動的飛び移りを伴う座屈後はりのカオス振動の数値解析* (初期軸圧縮変位の影響)

山口 誉 夫^{*1}, 酒 匂 淳 一^{*2}
永 井 健 一^{*1}, 丸 山 真 一^{*1}

Numerical Analysis for Chaotic Vibration of Post-Buckled Beam Including Dynamic Snap-Through (Influences of Initial Axial Displacements)

Takao YAMAGUCHI^{*3}, Jun-ichi SAKOH,
Ken-ichi NAGAI and Shin-ichi MARUYAMA

^{*3} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1 5 1 Tenjin cho, Kiryu shi, Gunma, 376-8515 Japan

For chaotic vibrations involving dynamic through generated in a post-buckled beam, influences of an axial displacement on dynamic properties in chaos are clarified by numerical analysis. Especially, the chaotic vibrations bifurcated from 1/2 subharmonic resonance are focused on. The beam is constrained by an axial elastic support and both ends of the beam are clamped. Applying Galerkin method to the basic equation of the buckled beam in consideration with geometric non-linearity, nonlinear cubic simultaneous equations in multi-degrees of freedom are reduced. Further, the equations are transformed into nonlinear ordinary differential equations using normal coordinates corresponding to linear natural modes. By integrating the equations numerically, time histories and Poincare sections are calculated. Moreover, Lyapunov dimension can be obtained using the evolution equations. According to the calculated results, initial axial displacements increase the number of governing modes in the chaos including dynamic snap-through.

Key Words: Chaos, Vibration of Continuous System, Computer Aided Analysis, Lyapunov Dimension

1. 緒言

極めて薄肉で矢高が低い曲率構造 (アーチ, シェル etc.) に大きな周期横荷重が作用するとカオス振動が発生することが知られている^{(1)~(18)}. 本報では, 初期軸圧縮変位を与えて座屈後変形状態とすることで曲率構造とした両端固定はりに, 大振幅周期加振を加えた. その条件下で発生する動的飛び移り現象を伴うカオス振動について数値解析を行い, カオス振動特性に及ぼす初期軸圧縮変位の影響の解明を行う.

過去にづぎのような研究が座屈後はりやアーチのカオス振動に関してなされている. 低次モードのカオス振動問題について Holmes⁽¹⁾ はアーチの理論解析を行い, Moon ら⁽²⁾⁽³⁾ は, 二個の磁石間を飛び移る片持ちはりの実験を行った. 磁石吸引片持ちはりについて Pezeshki と Dowell ら⁽⁴⁾ はカオス振動を多自由度近似で数値解析した. 著者らは両端を固定した座屈はり⁽⁶⁾, 集中質量を非対称位置に付加した座屈はり^{(7),(8)} の実験と理論解析を行い, 主なカオス振動が 1/2 次と 1/3 次の分次数調波共振から分岐することを示し, さらに集中質量の大きさがカオス振動特性に与える影響を

明らかにした. ついで, 変断面アーチ^{(9),(10)}と変断面座屈後はり⁽¹¹⁾の解析, 補強座屈はりの実験⁽¹²⁾を行い曲率, 断面形状, 減衰がカオス振動に及ぼす影響を解明した. Nayfeh らは座屈後はりで主共振および分次数調波共振から分岐したカオス振動を調べ多重尺度法による解析結果と比較している^{(13),(14)}. Tien ら⁽¹⁵⁾は 2 自由度系のアーチに関し, 内部共振に起因するカオス振動を扱っている. さらに著者らは変断面座屈後はりにおける 1 対 2 の内部共振によるカオス振動と動的飛び移りを伴うカオス振動が同時に発生した場合の連成現象を明らかにした⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾. ついで著者らは両端固定の座屈後はりの動的飛び移りを伴うカオス振動について, KL (Karhunen -Loève) 法⁽¹⁸⁾を用いて, 時系列波形の分散・共分散行列の固有値分解を行い, 内在する空間モードの同定と運動に対する各モードの寄与率解明を行った. しかし, 初期軸圧縮変位が, 動的飛び移りを伴うカオス振動におけるモード連成に与える影響は十分に解明されていない.

本報では, 数値解析により, 初期軸圧縮変位の大きさが, 動的飛び移りを伴うカオス振動特性へ与える影響を明らかにする. 特に, リアプノフ次元や最大リアプノフ指数, ボアンカレ写像図から, 初期軸圧縮変位が, カオス振動に内在する連成モードに及ぼす影響を調べた. 幾何学的非線形を考慮した基礎式にガラーキン法を適

* 原稿受付 2004 年 10 月 14 日.

