磁気力アクチュエータの周波数特性に対する一考察*

深 田

悟*¹

An Analysis of Frequency Characteristics of Magnetic Actuators

Satoru FUKATA*²*² Faculty of Design, Kyushu University,
4-9-1 Shiobaru, Minami ku, Fukuoka shi, Fukuoka, 815 8540 Japan

Frequency characteristics of magnetic flux in magnetic actuators are analyzed through a one dimensional model. The subject is formulated as the flux penetration into the iron core from the pole face for a given magnetomotive force. First, the two-dimensional distribution of the magnetic intensity is obtained. The numerical results check the effect of the distribution near the pole faces and the magnetic-flux concentration near the surface of iron core. The results also show the effectiveness of a simple model without the pole-face effect, presented before, in higher frequencies and/or longer iron cores. Next, the simple model is used to examine the effect of magnetic saturation. The numerical result shows the degeneration of the magnetic flux higher than that in the case without saturation. This coincides with the difference between an experiment and a model, and suggests that the modeling should consider the effects of magnetic flux saturation.

Key Words: Actuator, Electromagnetic Actuator, Modeling, Magnetic Actuator, Magnetic Flux, Frequency Characteristics, One-dimensional Model, Magnetic Saturation

1 ま え が き

ソリッド鉄心磁気力アクチュエータの周波数特性は非常に複雑で発生磁束のモデリングが容易ではない。Feeley⁽¹⁾は、電磁石コイルが鉄心全体に様に巻かれて、鉄心方向に磁界の変化はないなどの仮定もとで、簡単な一次元モデリングを周波数領域で検討した。また、著者はそれを空隙部を持つ電磁石に適用して、簡単な二次元モデルを提案した⁽²⁾。しかしながら、実測値との照合では、中高周波数域での一致度が良くなかった。これを改善すべく、漏れ磁束や磁極の縁効果を考慮したモデリングが試みられたが、満足なモデルには達していない⁽³⁾。

本稿ではモデルの改善を図るために、先のモデルが実測値と一致しない原因を探究する。鉄心に様にコイルが巻かれているという条件に基づいた、鉄心の表面で磁界の強さが与えられるという従来の定式化から離れて、空隙部から鉄心への磁束の浸入問題⁽⁴⁾として検討する。簡単のために、鉄心の厚さが幅に比べて無

視できる一次元鉄心を取り上げる。最初に、鉄心両端の磁極面に垂直に様な磁界分布が与えられたとき、鉄心内部の磁界の分布を求める。そして、その計算例から、鉄心の長さ方向の表面近くでは磁界の強さが非常に大きくなり得ることを示す。このことから、表面近くでは磁束の飽和が起きやすいという推論を得る。

次に、鉄心を厚さ方向に細分割して透磁率変化の取り扱いを可能にし、各部に簡単な一次元モデルを適用して、磁束の周波数特性を計算する。その結果を磁束飽和無しのモデルの結果と比較する。そして、その差違が過去のモデルと実測値との差違をよく説明することを確認する。

鉄心表面付近の磁束分布を計測することが容易でないで、ここでは計算上での検討に止める。

記 号

 b : 鉄心の厚さ $j = \sqrt{-1}$: 虚数単位 F_m : 起磁力 $\bar{F}_m = \bar{F}_m(s)$: F_m のラプラス変換 (以下同様) l : 鉄心の長さ l_0 : 空隙部の距離

* 原稿受付 2004年10月18日。

*¹ 正員, 九州大学芸術工学研究院(〒815-8540 福岡市南区塩原4-9-1)。

E-mail: fukata@design.kyushu-u.ac.jp

H_{c0} : 鉄心磁極面の磁界の強さ

H_0 : 空隙部の磁界の強さ

H_y : 鉄心の厚さ方向の磁界の分布

H_z : 鉄心の長さ方向の磁界の分布

$p_n = \frac{2n\pi}{b}$: パラメタ

s : ラプラス演算子

y : 鉄心の厚さ方向の座標

z : 鉄心の長さ方向の座標

$\alpha^2 = \mu\sigma$

$\beta_n^2 = \alpha^2 + p_n^2$

μ : 鉄心の透磁率

μ_0 : 鉄心の基準透磁率

$\mu_r = \mu_0 / \mu_0$: 鉄心の基準比透磁率

μ_0 : 真空の透磁率 ($4\pi \times 10^{-7}$ H/m)

