4つのステアリングを持つ4又ヘビ型ロボットの制御*

山口 博 明^{*1}

Control of A Four-Steering, Four-Forked Snake-Like Robot

Hiroaki YAMAGUCHI^{*2}^{*2} Department of Systems Information Engineering, Musashi Institute of Technology,
1-28-1 Tamatsutsumi, Setagaya-ku, Tokyo, 158-8557 Japan

This paper introduces and describes a new type of wheeled locomotor, a four-steering, four-forked snake-like robot. This wheeled locomotor is a nonholonomic mechanical system, and it consists of four links, three rotational joints and four steering systems. The four links are coupled by the three rotational joints which have the common rotational axis. Each link has a steering system at its middle point. The wheeled locomotor makes undulatory locomotion in which it transforms the rotations of the three joints into its movement by using the four steering systems. Especially, we assume a virtual joint which has identically the same rotational axis as the common one of the three joints. This virtual joint couples the first link and a virtual link which has a virtual axle at its middle point and which has a virtual steering system at its tip. We prove that, by assuming such virtual mechanical elements, it is possible to convert the kinematical equation of the wheeled locomotor into five-chain, single-generator chained form in a mathematical framework, differential geometry. Based on chained form, we derive a path following feedback control method which makes the wheeled locomotor follow a straight line. The validity of the mechanical design of the four-steering, four-forked snake-like robot, the conversion of its kinematical equation into chained form, and the path following feedback control method has been verified by computer simulations.

Key Words: Nonlinear Control, Mechatronics and Robotics, Robot, Snake-like Robot, Nonholonomic System, Chained Form, Differential Geometry

1. 序論

機械工学において、移動機構の設計とその制御方法の確立は重要な研究課題である。本論文では、新たに、4つのステアリングを持つ4又ヘビ型ロボット、ならびに、そのフィードバック制御法を提案する。

従来のヘビ型ロボット⁽¹⁾⁽²⁾は、受動的に回転する車輪が取り付けられているリンク、これを複数個直列に連結して構成されるものであり、リンク間の関節を周期的に駆動することで、その持続的な移動を実現している。このように、体形の変化をその移動に変換することを、波動歩行(undulatory locomotion)と呼ぶ。

本研究では、波動歩行機械の設計論の構築を最終的な目標とし、その第一歩として、従来のヘビ型ロボット以外の様々な移動機構を設計し、それらの制御方法を考える。ここでは、特に、波動歩行機械を安定的に動作させるフィードバック制御系を構成できるように、

その運動学的方程式が正準系である Chained Form へ変換可能となるものとして、4つのステアリングを持つ4又ヘビ型ロボットを設計し、直線経路への追従を可能にするフィードバック制御法を提案する。

この4又ヘビ型ロボットの特徴は、関節の駆動をその移動に変換できない特異姿勢になれば、2次元平面上において、いかなる方向にも動き出すことができ、さらに、動き出した方向に持続的に移動できることである。これは、この4又ヘビ型ロボットが、4つのリンクに取り付けられているステアリングの操舵方向を制御することで、その特異姿勢を積極的に避けることができるからである。このように特異姿勢を積極的に避ける機能は、従来のヘビ型ロボットにはないものである。

これまでに、従来のヘビ型ロボット以外に波動歩行を行う移動機構として、ローラーウォーカー⁽³⁾⁽⁴⁾が提案されている。このローラーウォーカーは、脚型移動ロボットの設計変更を最小限に抑えるように、足先に受動車輪を取り付けることで波動歩行を行うこと

* 原稿受付 2005年4月23日。

^{*1} 正員、武蔵工業大学工学部(☎158-8557 東京都世田谷区玉堤1-28-1)。

E-mail: yamaguch@si.musashi-tech.ac.jp

ができる脚一車輪型ハイブリッド移動体である。その波動歩行における制御については、フィードフォワード制御系が提案されている。これに対して、本論文で提案している4又ヘビ型ロボットは、安定的に動作させるフィードバック制御系を構成できるように、運動学的方程式が正準系である Chained Form へ変換可能となるように設計された波動歩行機械である。今後、本研究の成果を、正準系に基づいてフィードバック制御系が構成可能になるような新しいローラーウォーカーの設計に、反映させられると考えられる。