^{*1} 正員, 群馬大学工学部 (〒376-8515 桐生市天神町 1 5-1).

^{*2} 群馬大学大学院機械システム工学専攻.

E-mail: yamagme4@me.gunma-u.ac.jp

Fig.1 Dynamic model and Coordinate System

用し、さらに線形固有振動形を標準座標とする非線形連立三次常微分方程式を導いた。ついで数値積分を行いカオス振動の時刻歴、ポアンカレ写像図を求めた。さらに発展方程式からリアプノフ次元を求めた。

2. 基礎式および解法

図1に示す軸弾性拘束を受ける両端固定はりを対象とする。自重が作用する条件のもとで、このはりに初期軸圧縮変位を加え座屈後変形状態とする。その後に周期横荷重を与える問題を取り扱う。

はりは長さ L 、密度 ρ 、断面積 A 、ヤング率 E 、断面二次モーメント I の一様断面はりとする。両端からばねに初期軸圧縮変位を与え、さらに、この系全体に一様な一定横方向加速度 a_s (ex. 重力加速度) を作用させ座屈後変形状態とする。これより、はりは曲率と矢高を有する形状となる。その後に周期横方向加速度 $a_d \cos \Omega t$ 、(Ω :加振角振動数) を作用させ加振する。これより、静的な分布荷重 $\rho A a_s$ (ex. 自重) と周期的な分布荷重 $\rho A a_d \cos \Omega t$ をはりに作用させる。初期たわみを $W_0(x)$ 、たわみを $W(x, t)$ 、軸方向変位を $U(x, t)$ 、初期の軸圧縮変位を U_c とすると無次元基礎式は次式となる。

$$w_{,\tau\tau} - n w_{,\xi\xi} + (w - w_0)_{,\xi\xi\xi\xi} - (p_s + p_d \cos \omega \tau) = 0 \quad (1)$$

$$n = \kappa \left[-u_c + \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{,\xi\xi}^2 - w_{0,\xi\xi}^2) d\xi \right]$$

n は無次元の軸力である。コンマの後の添字はそれに関する偏微分を示す。なお、次の無次元量を導入する。

$$\xi = x/L, [w, w_0] = [W, W_0]/r,$$

$$r = \sqrt{TI/A}, u_c = (L/r^2) U_c, n = \bar{N} L^2 / EI,$$

$$[p_s, p_d] = [a_s, a_d] (\rho AL) L^3 / EI r,$$

$$k = KL / EA, \kappa = [2k - 1 + 1]^{-1},$$

$$\Omega_0 = (1/L^2) \sqrt{EI/\rho A}, \tau = \Omega_0 t, \omega = \Omega / \Omega_0 \quad (2)$$

r は、はりの断面二次半径、 u_c は無次元の初期圧縮軸変位、 n は無次元の軸力である。 p_s, p_d は、はりに作用する静的分布荷重と動的分布荷重振動の無次元量を表す。 ω, τ は加振角振動数と時間の無次元量である。

永井の形状関数 $\zeta_j(\xi)$ を用いてたわみ w, w_0 を次式のように仮定する^{(19), (20), (8)~(11), (16)~(18)}。

$$[w, w_0] = \sum_j [b_j(\tau), a_j] \zeta_j(\xi), \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

ただし、

$$\zeta_j(\xi) = f(\xi) e_j(\xi),$$

$$f(\xi) = \sum_k c_k(\xi)^{k-1}, \quad e_j(\xi) = \cos(j-1)\pi\xi$$

a_j は初期たわみを表す既知定数、 $b_j(\tau)$ は未知の時間関数である。 $f(\xi)$ ははりに等分布荷重が作用する場合のたわみ形状に対応し、余弦関数 $e_j(\xi)$ は振動の高次モードをも考慮に入れたものである。上式を用いて基礎式に Galerkin 法を適用すると $\zeta_j(\xi)$ に関して次の条件式を得る。

$$\int_0^1 L(w) \zeta_i(\xi) d\xi = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

式(4)に式(3)を代入し積分を実行すると $b_j(\tau)$ に関するつぎの非線形常微分方程式を得る。

$$\sum_j B_{ij} b_{j,\tau\tau} + \sum_j C_{ij} b_j + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} b_j b_k b_l - F_i - (p_s + p_d \cos \omega \tau) G_i = 0, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots) \quad (5a)$$