σ : 鉄心の導電率

2 鉄心の一次元モデル

図1は電磁石アクチュエータを単純化して示したものである。U字形の固定子にコイルが巻かれ、コイル電流を変化させて磁力を制御し、可動子との距離を制御するなどのために用いられる。このとき、増分磁束の周波数特性がその動特性を決定づける。可動子との距離(空隙長)が変化すると特性が変わるので、線形なモデリングでは、空隙長を固定してコイル電流を変化させる場合と、コイル電流を固定して空隙長を変化させる場合とを加え合わせるのが普通であろう。前者の場合がよく取り上げられるのは、電磁石の場合にはそれが支配的で、また、実験による検証が容易であることによると見られる。

空隙長が変化する場合には、それと起磁力変動との関係式を与えることができれば、空隙長を基準値に固定して、空隙長の変化が十分に小さいときのモデリングが可能である。永久磁石を用いたアクチュエータではこの場合が一般的であろう。

このように、いずれの場合でも、鉄心と空隙部とからなる磁気回路系で起磁力が変化する問題として統一に取り扱うことができると考えられる。

2.1 一次元鉄心の基礎式

解析の簡単化のために、鉄心を直方体で単純化し、幅を無限大、厚さを b 、長さを l とした一次元鉄心とする。図2のように鉄心の両端に垂直に一樣な磁界の強さ H_{c0} が与えられた場合に、磁界の分布を考える。鉄心の中心部に原点を置き、厚さ方向を y 軸、長さ方向を z 軸とする座標系を選ぶ(x 軸方向に無限幅)。このとき、磁界の分布は z 軸方向では z と y について偶関数であり、また、 y 軸方向では y と z について奇関数で、鉄心の表面で

Fig. 1 Configuration of electromagnetic actuator.

Fig. 2 Coordinate system in iron core.

ゼロであると予想される。ここでは、電磁石コイル系の動特性については問題にしない。

以下の仮定を置く。

- (1) 鉄心の磁気定数は等方、一樣で一定である。
- (2) 磁束の漏れは無い。
- (3) 磁極の縁効果を見捨てる。
- (4) 空隙部で磁束の分布は一樣である。

上の仮定(1)の下で、鉄心内の磁界の関係式と磁束の連続の式は、マクスウェルの電磁界の式から次のように表される^{(5),(6)}。

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

ただし、

$$H_z = H_z(y, z), \quad H_y = H_y(y, z)$$

このとき、境界条件は次のように与えられる。

$$H_z\left(y, \pm \frac{l}{2}\right) = H_{c0} \quad (4)$$

$$H_y\left(\pm \frac{b}{2}, z\right) = 0 \quad (5)$$

また、仮定(2)から磁束の連続性として次の制約条件を与える。

$$\int_{-b/2}^{b/2} H_z(y, z) dy = H_{c0} b \quad (6)$$

以降の取り扱いでは、 $H_z = H_{c0} e^{j\omega t}$ などにおいて、周波数 ω に対する関数として処理する手法が多いが、ここでは、ラプラス変換表示を用いることにする。以上の式を初期値ゼロでラプラス変換すると、以下の式が得られる。

磁界の関係式

$$\frac{\partial^2 \bar{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}_z}{\partial z^2} = \alpha^2 \bar{H}_z \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{H}_y}{\partial z^2} = \alpha^2 \bar{H}_y \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

ここで、

$$\alpha^2 = \mu \sigma s \quad (10)$$

境界条件

$$\bar{H}_z \left(y, \pm \frac{l}{2} \right) = \bar{H}_{c0} \quad (11)$$

$$\bar{H}_y \left(\pm \frac{b}{2}, z \right) = 0 \quad (12)$$

制約条件

$$\int_{-b/2}^{b/2} \bar{H}_z(y, z) dy = \bar{H}_{c0} b \quad (13)$$

ここで、例えば $\bar{H}_z = \bar{H}_z(y, z)$ は $H_z(y, z)$ のラプラス変換を表す。ラプラス演算子 s は簡単のために省略する。