さて、この4又ヘビ型ロボットは、多重連結車両システムの1つである。他の多重連結車両システムとしては、複数のトレーラを牽引する移動ロボット⁽⁵⁾⁽⁶⁾、複数の操舵付トレーラを牽引する移動ロボット⁽⁷⁾⁽⁸⁾、荷台を協調搬送する2台の移動ロボット⁽⁹⁾などがある。これらの搬送システムにおいて、それぞれの運動学的方程式は、正準系である Chained Form へ変換可能であり、この正準系に基づいて、有効な制御方法が提案されている。しかし、この4又ヘビ型ロボットは、図1が示すように、4つのリンクを同一の回転中心において連結している3つの関節から、ステアリングが離れている off-hook 型の構造を持っていることから、その運動学的方程式を Chained Form へ変換することは簡単ではない。

このため、本論文では、図2に示すように、仮想的な関節、仮想的なリンク、仮想的なリンクの仮想的な車軸と仮想的なステアリングを想定し、これにより、この4又ヘビ型ロボットの運動学的方程式が Chained Form へ変換可能となることを、その計算結果を与えることで示す。また、この Chained Form に基づいて、直線経路への追従を可能にするフィードバック制御法を提案する。この4又ヘビ型ロボットの設計、その運動学的方程式の Chained Form への変換、ならびに、直線経路への追従を可能にするフィードバック制御法の有効性は、シミュレーションにより検証されている。

2. 4又ヘビ型ロボットの構造

本章では、図1に示す4又ヘビ型ロボットの構造について説明する。この4又ヘビ型ロボットでは、第1番目～第4番目のリンクの先端が、同一の回転中心を持つ3つの関節により連結されている。具体的には、第1番目と第2番目のリンクが第1番目の関節により連結されている。第2番目と第3番目のリンクが第2番目の関節により、また、第3番目と第4番目のリンクが第3番目の関節により、連結されている。そして、第1番目～第4番目のリンク、これら4つのリン

クには、それぞれの中点に、ステアリングが取り付けられている。この4又ヘビ型ロボットは、3つの関節を周期的に駆動し、4つのステアリングを周期的に操舵することで、移動する。

この4又ヘビ型ロボットの特徴は、関節の駆動をその移動に変換できない特異姿勢になれば、2次元平面上において、いかなる方向にも動き出すことができ、さらに、動き出した方向に持続的に移動できることである。これは、この4又ヘビ型ロボットが、4つのリンクに取り付けられているステアリングの操舵方向を制御することで、その特異姿勢を積極的に避けることができるからである。

Fig. 1 A Four-Steering, Four-Forked Snake-Like Robot

3. 運動学的方程式

本章では、最初に、図1に示す4又ヘビ型ロボットの運動学的方程式について考える。つぎに、図2に示す仮想的な機械要素を持つ4又ヘビ型ロボットの運動学的方程式について考える。

3.1 4又ヘビ型ロボットの運動学的方程式 図1に示す4又ヘビ型ロボットの第1番目～第4番目のリンクにおける中点の位置 $(x_i, y_i)^T$, $i = 1, 2, 3, 4$ は、式(1), (2)のように計算される。

$$x_i = x_t - l \cos \theta_i, \quad (1)$$

$$y_i = y_t - l \sin \theta_i, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