上式の第一項は慣性項、第二項は線形復元力項、第三項は三次の非線形復元力項である。第四項は初期たわみの影響による定数項、第五項は外力項である。

まず、初期軸圧縮変位と自重による静的問題を解く。そのために式(5a)で慣性項、周期外力項 $p_d \cos \omega \tau$ を省略する。すなわち、外力として静的な分布荷重に関する項 p_s のみを残す。静的変形として $b_j = b_j^0$ とおくと b_j^0 に関するつぎの連立三次方程式を得る。

$$\sum_j C_{ij} b_j^0 + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} b_j^0 b_k^0 b_l^0 - F_i - p_s G_i = 0, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots) \quad (5b)$$

これをニュートンラプソン法を用いて解くことにより初期軸圧縮変位と静的な分布荷重による静たわみ w が式(3)を用いて定められる。

ついで、変形 b_j を静的な変形成分 b_j^0 と動的な変形成分 $\bar{b}_j(\tau)$ の和として $b_j = b_j^0 + \bar{b}_j(\tau)$ とおく。これを式(5b)に代入して整理すると、初期軸圧縮変位や自重により変形した静的な平衡位置からの変位 $\bar{b}_j(\tau)$ に関する振動方程式がつぎのように得られる。

$$\sum_j B_{ij} \bar{b}_{j,\tau\tau} + \sum_j \bar{C}_{ij} \bar{b}_j + \sum_j \sum_k \sum_l \bar{D}_{ijkl} \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l - (p_d \cos \omega \tau) G_i = 0, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots) \quad (5c)$$

ただし、

$$\bar{C}_{ij} = C_{ij} + \sum_k \sum_l (E_{ijkl} + E_{iklj} + E_{iljk}) b_k^0 b_l^0$$

$$\bar{D}_{ijk} = \sum_l (E_{ijkl} + E_{iklj} + E_{iljk}) b_l^0$$

なお、上式で静的な分布荷重に相当する項 p_s や定数項 F_i は、式(5b)の関係から消えている。

さらに非線形項と周期外力項を省略し、微小振幅自由振動に関する式が得られる。それより求められる固有振動数 ω_j と固有ベクトル ϕ_{pi} 、($p = 1, 2, 3, \dots$)から次の固有振動形 $\tilde{\zeta}_j$ が得られる。

$$\tilde{\zeta}_i(\xi) = (1/n_i) \sum_p \phi_{pi} \zeta_p(\xi), \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

n_i は振幅を基準化する任意定数である。固有振動形 $\tilde{\zeta}_i$ に基づく基準座標を $b_i^{(1)}$ としてたわみを次式で現す。

$$w = \sum_i b_i^{(1)} \tilde{\zeta}_i(\xi), \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (7)$$

基準座標 $b_i^{(1)}$ とその速度成分 $b_{i,\tau}^{(1)}=b_i^{(2)}$ を用い運動方程式(5c)を変換すると次の規準形非線形連立常微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} b_{i,\tau}^{(1)} &= b_i^{(2)}, \\ b_{i,\tau}^{(2)} &= -2\varepsilon_i \omega_i b_i^{(2)} - \omega_i^2 b_i^{(1)} - \sum_j \tilde{D}_{ijk} b_j^{(1)} b_k^{(1)} \\ &\quad - \sum_j \sum_l \tilde{E}_{ijkl} b_j^{(1)} b_k^{(1)} b_l^{(1)} + p_d \tilde{G}_i \cos \omega \tau, \\ (i, j, k, l &= 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ijk} &= \frac{n_i}{n} \frac{n_j}{n} \frac{n_k}{n} \sum_p \sum_q \tilde{D}_{pqk} \phi_{pi} \phi_{qj} \phi_{rk}, \\ \tilde{D}_{pqrs} &= \sum_i (E_{pqrs} + E_{prsq} + E_{psqr}) b_i^0, \\ \tilde{E}_{ijkl} &= \frac{n_i}{n} \frac{n_j}{n} \frac{n_k}{n} \frac{n_l}{n} \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s E_{pqrs} \phi_{pi} \phi_{qj} \phi_{rk} \phi_{sl}, \\ \tilde{G}_i &= n_i \sum_p \phi_{pi} G_p, \quad (p, q, r, s = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (9)$$