2.2 求 解 式(7)の一般解は、 y と z について偶関数であることを考慮して、次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{H}_z &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n} \cos(p_n y) \cosh(\beta_n z) \\ &+ c_{10} \cosh(\alpha z) + c_{20} \cosh(\alpha y) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} \cosh(\gamma_m y) \cos(q_m z) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$$\beta_n^2 = \alpha^2 + p_n^2, \quad \gamma_m^2 = \alpha^2 + q_m^2 \quad (15)$$

また、 p_n と q_m はパラメタ、 c_{10} 、 c_{1n} 、 c_{20} と c_{2m} は任意定数である。

また、 $\bar{H}_y$ については、式(14)を式(9)を用いて解き、任意関数を式(8)から定めると、 z について奇関数であることを考慮して、次のように表される。

$$\bar{H}_y = \sum_{n=1}^{\infty} d_{1n} \sin(p_n y) \sinh(\beta_n z)$$

$$\begin{aligned} &+ (d_1 y + d_2) \sinh(\alpha z) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} d_{2m} \sinh(\gamma_m y) \sin(q_m z) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、

$$\begin{aligned} d_{1n} &= -\frac{\beta_n}{p_n} c_{1n} \quad (p_n \neq 0), \quad d_{2m} = \frac{q_m}{\gamma_m} c_{2m}, \\ d_1 &= -c_{10} \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

また、 d_2 は任意定数である。

まず、式(16)に境界条件式(12)を適用する。このとき、パラメタを

$$p_n = \frac{2n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

で与えると次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{H}_y \left(\pm \frac{b}{2}, z \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} d_{2m} \sinh \left(\gamma_m \frac{b}{2} \right) \sin(q_m z) \\ &+ \left(d_1 \frac{b}{2} \pm d_2 \right) \sinh(\alpha z) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

次に、式(14)に境界条件式(11)を課すと

$$\begin{aligned} \bar{H}_z \left(y, \pm \frac{l}{2} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n} \cos(p_n y) \cosh \left(\beta_n \frac{l}{2} \right) \\ &+ c_{10} \cosh \left(\alpha \frac{l}{2} \right) + c_{20} \cosh(\alpha y) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} \cosh(\gamma_m y) \cos \left(q_m \frac{l}{2} \right) = \bar{H}_{c0} \end{aligned} \quad (20)$$

また、制約条件式(13)に式(18)を用いると次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} &c_{10} b \cosh(\alpha z) + c_{20} \frac{2}{\alpha} \sinh \left(\alpha \frac{b}{2} \right) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} 2 \frac{c_{2m}}{\gamma_m} \sinh \left(\gamma_m \frac{b}{2} \right) \cos(q_m z) = \bar{H}_{c0} b \end{aligned} \quad (21)$$

このとき、問題は式(19)～(21)を同時に持たす定数を求めることになる。式(19)は $d_1 = 0$ 、 $d_2 = 0$ 、 $d_{2m} = 0$ のとき満たされる。このとき、 $c_{10} = 0$ 、 $c_{2m} = 0$ を式(21)に代入して

$$c_{20} = \frac{\alpha b/2}{\sinh(\alpha b/2)} \bar{H}_{c0} \quad (22)$$

また、式(20)は次のように簡単化される。

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} c_{1n} \cos(p_n y) \cosh \left(\beta_n \frac{l}{2} \right) \\ &+ c_{20} \cosh(\alpha y) = \bar{H}_{c0} \end{aligned} \quad (23)$$

上式の両辺に $\cos(p_n y)$ を乗じて $-b/2 \sim b/2$ で積分して、直交関数系の性質を用いると c_{1n} について次式

を得る.

$$c_{ln} = (-1)^n \frac{2\alpha^2}{\beta_n^2} \frac{1}{\cosh(\beta_n l/2)} \bar{H}_{c0} \quad (24)$$

このとき、次の関係を用いた.

$$\begin{aligned} I_{cc}(p_n, b) &= \int_{-b/2}^{b/2} \cosh(\alpha y) \cos(p_n y) dy \\ &= (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 + p_n^2} \sinh\left(\alpha \frac{b}{2}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

以上の結果から式(14)は次のようになる.