ベクトル $(x_t, y_t)^T$ は、第1番目～第4番目のリンク、これら4つのリンクの先端を同一の回転中心において連結している3つの関節の位置を表している。角度 θ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ は、それぞれ、第1番目～第4番目のリンクの姿勢を表している（角度の取り方については図2参照）。それから、第1番目～第4番目のリンクに取り付けられているステアリングの速度拘束は、それぞれ、式(3)のように与えられる。

$$\dot{x}_i \sin(\theta_i + \phi_i) - \dot{y}_i \cos(\theta_i + \phi_i) = 0, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

角度 ϕ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ は、それぞれ、第1番目～第4番目のリンクのステアリング角度を表している（角度の取り方については図2参照）。これら式(1), (2)の時間微分により計算される第1番目～第4番目のリンクにおける中点の移動速度 $(\dot{x}_i, \dot{y}_i)^T$, $i = 1, 2, 3, 4$ を、式(3)に代入することで、図1に示す4又へび型ロボットの運動学的方程式は、式(4)のように与えられる。

$$T \begin{pmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$T = -EB^{-1}A,$$

$$A = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1 + \phi_1) & -\cos(\theta_1 + \phi_1) \\ \sin(\theta_2 + \phi_2) & -\cos(\theta_2 + \phi_2) \\ \sin(\theta_3 + \phi_3) & -\cos(\theta_3 + \phi_3) \\ \sin(\theta_4 + \phi_4) & -\cos(\theta_4 + \phi_4) \end{pmatrix},$$

$$B = \text{diag}(l \cos \phi_1, l \cos \phi_2, l \cos \phi_3, l \cos \phi_4),$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

角速度 $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3$ は、それぞれ、第1番目と第2番目のリンクを連結する第1番目の関節を駆動する角速度、第2番目と第3番目のリンクを連結する第2番目の関節を駆動する角速度、第3番目と第4番目のリンクを連結する第3番目の関節を駆動する角速度である。この式(4)から、図1に示す4又へび型ロボットにおいて、以下の特異姿勢1が存在することが理解できる。

《特異姿勢1》「式(4)において、 $\text{rank} T < 2$ となる姿勢は、第1番目～第3番目の関節を駆動する角速度 $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3$ により、これら3つの関節で同一の回転中心にて連結されている第1番目～第4番目のリンクの先端の移動速度 $(\dot{x}_t, \dot{y}_t)^T$ を、一意に決めることができない、つまり、制御できない特異姿勢である。」

特異姿勢1ではない $\text{rank} T = 2$ となる姿勢においては、第1番目～第3番目の関節を駆動する角速度 $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3$ のうち、2つが独立であり、残る1つが、これら独立な2つに対して従属である。この特異姿勢1を避けながら、この4又へび型ロボットが移動できるように、第1番目～第3番目の関節を駆動し、第1番目～第4番目のリンクに取り付けられているステアリングを操舵しなければならない。

3.2 仮想的な機械要素を持つ4又へび型ロボットの運動学的方程式 本論文では、図2に示すように、仮想的なリンクと、この仮想的なリンクと第1番目のリンクを連結する仮想的な関節を想定する。この仮想的なリンクには、その中点に仮想的な車軸が、そして、その先端に仮想的なステアリングが取り付けられている。また、この仮想的な関節は、第1番目～第4番目

のリンクの先端を同一の回転中心にて連結している3つの関節と同じ回転中心を持っている。

このように仮想的な機械要素を想定することは、新たに、仮想的な状態変数を定義することである。そして、仮想的な状態変数の時間微分も、運動学的方程式に含めることで、これを、微分幾何学⁽¹⁰⁾に基づいて、Chained Formへ変換することができる。この場合における仮想的な機械要素の想定は、つまり、仮想的な状態変数の定義は、運動学的方程式を Chained Formへ変換するための十分条件^{(7) (11)}が満たされるかどうか調べながら、試行錯誤的に行われている。