上式で線形減衰項を新たに導入してある。 ε_i は*i*次モードの減衰比である。

カオス振動は非定常なので解を求めるには直接積分が必要である。したがって、最大近似モード数 I_c のもとでRunge-Kutta-Gill法で式(8)を数値積分し、各モードの変位と速度に関する位相空間すなわち($I_c \times 2$)自由度でのカオス特性を求める。

振動系の応答に対し発展方程式の応答を求め、相互の距離の変化率を求め、リアプノフ指数とリアプノフ次元を得る。これより、カオス振動に寄与する自由度の数が推定できる⁽⁴⁾⁽¹⁷⁾。具体的な計算法をつぎに示す。

式(8)は $b_i^{(p)}$ 、($p = 1, 2$; $i = 1, 2, \dots, I_c$)に関する($I_c \times 2$)個の自由度を持つ相空間内での運動方程式に対応し、この式を数値積分して得られるカオス応答の解を($I_c \times 2$)個のベクトル $\mathbf{b}$ とし、基準軌道と定義する。基準軌道からの変分を $\delta \mathbf{b}$ とし $\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$ を近接軌道とする。式(8)の発展方程式として次式を得る。

$$\frac{d}{d\tau} \delta \mathbf{b}_r = \sum_s \bar{\Psi}_{rs} \delta \mathbf{b}_s, \quad (r, s = 1, 2, \dots, 2I_c) \quad (10)$$

上式で $\bar{\Psi}_{rs}$ は式(8)のヤコビ行列に対応する。任意の成分 $\delta \mathbf{b}_r$ に関し、微小時間 $\delta \tau$ 後の基準軌道と近接軌道との距離はつぎようになる。

$$e^{\lambda_r \delta \tau} = |\delta \mathbf{b}_r| / |\delta \mathbf{b}_{r0}| \quad (11)$$

$|\delta \mathbf{b}_{r0}|$ は初期値であり、単位長さとして仮定する。

一方、式(10)の $\bar{\Psi}_{rs}$ は連成項を有し、時間と共に変化する。つまり基準軌道 $\mathbf{b}_r$ の変化により、 $\delta \mathbf{b}_r$ の他の成分 $\delta \mathbf{b}_s$ 、($r \neq s$; $s = 1, 2, \dots, 2I_c$)も値を持つ。それゆえ、全成分の距離の変化率を考慮したノルムを用い、次式のリアプノフ指数 λ_r が求められる⁽²¹⁾。

$$\lambda_r = \frac{1}{\tau} \log_e \|\delta \mathbf{b}\| \quad (12)$$

ここで τ は十分に長い時間を考慮する。系は $2I_c$ 自由度を持つため、各成分 $\delta \mathbf{b}_r$ 、($r = 1, 2, \dots, 2I_c$)に対応したリアプノフ指数が $2I_c$ 個だけ得られる。カオス振動応答では基準軌道と近接軌道の距離が急激に伸長し

発散する場合があるので、数値積分の際に、一定時間間隔ごとに、近接軌道の初期値を単位長さに正規化して、距離の変化率を計算した。グラムシュミットの直交化を用いて、各成分間の直交性を維持している。

リアプノフ次元 d_L はKaplanとYorke⁽²²⁾の方法により λ_r から次式のように求められる。

$$d_L = s + \left[\sum_{r=1}^s \lambda_r \right] / |\lambda_{s+1}| \quad (13)$$

式(13)において、つぎの条件を満たす s を用いるものとする。

$$\sum_{r=1}^s \lambda_r > 0, \quad \sum_{r=s+1}^{2I_c} \lambda_r < 0 \quad (14)$$

ここで、リアプノフ指数 λ_r 、($r = 1, 2, \dots, 2I_c$)は大きさの順に再配列する。近似モード数 I_c を式(10)で順次増加させ、リアプノフ次元 d_L を計算する。 d_L の値が収束する I_c によりカオス応答に支配的なモードの数が評価できる^{(4), (8)~(11), (16), (17)}。

3. 計算結果

式(1)~(14)を用いて、はりのカオス振動に内在する空間モードを解析する。はりの断面は長方形で幅 b と厚さ h は一定とする。初期たわみは一項近似とし $\alpha_1 = 10$ 、($\xi = 0.5$ の位置で $w_0 = 10$)を与えた。弾性拘束ばね定数 $k = 0.02$ 、自重による静的分布荷重は $p_s = 288$ とした。