$$\begin{aligned} \bar{h}_z &= \frac{\bar{H}_z}{\bar{H}_{c0}} = \frac{\alpha b/2}{\sinh(\alpha b/2)} \cosh(\alpha y) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha^2}{\beta_n^2} \cos(p_n y) \frac{\cosh(\beta_n z)}{\cosh(\beta_n l/2)} \end{aligned} \quad (26)$$

上式はフーリエ級数展開

$$\begin{aligned} &\frac{\cosh(\alpha y)}{\sinh(\alpha b/2)} \\ &= \frac{2}{\alpha b} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha^2}{\beta_n^2} \cos(p_n y) \right], \\ &\quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (27)$$

を用いると次のようにも書ける.

$$\begin{aligned} \bar{h}_z &= 1 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\beta_n^2} \cos(p_n y) \left[1 - \frac{\cosh(\beta_n z)}{\cosh(\beta_n l/2)} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

このとき、式(16)は次式になる.

$$\begin{aligned} \bar{h}_y &= \frac{\bar{H}_y}{\bar{H}_{c0}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha^2}{p_n \beta_n} \sin(p_n y) \frac{\sinh(\beta_n z)}{\cosh(\beta_n l/2)} \end{aligned} \quad (29)$$

式(28)と(29)は条件式(11)～(13)を確かに満たしている. 式(28)は第1項の“1”で磁束の連続性と端面の境界条件の両方を確保した形になっている. 一方、式(26)の表示形は第1項が1次元問題に対する端面効果の無い解⁽⁶⁾になっており、この項で磁束の連続性を確保し、第2項で端面の効果を加える形になっている.

3 磁界の分布と磁気抵抗

3.1 磁気抵抗 鉄心を磁気回路の一部と見なす

と磁気抵抗が定義される. 鉄心の両端間の起磁力を $\bar{F}_m$ とすると、鉄心の表面に沿った磁路に対して次式が得られる.

$$\int_{l/2}^{l/2} \bar{H}_z \left(\pm \frac{b}{2}, z \right) dz = \bar{F}_m \quad (30)$$

上式に式(26)を代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \bar{r}_m &= \frac{\bar{F}_m}{\bar{H}_{c0} l} \\ &= \frac{\alpha b/2}{\tanh(\alpha b/2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{\beta_n^2} \frac{\tanh(\beta_n l/2)}{\beta_n l/2} \end{aligned} \quad (31)$$

鉄心の磁気抵抗を $\bar{R}_m$ 、磁束を Φ とすると磁気抵抗は次式のように表される.

$$\bar{R}_m = \frac{\bar{F}_m}{\Phi} = \frac{\bar{F}_m}{\mu b \bar{H}_{c0}} \quad (32)$$

ここで、 μ は透磁率である. したがって、式(31)は磁気抵抗の静的な値に対する比を表すものである. すなわち、

$$\bar{r}_m = \frac{\bar{R}_m}{R_{m0}}, \quad R_{m0} = \frac{l}{\mu b} \quad (33)$$

式(31)で第2項は磁極端面の効果である. この項は極低周波数域では無視でき、高周波数域でも小さくなる. 極低周波数域では表皮効果が小さく磁束は鉄心全体に分布するためであり、高周波数域では端面部でも表皮効果が大きくなって磁界が垂直に浸入しにくくなるためであると理解される. また、後に計算例が示すように、端面効果の影響度合いは鉄心が長くなるにつれて小さくなる.

3.2 無次元量表示 計算結果に汎用性を持たせるために、次のようにラプラス演算子を置き換え、また無次元量を用いる.

$$u = \mu \sigma \left(\frac{b}{2} \right)^2 s \quad (34)$$

$$\bar{y} = 2 \frac{y}{b}, \quad \bar{z} = 2 \frac{z}{l}, \quad \bar{l} = \frac{l}{b} \quad (35)$$