もちろん、これら仮想的な機械要素は、この4又へび型ロボットの動きを物理的に拘束しているわけではない。ここで提案する制御方法においては、これら仮想的な機械要素の拘束を満たしながら、この4又へび型ロボットが移動するように、仮想的な関節の角度、仮想的なリンクに取り付けられている仮想的なステアリングの操舵角度に応じて、第1番目～第3番目の関節を駆動する角速度、ならびに、第1番目～第4番目のリンクに取り付けられているステアリングを操舵する角速度が決定される。

Fig. 2 A Four-Steering, Four-Forked Snake-Like Robot with Virtual Mechanical Elements

いま、仮想的なリンクが移動する速さを、 u_1 とすると、図2に示す4又へび型ロボットの運動学的方程式は、式(5)のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 + g_3(x)u_3 + g_4(x)u_4 \\ &\quad + g_5(x)u_5 + g_6(x)u_6, \\ x &= (x_0, y_0, \phi_0, \theta_0, \phi_1, \theta_1, \phi_2, \theta_2, \phi_3, \theta_3, \phi_4, \theta_4)^T, \\ g_1 &= (g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{16}, g_{17}, g_{18}, \\ &\quad g_{19}, g_{110}, g_{111}, g_{112})^T, \\ g_2 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \\ g_3 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \\ g_4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \\ g_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T, \\ g_6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^T, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11} = \cos \theta_0 \\ g_{12} = \sin \theta_0 \\ g_{13} = 0 \\ g_{14} = \frac{\tan \phi_0}{l} \\ g_{15} = 0 \\ g_{16} = \frac{1}{l \cos \phi_1} \{ \sin(\theta_0 - \theta_1 - \phi_1) \\ \quad - \tan \phi_0 \cos(\theta_0 - \theta_1 - \phi_1) \} \\ g_{17} = 0 \\ g_{18} = \frac{1}{l \cos \phi_2} \{ \sin(\theta_0 - \theta_2 - \phi_2) \\ \quad - \tan \phi_0 \cos(\theta_0 - \theta_2 - \phi_2) \} \\ g_{19} = 0 \\ g_{110} = \frac{1}{l \cos \phi_3} \{ \sin(\theta_0 - \theta_3 - \phi_3) \\ \quad - \tan \phi_0 \cos(\theta_0 - \theta_3 - \phi_3) \} \\ g_{111} = 0 \\ g_{112} = \frac{1}{l \cos \phi_4} \{ \sin(\theta_0 - \theta_4 - \phi_4) \\ \quad - \tan \phi_0 \cos(\theta_0 - \theta_4 - \phi_4) \}. \end{array} \right.$$

ベクトル $(x_0, y_0)^T$ は、仮想的なリンクの midpoint の位置を表している。また、角度 ϕ_0, θ_0 は、それぞれ、仮想的なリンクのステアリング角度、仮想的なリンクの姿勢を表している（角度の取り方については図2参照）。5つの制御入力 $u_i, i = 2, 3, \dots, 6$ は、それぞれ、仮想的なリンクの仮想的なステアリング角速度、第1番目～第4番目のリンクのステアリング角速度である。もちろん、仮想的なリンクが移動する速さ u_1 は、制御入力ではない。この u_1 は、第1番目～第3番目の関節を駆動する角速度 $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3$ を、角速度入力 v_1, v_2, v_3 とすると、式(6)を満たすように決まるものである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}_1 = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = (g_{16} - g_{18})u_1 = \gamma_1 u_1 = v_1 \\ \dot{\psi}_2 = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3 = (g_{18} - g_{110})u_1 = \gamma_2 u_1 = v_2 \\ \dot{\psi}_3 = \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4 = (g_{110} - g_{112})u_1 = \gamma_3 u_1 = v_3. \end{array} \right. \quad (6)$$

