できる. そこで, 次報ではより汎用的で大規模な系に対する最適設計法を定式化する予定である.

最後に, 本研究は独立行政法人日本学術振興会科学研究費 [基盤研究(B), 課題番号 17360108] の補助を受けたことを記し, 謝意を表する.

文 献

- (1) 例えば, 末岡淳男・劉 孝宏・近藤孝広・津田吉広・片山圭一・高崎勝明・山口正博・広岡秀樹, ゴム巻きロールの多角形化現象, 機論, 59-563, C(1993), 2078-2085.
- (2) 近藤孝広・宗和伸行, 接触回転系におけるパターン形成現象 (第1報, エネルギー指数を用いた簡易安定判別法と防止対策), 機論, 67-659, C(2001), 2121-2128.
- (3) 近藤孝広・宗和伸行, 接触回転系におけるパターン形成現象 (第2報, 簡易安定判別法による多自由度ロール系の設計法), 機論, 67-659, C(2001), 2129-2135.
- (4) 近藤孝広・宗和伸行・森博輝・崔 銘秀, 接触回転系におけるパターン形成現象に対する動吸振器の最適設計 (第1報, 1自由度系の場合), 機論, 71-704, C(2005), 1131-1138.
- (5) 長松昭男・ほか 8 名編, ダイナミクスハンドブック, (1993), 445, 朝倉書店.