このとき、式(28)、(29)と(31)は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \bar{h}_z &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2u}{u + (n\pi)^2} \cos(n\pi \bar{y}) \\ &\cdot \left[1 - \frac{\cosh \left(\sqrt{u + (n\pi)^2} \bar{l} \bar{z} \right)}{\cosh \left(\sqrt{u + (n\pi)^2} \bar{l} \right)} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_y &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2u}{n\pi \sqrt{u + (n\pi)^2}} \sin(n\pi \bar{y}) \\ &\cdot \frac{\sinh \left(\sqrt{u + (n\pi)^2} \bar{l} \bar{z} \right)}{\cosh \left(\sqrt{u + (n\pi)^2} \bar{l} \right)} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\bar{r}_m = \bar{r}_{m1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{u + (n\pi)^2} \frac{\tanh\left(\sqrt{u + (n\pi)^2} \bar{l}\right)}{\sqrt{u + (n\pi)^2} \bar{l}},$$

$$\bar{r}_{m1} = \frac{\sqrt{u}}{\tanh \sqrt{u}} \quad (38)$$

3.3 計算例 以下で $u = \bar{f}\bar{\omega}$ とおいた計算値は、式(34)から、具体的には次式の周波数 ω に相当する。

$$\omega = \frac{1}{\mu\sigma} \left(\frac{2}{b}\right)^2 \bar{\omega} \quad (39)$$

たとえば、 $\mu_r = 5000\mu_0$ 、 $\sigma = 1.0 \times 10^7 \text{ } (\Omega \cdot \text{m})$ のとき、鉄心厚さが10mm, 20mmの場合にはそれぞれ0.64倍 ($\omega = 0.64\bar{\omega}$)、0.16倍の周波数に相当する。

3.3.1 磁界の分布 磁界の分布式(36)と(37)は境界の磁界の強さとの間の伝達関数を表す。そして、 $u = j2\pi\bar{f}$ とおいた計算値(複素数)の絶対値と偏角は、鉄心端面の磁界の強さが周波数 $\bar{f}$ の正弦波状に変化するとき、鉄心内に発生する磁界の定常応答の振幅比と位相差を与える。各点の磁界の強さの大きさ、

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_z^2}$$

に等高線を引いた結果を、長さ幅比 $l/b = 0.5, 2$ について、周波数 $\bar{f} = 10 \text{ Hz}$ と 100 Hz の場合にそれぞれ

Fig. 3 Contours of constant magnetic intensity at 10Hz without saturation.

Upper: $l/b = 0.5$, Lower: $l/b = 2$

図3と図4に示す。磁界の強さは鉄心の中心部の表面で、端面の強さに比べて、 $\bar{f} = 10 \text{ Hz}$ のとき約8倍、 $\bar{f} = 100 \text{ Hz}$ で約24倍にもなっている。これらの結果は、(1)周波数が高くなると、磁界が鉄心の表面近くで強くなり、内部で弱くなること、(2)鉄心表面の磁界の強さは周波数が増すにつれて、また長さが増えるにつれてほぼ一様に広がっていき、端面の影響が小さくなっていくこと、の様子をよく表していると見られる。

周波数が高くなるにつれて表面の磁界が強くなっていくのは、入ってくる磁束を通すために、狭くなっていく有効磁路の深さを補うためであると理解できる。このようにして表面近くに磁束が集まってくると磁束飽和が起き易くになると考えられる。

3.3.2 磁気抵抗 磁気抵抗に及ぼす端面の影響を見るために、 $l/b = 0.5, 1, 2, 10$ について、式(38)の計算結果を r_m / r_{m1} の比で示したものを図5に示す。この結果は磁界の分布の計算例から予測したことを裏付けている。

以上の計算例は、鉄心が十分に長く周波数が高い場合には、磁界の分布と磁気抵抗は、磁極面近傍の磁界の分布を無視して、次の一次元モデル^{(1),(7)}で近似できることを示す。

Fig. 4 Contours of constant magnetic intensity at 100Hz without saturation.