3.1 はりの復元力特性 図2(a)に自重が作用する条件下で、初期軸圧縮変位 u_c を与え座屈後変形状態となった場合の、はりの変形分布を示す。縦軸は静たわみ W/h 、(h :板厚)、横軸は、はりの無次元座標 ξ である。初期軸圧縮変位 u_c を4700, 5200, 6500と変化させた。図2(a)のように、本条件下での座屈後変形状態では、曲率を有する下凸の偏平アーチのような形状になる。また、初期軸圧縮変位 u_c が大きいほど、曲率構造の矢高が高くなるのがわかる。これより、初期軸圧縮変位 u_c の影響は偏平アーチの曲率(矢高)の影響と類似したものになることが予想される。つぎに初期軸圧縮変位 u_c を与えたはりに、静的分布荷重を変化させて作用させ、復元力特性を求めた。初期軸圧縮変位 u_c を4700, 5200, 6500と変化させた計算結果を図2(b)に示す。縦軸は無次元分布静荷重 p_s 、横軸は観測位置 $\xi = 0.3$ における静たわみ W/h 、(h :板厚)である。

いずれの初期軸圧縮変位 u_c のもとでも負の勾配を含む漸軟-漸硬形の復元力特性を示す。 u_c が大きい条件ほど座屈荷重は大きく負の勾配が急峻となる。ここで復元力特性における負の勾配は、飛び移る際の負のばね定数に対応し、これに基づく力により、はりは飛び移る際に安定な静的平衡点に向かって、加速される。すなわち、負の勾配が大きいほど、飛び移る際に、はりは強く加速されることになる。加速されたはりが、安定な静的平衡点に移る際に急激に減速されるために衝撃を受け過渡応答が現れる。準静的に、はりに作用させる荷重をゆっくりと変化させた条件で、著者らの過去の実験

や数値解析においても、この現象は観測されている。なお、図2(b)は、静的な解析で得られる復元力特性であるために、過渡成分は含まれていない。図2(b)は、過渡成分が減衰し、静止した後の変形状態を示している。

以上から、初期軸圧縮変位 u_c が大きいほど、負の勾配が大きくなり、飛び移り現象が発生した時に強く加速され、安定な静的平衡点に移った時の衝撃は大きいと考えられる。過去に著者らは、偏平アーチにおけるカオス振動への曲率(矢高)の影響について、矢高が高い(曲率が大きい)ほど飛び移りの際の衝撃が増し、カオス振動に内在するモードが増すことを報告している⁽⁹⁾。これと類似した結果が本問題でも得られることが予想される。

3.2 線形固有振動数と振動形

初期軸圧縮変位 u_c を4700, 5200, 6500と変化させた場合の線形固有振動形と線形固有振動数の計算結果を図3に示す。低次モードでは初期軸圧縮変位 u_c が大きいほど座屈変形後の矢高が高くなり、剛性が増し固有振動数が高くなる。最低次でその影響が顕著である。線形固有振動形の初期軸圧縮変位 u_c による変化は本計算範囲ではほとんど無い。

3.3 共振応答

非定常となるカオス振動応答を求める前に、系の全体的な性質を調べるために定常応答を求めた。初期軸圧縮変位 u_c を変化させた場合の定常応答の概要の計算結果を図4に示す。これらは式(8)に調和バランス法を適用して求めた。縦軸は軸は観測位置 $\xi=0.3$ におけるたわみの無次元実効値 $(W/h)_{rms}$ 、横軸は無次元加振振動数 ω である。図中、記号 (i, j) で共振応答を分類した。 i は励起される第 i 次の振動形であり、 j は共振応答の種類で $j=1$ は主共振、 $j=1/2$ は $1/2$ 分数次調波共振応答である。図中の1次振動形の共振応答は、主共振、 $1/2$ 分数次調波共振と

Fig.2(a) Restoring force of post-buckled beam

Fig.2(b) Restoring force of post-buckled beam

Fig.3 Eigenmodes of post-buckled beam

Fig 4 Nonlinear frequency Response Curves of the chaotic vibration

もに、いずれも漸軟漸硬形となっている。著者らの過去の実験結果および理論解析結果から、初期軸圧縮変位 u_c による座屈後では動的飛び移りに起因して発生するカオス振動は $1/2$ 分数次調波共振応答の近傍と $1/3$ 分数次調波共振応答の近傍であることが分かっている^{(7), (8), (11), (16), (17), (18)}。本論文では $1/2$ 分数次調波共振応答から分岐するカオス振動に着目することとし、