この式(6)を、つぎのように説明することができる。式(6)の3つの係数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ がすべてゼロではない場合、第1番目の関節の角速度入力 v_1 を与えると、仮想的なリンクが移動する速さ u_1 は一意に決まる。第2番目の関節の角速度入力 v_2 を与えても、 u_1 は一意に決まる。また、第3番目の関節の角速度入力 v_3 を与えても、 u_1 は一意に決まる。この場合、 v_1, v_2, v_3 は独立ではない。どれか1つを与えれば、それ以外の2つは、式(6)を満たすように一意に決まる。同じように、これらの係数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ のうち、2つがゼロではない場合、1つだけがゼロではない場合においても、仮想的なリンクが移動する速さ u_1 は一意に決まる。このように、式(6)の3つの係数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ のうち、どれか1つでもゼロでなければ、第1番目～第3番目の関節を駆動する角速度入力 v_1, v_2, v_3 により、仮想的なリンクが移動する速さ u_1 を制御することができる。これに対して、これらの係数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ がすべてゼロの場合、 v_1, v_2, v_3 により、 u_1 を一

意に決めることはできない、つまり、制御することはできない。この式(6)から、図2に示す4又ヘビ型ロボットにおいて、以下の特異姿勢2が存在することが理解できる。

《特異姿勢2》「式(6)において、 $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0$ となる姿勢は、第1番目～第3番目の関節を駆動する角速度入力 v_1, v_2, v_3 により、仮想的なリンクが移動する速さ u_1 を、一意に決めることができない、つまり、制御できない特異姿勢である。」

この特異姿勢2は、特異姿勢1と等価である。本制御方法においては、特異姿勢1, 2を避けながら、この4又ヘビ型ロボットが移動できるように、仮想的な関節と第1番目～第3番目の関節を駆動し、仮想的なリンクに取り付けられている仮想的なステアリングと第1番目～第4番目のリンクに取り付けられているステアリングを操舵する。

このとき、仮想的な関節を駆動する角速度 $\dot{\psi}_0$ は、つまり、角速度入力 v_0 は、以下のように計算される。

$$\dot{\psi}_0 = \dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1 = (g_{14} - g_{16})u_1 = \gamma_0 u_1 = v_0. \quad (7)$$

もちろん、仮想的な関節の駆動を、この4又ヘビ型ロボットの移動に変換することはできない。したがって、本制御方法においては、式(6)を満たすように決まる u_1 から、式(7)に基づいて、この仮想的な関節を駆動する角速度 $\dot{\psi}_0$ が、つまり、角速度入力 v_0 が一意に決まる。

4. Chained Form への変換

本章では、仮想的な関節、仮想的なリンク、その仮想的な車軸と仮想的なステアリング、これら仮想的な機械要素を想定することで、この4又ヘビ型ロボットの運動学的方程式が、Five-Chain, Single-Generator Chained Form へ変換可能となることを、その計算結果を与えることで示す。この変換は、微分幾何学⁽¹⁰⁾に基づいている。まず、式(5)の6つのベクトル場 $g_i, i = 1, 2, \dots, 6$ を、以下のように変換する。

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = g_1 / \cos \theta_0 \\ f_i = g_i, \quad i = 2, 3, \dots, 6. \end{array} \right. \quad (8)$$

つぎに、 $u_i, i = 1, 2, \dots, 6$ を、以下のように変換する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_1 = u_1 \cos \theta_0 \\ \tilde{u}_i = u_i, \quad i = 2, 3, \dots, 6. \end{array} \right. \quad (9)$$

このようにして、式(5)の運動学的方程式は、以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x} = & f_1(x)\tilde{u}_1 + f_2(x)\tilde{u}_2 + f_3(x)\tilde{u}_3 + f_4(x)\tilde{u}_4 \\ & + f_5(x)\tilde{u}_5 + f_6(x)\tilde{u}_6. \end{aligned} \quad (10)$$

これら6つのベクトル場 $f_i, i = 1, 2, \dots, 6$ を用いて、式(5)の運動学的方程式における変数を、式(11)の

ように変数変換する.