Upper: $l/b = 0.5$, Lower: $l/b = 2$

Fig. 5 Frequency characteristics of relative magnetic reluctance, r_m/r_{m1} in eq. (38).

$$\bar{H}_z = \bar{H}_{c1} \frac{\cosh(\alpha y)}{\cosh(\alpha b/2)} \quad (40)$$

$$\bar{R}_m = \frac{l}{\mu b} \frac{ab/2}{\tanh(\alpha b/2)} \quad (41)$$

ここで、 $\bar{H}_{c1}$ は鉄心表面の磁界の強さである。

4 空隙を含む磁気回路系

アクチュエータの磁気回路系を、鉄心の両端が空隙部で挟まれた、直方形の空隙部と直方体鉄心の直列接続として簡単化する。鉄心の長さは厚さに比べて十分に長く、また、周波数も十分に高いとする。

空隙部の全長を l_0 として、全体に起磁力 $\bar{F}_m$ を与えると、磁極面の効果を見捨て、鉄心の表面を通る磁路に対して次の関係がある。

$$\bar{H}_0 l_0 + \bar{H}_{c1} l = \bar{F}_m \quad (42)$$

ここで、 $\bar{H}_0$ は空隙部の磁界の強さである。その分布は一様であると仮定すると、空隙部を通る磁束は次式で表される。

$$\Phi_0 = \mu_0 \bar{H}_0 b \quad (43)$$

4.1 透磁率一定の場合 鉄心内の磁界の強さを式(40)で近似すると、鉄心を通る磁束は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \Phi_c &= \int_{-b/2}^{b/2} \mu \bar{H}_z dy \\ &= \mu_0 \bar{H}_{c1} b \frac{\tanh(\alpha b/2)}{\alpha b/2} \end{aligned} \quad (44)$$

上式を式(43)と等しく置くと次の関係が得られる。

$$\bar{H}_{c1} = \frac{\mu_0}{\mu_{c0}} \frac{ab/2}{\tanh(\alpha b/2)} \bar{H}_0 \quad (45)$$

これを式(42)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\bar{H}_0}{\bar{F}_m} &= \frac{1}{1 + \bar{r}_{m0}} \cdot \frac{1}{l_0} \\ \bar{r}_{m0} &= \frac{\mu_0 l}{\mu_{c0} l_0} \frac{ab/2}{\tanh(\alpha b/2)} \end{aligned} \quad (46)$$

また、式(43)から、磁束と起磁力との関係が次のように得られる。

$$\frac{\Phi_0}{\bar{F}_m} = \frac{1}{1 + \bar{r}_{m0}} \cdot \frac{\mu_0 b}{l_0} \quad (47)$$

このとき、式(46)と式(42)から、鉄心表面の磁界の強さは次のように表される。

$$\frac{\bar{H}_{c1}}{\bar{F}_m} = \frac{\bar{r}_{m0}}{1 + \bar{r}_{m0}} \cdot \frac{1}{l_0} \quad (48)$$

4.2 透磁率変化する場合

式(40)は透磁率一定の範囲で成り立つので、鉄心を厚さ方向に細分割して、その間で透磁率が一定であると近似する。簡便のために、鉄心の表面から内部に向かって番号を振っていき、以下の関係式で近似する。

$$\begin{aligned} \bar{H}_{cn}(y) &= \bar{H}_{cn} \frac{\cosh(\alpha_n y)}{\cosh(\alpha_n y_n)}, \quad y_{n+1} \leq y \leq y_n, \\ n &= 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (49)$$

ここで、

$$y_1 = \frac{b}{2}, \quad y_{N+1} \geq 0 \quad (50)$$

$$\alpha_n^2 = \mu_n \omega \quad (51)$$

$$\bar{H}_{c,n+1} = \bar{H}_{cn} \frac{\cosh(\alpha_n y_{n+1})}{\cosh(\alpha_n y_n)} \quad (52)$$

式(52)は境界で磁界の連続性を与える。 y_{N+1} の実効範囲は周波数によって変わる。

透磁率については磁束の飽和を考慮して、区間 n の透磁率はその区間の最大磁界で決まるとして、次の関係で与えることにする。

$$\mu_n = \frac{\mu_{c0}}{1 + \gamma |H_{cn}|} \quad (53)$$

ここで、 $|H_{cn}|$ は $\bar{H}_{cn}$ の絶対値を表す。このとき、表面の磁界の強さ $\bar{H}_{c1}$ が与えられると、式(53)から μ_1 が、そして式(51)から α_1 が求まる。これらの値を式(52)に代入して $\bar{H}_{c2}$ が求まる。同様にして、次々に内側の定数が定まっていく。