Fig.5 Time history and Fourier spectrum of the chaotic vibration

Fig.6 Time history and Fourier spectrum of the chaotic vibration

図の斜線で示す振動数領域 ($31.50 \leq \omega \leq 37.90$) で、次項の数値積分によるカオス振動の検出を行う。

3.4 カオス振動の分析 加振条件として動的荷重振幅は $p_d = 6000$ とした。観測位置は $\xi = 0.3$ 、減衰比は $\varepsilon_i = 0.005$ ($i = 1 \sim 5$) とし、時間刻みは加振周期 $T_c = 2\pi/\omega$ の $1/240$ とした。数値積分に伴う過渡応答成分が十分に減衰する時間 $1000T_c$ より大きい約 $5300T_c$ 以後の時間波形を結果として用いた。1/2 分数次調波共振応答から分岐し、動的飛び移りを伴うカオス振動を対象とした。対象とする条件で発生したカオス振動の時間波形と周波数分析結果の例を図5に示す。初期軸圧縮変位 $u_c = 4700$ での結果である。時間波形の縦軸ははりの無次元たわみ W/h (h : 板厚)、横軸は加振力の周期 T_c を基準とした周期数 τ/T_c である。図5(左)の時間波形から加振波形は単一角周波数 ω の余弦波にもかかわらず振動応答は非周期となっている。この時の最大リアプノフ指数 λ は正値 2.8 をとっており、この非周期応答がカオス振動と確定できている。周波数分析の図5(右)より加振振動数 ω のみならず多くの振動数成分がスペクトルに現れており典型的なカオス振動の特徴を示す。図6に初期軸圧縮変位 $u_c = 6500$ の条件下におけるカオス振動の時間波形と周波数分析結果の例を示す。図5と同様に非周期の時間波形で、無数のスペクトルとなっており、さらに最大リアプノフ指数 λ が正値 4.4 であることからカオス振動である。図5および図6のスペクトルを見ると、ともに加振振動数 ω の $1/2$ の振動数 $\omega/2$ に最大ピークがある。これよりこれらのカオス振動が 1/2 分数次調波共振応答から分岐したと判別できる。

近似モード I_c を変化させリアプノフ次元 d_L を求めた。ここでも 1/2 分数次調波共振応答から分岐し、動的飛び移りを伴うカオス振動のみを対象とした。 d_L に収束する I_c の値を求め、カオス振動に寄与するモード数を求めた。具体的には、加振振動数 ω の範囲を $31.50 \leq \omega \leq 37.90$ とし、その範囲内で加振振動数を 0.1 ピッチずつ変化させ、リアプノフ次元 d_L を求めた。図7に近似モード数 $I_c = 5$ の場合の計算例を示す。対象周波数領域でカオス振動が発現した条件の次元 d_L についてのみを I_c ごとに平均しまとめた結果を図8に示す。

Fig.7 Lyspunov dimension of post-buckled beam

Fig.8 Lyspunov dimension of post-buckled beam

Fig.9 Poincare sections of chaotic vibration

縦軸はリアプノフ次元 d_L 、横軸は近似モード数 I_c である。図より、初期軸圧縮変位 u_c が大きい条件 $u_c=6500$ の d_L は I_c が5で $d_L=7.8$ 程度の値に収束する。一方、 u_c が小さい条件 $u_c=4700$ の d_L は I_c が3ないし4程度で $d_L=6.3$ 程度の値に収束し、カオス振動に支配的なモード数が少なくフラクタル次元も低いことがわかる。これは u_c が大きいほど座屈後変形の矢高が高くなり、飛び移りの際の負の復元力が増し、強く加速されるために、飛び移りの際の衝撃が大きく、より多くのモードがカオス振動に内在するためと考えられる。先に復元力特性のところでも述べたが、偏平アーチについて、矢高が高い(曲率大きい)ほど飛び移りの際の衝撃が増し、カオス振動に内在するモードが増すことを過去に著者らは報告しているが⁽⁹⁾、これと類似した結果となった。