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{11} = h_1 = x_0 \\ z_{21} = L_{f_1}^2 h_2 = \frac{1}{\cos^3 \theta_0} \frac{\tan \phi_0}{l} \\ z_{22} = L_{f_1} h_2 = \tan \theta_0 \\ z_{23} = h_2 = y_0 \\ z_{31} = L_{f_1} h_3 = \frac{1}{\cos \theta_0} g_{16} - \frac{1}{\cos \theta_0} g_{14} \\ z_{32} = h_3 = \theta_1 - \theta_0 \\ z_{41} = L_{f_1} h_4 = \frac{1}{\cos \theta_0} g_{18} - \frac{1}{\cos \theta_0} g_{14} \\ z_{42} = h_4 = \theta_2 - \theta_0 \\ z_{51} = L_{f_1} h_5 = \frac{1}{\cos \theta_0} g_{110} - \frac{1}{\cos \theta_0} g_{14} \\ z_{52} = h_5 = \theta_3 - \theta_0 \\ z_{61} = L_{f_1} h_6 = \frac{1}{\cos \theta_0} g_{112} - \frac{1}{\cos \theta_0} g_{14} \\ z_{62} = h_6 = \theta_4 - \theta_0. \end{array} \right. \quad (11)$$

ここで, $L_p q = \frac{\partial q}{\partial x_1} p_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} p_2 + \dots + \frac{\partial q}{\partial x_n} p_n$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ である. この式 (11) の時間微分は, 式 (12) に示す Five-Chain, Single-Generator Chained Form となる.

$$\begin{aligned} \dot{z}_{11} &= w_1 & \dot{z}_{21} &= w_2 & \dot{z}_{31} &= w_3 & \dot{z}_{41} &= w_4 \\ & & \dot{z}_{22} &= z_{21} w_1 & \dot{z}_{32} &= z_{31} w_1 & \dot{z}_{42} &= z_{41} w_1 \\ & & \dot{z}_{23} &= z_{22} w_1 & & & & \\ & & \dot{z}_{51} &= w_5 & \dot{z}_{61} &= w_6 & & \\ & & \dot{z}_{52} &= z_{51} w_1 & \dot{z}_{62} &= z_{61} w_1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \dot{u}_1 \\ w_2 &= L_{f_1}^3 h_2 \dot{u}_1 + L_{f_2} L_{f_1}^2 h_2 \dot{u}_2 + L_{f_3} L_{f_1}^2 h_2 \dot{u}_3 + L_{f_4} L_{f_1}^2 h_2 \dot{u}_4 \\ &\quad + L_{f_5} L_{f_1}^2 h_2 \dot{u}_5 + L_{f_6} L_{f_1}^2 h_2 \dot{u}_6 \\ w_3 &= L_{f_1}^2 h_3 \dot{u}_1 + L_{f_2} L_{f_1} h_3 \dot{u}_2 + L_{f_3} L_{f_1} h_3 \dot{u}_3 + L_{f_4} L_{f_1} h_3 \dot{u}_4 \\ &\quad + L_{f_5} L_{f_1} h_3 \dot{u}_5 + L_{f_6} L_{f_1} h_3 \dot{u}_6 \\ w_4 &= L_{f_1}^2 h_4 \dot{u}_1 + L_{f_2} L_{f_1} h_4 \dot{u}_2 + L_{f_3} L_{f_1} h_4 \dot{u}_3 + L_{f_4} L_{f_1} h_4 \dot{u}_4 \\ &\quad + L_{f_5} L_{f_1} h_4 \dot{u}_5 + L_{f_6} L_{f_1} h_4 \dot{u}_6 \\ w_5 &= L_{f_1}^2 h_5 \dot{u}_1 + L_{f_2} L_{f_1} h_5 \dot{u}_2 + L_{f_3} L_{f_1} h_5 \dot{u}_3 + L_{f_4} L_{f_1} h_5 \dot{u}_4 \\ &\quad + L_{f_5} L_{f_1} h_5 \dot{u}_5 + L_{f_6} L_{f_1} h_5 \dot{u}_6 \\ w_6 &= L_{f_1}^2 h_6 \dot{u}_1 + L_{f_2} L_{f_1} h_6 \dot{u}_2 + L_{f_3} L_{f_1} h_6 \dot{u}_3 + L_{f_4} L_{f_1} h_6 \dot{u}_4 \\ &\quad + L_{f_5} L_{f_1} h_6 \dot{u}_5 + L_{f_6} L_{f_1} h_6 \dot{u}_6. \end{aligned}$$