このとき、鉄心を通る磁束は式(49)を用いて、次式

から計算される。

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_c &= \sum_{n=1}^{N-1} \bar{\Phi}_n, \\ \bar{\Phi}_n &= \int_{y_n}^{y_{n+1}} \mu_n \bar{H}_{zn}(y_n) dy \\ &= \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left[\bar{H}_{cn} \tanh(\alpha_n y_n) \right. \\ &\quad \left. - \bar{H}_{c,n+1} \tanh(\alpha_n y_{n+1}) \right] \quad (54)\end{aligned}$$

透磁率が変化する場合には、磁束を式(44)のような $\bar{H}_{c1}$ の陽な形で表すことができないので、式(42)から起磁力の分担を陽な形で得ることができない。数値計算に頼ることになる。

4.3 計算法 計算では $s = j\omega$ として起磁力に対する周波数応答を求める。このため、式(42), (43), (52)~(54)を以下のように書き換える。

$$h_0(s) l_0 + h_{c1}(s) l = 1 \quad (55)$$

$$\mu_n = \frac{\mu_{c0}}{1 + \gamma F_m h_{cn}(s)} \quad (56)$$

$$h_{c,n+1}(s) = h_{cn}(s) \frac{\cosh(\alpha_n y_{n+1})}{\cosh(\alpha_n y_n)} \quad (57)$$

$$\begin{aligned}\phi_c(s) &= \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left[h_{cn}(s) \tanh(\alpha_n y_n) \right. \\ &\quad \left. - h_{c,n+1}(s) \tanh(\alpha_n y_{n+1}) \right] \quad (58)\end{aligned}$$

$$\phi_0(s) = \mu_0 b h_0(s) \quad (59)$$

ここで、

$$\begin{aligned}h_0(s) &= \frac{\bar{H}_0}{F_m}, \quad h_{c1}(s) = \frac{\bar{H}_{c1}}{F_m}, \quad h_{cn}(s) = \frac{\bar{H}_{cn}}{F_m} \\ \phi_0(s) &= \frac{\bar{\Phi}_0}{F_m}, \quad \phi_c(s) = \frac{\bar{\Phi}_c}{F_m} \quad (60)\end{aligned}$$

また、 F_m は起磁力の振幅である。

計算手順として、各周波数に対して、次のような簡単な繰り返し手法が考えられる。

(1) h_0 を仮定する。初期値は磁束の飽和が無いとした式(46)で与える。

(2) 式(55)から h_{c1} をもとめる。

(3) 式(56)から μ_1 を、式(51)から α_1 を、式(57)から h_{c2} を求める。以下、同様にして、逐次的に N 区間の定数を求める。

(4) 式(58)から ϕ_c を求め、 $\phi_0 = \phi_c$ として式(59)から h_{01} を求める。

(5) $dh_0 = h_0 - h_{01}$ に応じて h_0 を修正して (2) に返り、収束するまで繰り返す。

4.4 計算例 計算には以下のデータを用いる。

$$\mu_{c0} = 5000 \mu_0, \quad \sigma = 1 \times 10^7 \text{ } 1/\Omega \cdot \text{m},$$

$$b = 17 \text{ mm}, \quad l = 190 \text{ mm}, \quad l_0 = 2 \text{ mm},$$

$$\gamma = 0.6 \times 10^{-2} \text{ m/A}, \quad F_m = 160 \text{ AT}$$

式(56)の係数 γ の上の値は、この磁気回路に起磁力を静的に与えたとき、磁束の飽和が無い場合に磁束密度 1 T に達する起磁力のときに、約 1/2 の磁束密度を発生するような飽和性を示すことを意味する。起磁力の振幅 $F_m = 160 \text{ AT}$ は飽和が無い場合に静的に約 0.1 T の磁束密度の変動を与えることを意味する。すなわち、静的な起磁力の分担比は

$$\frac{h_{c1}(0)l}{h_0(0)l_0} = \frac{\mu_0 l}{\mu_{c0} l_0} = 0.019 \quad (61)$$