図9にカオス振動が発生する条件でのポアンカレ写像図(縦軸:無次元速度 $(W/h)_{\text{max}}$ 、横軸:無次元たわみ W/h)を示す。加振振幅の最大値を基準とする位相角 $\theta=180$ 度で4000点データを取った。初期軸圧縮変位 u_c が大きい条件 $u_c=6500$ のほうに $u_c=4700$ よりも像が不鮮明となっている。これも u_c が大きいほど飛び移りの際の衝撃が大きく、より多くのモードがカオス振動に内在するためと考えられる。

参考のために、カオス振動発生時の飛び移りの回数を調べた。十分に時間経過後(10404 T_e 後、 T_e :加振周期)の一定時間間隔(333 T_e)における動的飛び移りの回数を調べた。その結果、 $u_c=6200$ 、($\omega=35.80$, $I_c=5$)の時は116回、 $u_c=4700$ 、($\omega=33.40$, $I_c=5$)の時は120回となった。すなわち、 u_c の大きさにより、飛び移りの回数に大きな差は認められなかった。

4. 結 言

初期軸圧縮変位を与えて座屈後変形状態とすることで曲率構造とした両端固定はりに、大振幅周期加振を加えた。その条件下で発生する動的飛び移り現象を伴うカオス振動について数値解析を行った。幾何学的非線形を考慮した基礎式にガラーキン法を適用し、さらに線形固有振動形を規準座標とする非線形連立三次常微分方程式を導いた。ついで数値積分を行いカオス振動の時刻歴、ポアンカレ写像図を求めた。さらに発展方程式からリアプノフ次元を求めた。軸圧縮変位の大きさがカオス振動特性(ポアンカレ写像、リアプノフ次元)へ与える影響を調べた。

初期軸圧縮変位を増すと座屈後はりの動的飛び移りを含むカオス振動のリアプノフ次元は増し、カオス振動に内在するモード数が増えポアンカレ写像図は不鮮明となる。

参 考 文 献

(1) Holmes, P. J., *Philos. Trans. of Royal Soc. London, A*, 292 (1979), 419-448.

(2) Moon, F. C., *ASME J. Appl. Mech.*, 47 (1980), 638-644.
 (3) Moon, F. C. and Holmes, P. J., *J. Sound Vib.*, 65-2 (1979), 275-296.
 (4) Pezeshki, C. and Dowell, E. H., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 24-2 (1989), 79-97.
 (5) 永井健一, 山口蒼夫, 谷藤克也, 楊平, 機論, 60-569C (1994), 3-9.
 (6) 永井健一, 機論, 56-525C (1990), 1171-1177.
 (7) 永井健一, 山口蒼夫, 機論 60-579C (1994), 3733-3740.
 (8) 山口蒼夫, 永井健一, 機論 60-579C (1994), 3741-3748.
 (9) 山口蒼夫, 永井健一, 機論, 61-583C (1995), 799-807.
 (10) 永井健一, 大山貞夫, 山口蒼夫, 機論, 64-624C (1998), 2816-2823.
 (11) 永井健一, 山口蒼夫, 機論, 61-586C (1995), 2202-2209.
 (12) Nagai, K., Kasuga, K., Kamada, M., Yamaguchi, T. and Tanifuji, K., *JSME Int. J. Series C*, 41-3 (1998), 563-569.
 (13) Eman, S. A. and Nayfeh, A. H., *Nonlinear Dyn.* 35-1 (2004), 1-17.
 (14) Eman, S. A. and Nayfeh, A. H., *Nonlinear Dyn.* 35-2 (2004), 105-122.
 (15) Tien, W. M., Namachchivaya, N. S. and Malhotra, N., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 29-3 (1994), 367-386.
 (16) 山口蒼夫, 永井健一, 鈴木央, 機論, 66-652C (2000), 3820-3827.
 (17) 永井健一, 鈴木央, 山口蒼夫, 丸山真一, 機論 69-679C (2003), 565-572.
 (18) 山口蒼夫, 永井健一, 丸山真一, 機論 69-687C (2003), 2937-2942.
 (19) 永井健一, 長屋幸助, 武田定彦, 荒井徳幸, 機論, 54-497C (1988), 39-46.
 (20) 永井健一, 荒井徳幸, 長屋幸助, 武田定彦, 機論, 55-516C (1989), 1941-1947.
 (21) Wolf, A., Swift, J. B., Swinny, H. L. and Vastano, J. A., *Physica* 16D (1985), 285-317.
 (22) Kaplan, J. and Yorke, J., *J. Diff. Eqs.* 49 (1983), 185-207.