この変換は, 開集合 U ,

$$U = \{x : \dim(G_0) = 5, \dim(G_1) = 10, \dim(G_2) = 11; G_0, G_1, G_2 \text{ are involutive}\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} G_0 &= \{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}, \\ G_1 &= \{f_2, \text{ad}_{f_1} f_2, f_3, \text{ad}_{f_1} f_3, f_4, \text{ad}_{f_1} f_4, \\ &\quad f_5, \text{ad}_{f_1} f_5, f_6, \text{ad}_{f_1} f_6\}, \\ G_2 &= \{f_2, \text{ad}_{f_1} f_2, \text{ad}_{f_1}^2 f_2, f_3, \text{ad}_{f_1} f_3, f_4, \text{ad}_{f_1} f_4, \\ &\quad f_5, \text{ad}_{f_1} f_5, f_6, \text{ad}_{f_1} f_6\} \end{aligned}$$

において有効である. ここで, $\text{ad}_f^k g = [f, \text{ad}_f^{k-1} g]$, $\text{ad}_f^0 g = g$, $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$ である. この開集合 U に状態変数 x を限定するのは, 以下の特異姿勢 3 を避けるためである.

《特異姿勢 3》「式 (13) の開集合 U に含まれない状態変数 x を持つ姿勢は, 式 (5) に示す運動学的方程式を, 式 (12) へ変換することができない変数変換上の特異姿勢である.」

この特異姿勢 3 は, 仮想的なリンクの仮想的なステアリング角度, 第 1 番目～第 4 番目のリンクのステアリング角度, これらのうち, どれか 1 つでも, ± 90 度

となる姿勢を含んでいる. また, 仮想的なリンクの姿勢が, 座標系の x 軸に対して, ± 90 度となる姿勢も含んでいる. 本論文では, 特異姿勢 1, 2, 3 を避けながら, この 4 又へび型ロボットを直線経路に追従させる制御方法を提案する.

5. 変換された変数の物理的意味

本章では, 式 (11) に示す変換された変数の物理的意味について述べる. 変数 z_{11} は x_0 であり, この時間微分 $\dot{x}_0$ は, 式 (10) から理解できるように, 仮想的なリンクにおける中点の x 軸に対する移動速度 $\dot{u}_1$ である. 本制御方法においては, この 4 又へび型ロボットの仮想的なリンクを, (ア) 座標系の x 軸に沿って蛇行運動させる, あるいは, (イ) x 軸上で直進運動させる. これに伴って, この 4 又へび型ロボットは, 直線経路である x 軸に追従する. したがって, この $\dot{u}_1$ は, 常に, ゼロではない. ここでは, 特に, $\dot{u}_1$ が一定値になるように, この 4 又へび型ロボットの仮想的な関節と第 1 番目～第 3 番目の関節を駆動し, 仮想的なリンクの仮想的なステアリングと第 1 番目～第 4 番目のリンクのステアリングを操舵する.

この仮想的なリンクにおける中点の y 座標値 y_0 については, 式 (10), (11) から理解できるように, つぎの 3 つの関係が成り立っている.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = z_{23}, \\ \dot{y}_0 = z_{22} \dot{u}_1, \\ \ddot{y}_0 = z_{21} \dot{u}_1^2 + z_{22} \ddot{u}_1. \end{array} \right. \quad (14)$$

この仮想的なリンクを, 座標系の x 軸に沿って, 蛇行運動させる場合, 式 (14) から理解できるように, 変数 z_{23} , z_{22} , z_{21} を周期的に変化させなければならない. 一方, この仮想的なリンクを, 座標系の x 軸上で直進運動させる場合, 変数 z_{23} , z_{22} , z_{21} をゼロに収束させなければならない.