と表されるので、起磁力の振幅 $F_m = 160 \text{ AT}$ のとき、静的な磁界の強さと磁束密度の振幅は次のように計算される。

$$H_0(0) = 7.85 \times 10^5 \text{ A/m}, \quad H_{c1}(0) = 5.8 \text{ A/m},$$

$$B(0) = 0.099 \text{ T}$$

ここでの計算は傾向を探ることが目的であるので、鉄心の分割法などの計算精度に関する詳細については省略する。

4.4.1 磁界と磁束の分布 周波数 $f = 1, 10, 100 \text{ Hz}$ について、磁界の厚さ方向の分布を計算し、絶対値で表した結果を、飽和無しの場合と比較して、図 6 に示す。磁界の強さは、飽和が無い場合に式(48)から得られる表面の値 h_{c10} で正規化して示している。また、磁束密度の分布を飽和が無い場合の値 $\mu_{c0} h_{c10}$ で正規化して示す。この分布も磁束の飽和無しの磁界の分布と直接比較できる(磁束飽和無しの場合には磁束分布は磁界の強さに比例する)。

計算結果は次のことを示している。磁気飽和がある場合には無しの場合に比べて、(1)鉄心内部の磁界の強さが増す。(2)鉄心の表面近くで磁束が相当に減る。(3)内部で磁束がやや増える。

4.4.2 磁束の周波数特性 全体の磁束の周波数応答の計算結果を、飽和無しの場合と比較して、図 7 に示す。ゲインは静的な値

$$\phi_0(0) = \frac{1}{1 + \frac{\mu_0 l}{\mu_{c0} l_0}} \cdot \frac{\mu_0 b}{l_0} \quad (62)$$

で正規化して表示している。

飽和を考慮すると、周波数が増すに連れて、ゲインの低下がさらに大きくなり、位相の遅れもさらに増えていく。このような傾向は起磁力の振幅が大きいくほど大きい。この結果は、過去に照合されたモデルと実測値との差違^{(2), (3)}の様子に定性的によく一致している。

Fig. 6 Distributions of magnetic intensity and flux-density for $F_m = 160\text{AT}$.

Upper lines: normalized magnetic intensity
Lower lines: normalized magnetic flux density
Middle lines: without saturation

Fig. 7 Frequency characteristics of magnetic flux.

(過去の照合結果ではさらに周波数が増えると起磁力の振幅による差違が、ゲインでは小さくなっていき、位相遅れではほとんどなくなっていき、ゲインについては磁束の漏れなど他の理由が考えられ、位相については遅れに上限(理論的に45度)があるためであると考えられる。)このことから、従来のモデルと実測値との一致度が良くなかった理由の一つは、鉄心表面の磁気飽和のためであると推論される。

5 結 び

磁気力アクチュエータの磁束の周波数特性について、鉄心への磁束の浸入問題として、簡単な一次元モデルを用いて考察した。そして、鉄心の表面近くで磁気飽和が起きやすく、このことが従来のモデルの不備の原因の一つであるとの推論を得た。

本稿の推論を実測でチェックすることには、困難を伴うと予想されるが、鉄心の表面近くに微小な穴を開けて微細な探索コイルを巻くことが可能かもしれない。本稿の考察結果は、磁気力アクチュエータの精巧なモデルを見いだすためには磁気飽和を考慮する必要があることを示しており、このことはモデリングをさらに複雑にする。

厚さが幅に比べて無視できないソリッド鉄心の場合には、磁極面の影響と磁気飽和の影響はともに一次元モデルより大きく現れると推測される。それらを定量的に解析するには、複雑な二次元モデルが必要であり、有限要素法などを利用した数値計算に頼らざるをえないと予想される。しかしながら、設計の最適化などのためには不十分でもできるだけ簡単なモデルが望まれる。

参 考 文 献

- (1) Feeley, J. J.: *IEEE Trans. on Magnetics*, 32-2 (1996), 453-458.
- (2) Fukata, S.: *JSME Int. Journal*, C-43-1 (2000), 38-46.
- (3) 深田: 第12回電磁気力関連のダイナミクスシンポジウム予稿集, 沖繩 (2000), 153-156.
- (4) Carpenter, C. J.: *Proc. IEE*, 124-78 (1977), 659-664.
- (5) 卯本: 電磁気学, 昭晃堂(平成5年), 300, 8.
- (6) Stoll, R. L.: *The analysis of eddy currents* (1974), 4-5, Clarendon Press, Oxford.
- (7) (6)の 10-12.