これら以外の変数 z_{i2} , z_{i1} , $i = 3, 4, 5, 6$ について考える. 変数 z_{i2} , $i = 3, 4, 5, 6$ は, それぞれ, 第 1 番目～第 4 番目のリンクの仮想的なリンクに対する相対姿勢であり, 仮想的な関節の角度 ψ_0 と第 1 番目～第 3 番目の関節の角度 ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 から, 以下のように計算される.

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{32} = \theta_1 - \theta_0 = -\psi_0 \\ z_{42} = \theta_2 - \theta_0 = -\psi_0 - \psi_1 \\ z_{52} = \theta_3 - \theta_0 = -\psi_0 - \psi_1 - \psi_2 \\ z_{62} = \theta_4 - \theta_0 = -\psi_0 - \psi_1 - \psi_2 - \psi_3. \end{array} \right. \quad (15)$$

すでに, 第 3 章 2 節で述べたように, 仮想的なリンクが移動する速さ u_1 は, 第 1 番目～第 3 番目の関節の角速度 $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$, $\dot{\psi}_3$ を, 角速度入力 v_1 , v_2 , v_3 とすると, この 4 又へび型ロボットが特異姿勢 2 を持たないとき, 式 (6) を満たすように一意に決まる. 本制御方

法においては、仮想的なリンクにおける中点の x 軸に対する移動速度 $\dot{u}_1$ ($= u_1 \cos \theta_0$) を、ゼロではない一定値としていることから、この u_1 も、ゼロではない。これは、式(6)からも理解できるように、この4又ヘビ型ロボットが移動するには、常に、第1番目～第3番目の関節、これら3つの関節のうち、少なくとも1つの関節が駆動されていなければならないことを意味している。したがって、この4又ヘビ型ロボットが、特異姿勢1, 2, 3を持たないようにしながら、これら3つの関節の角度 ψ_1, ψ_2, ψ_3 を、周期的に変化させなければならない。必要に応じて、仮想的な関節の角度 ψ_0 も、周期的に変化させなければならない。つまり、式(15)から理解できるように、変数 z_{i2} , $i=3, 4, 5, 6$ を、周期的に変化させなければならない。同時に、変数 z_{i1} , $i=3, 4, 5, 6$ も、周期的に変化することになる。

6. 制御入力とその安定性

本章では、この4又ヘビ型ロボットの仮想的なリンクが、(ア)座標系の x 軸に沿って蛇行運動するように、あるいは、(イ) x 軸上で直進運動するように、仮想的な関節と第1番目～第3番目の関節を駆動し、仮想的なリンクの仮想的なステアリングと第1番目～第4番目のリンクのステアリングを操舵するフィードバック制御法を提案する。すでに、第5章で述べたように、この仮想的なリンクを、 x 軸に沿って蛇行運動させるには、変数 z_{23} を目標とする周期関数に収束させる必要があり、同時に、変数 z_{22}, z_{21} も周期的に変化することになる。また、 x 軸上で直進運動させるには、変数 z_{23}, z_{22}, z_{21} をゼロに収束させる必要がある。このために、

$$w_1 = a_0 \quad (16)$$

とし、制御入力 w_2 を、以下のように与える。

$$w_2 = p_{21} z_{21} + p_{22} \frac{z_{22}}{a_0} + p_{23} \frac{z_{23}}{a_0} + e_2. \quad (17)$$

この式(17)の制御入力における e_2 は、以下の式(18)に示す振動項である。

$$e_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (18)$$

この式(18)の A_2, ω_2, φ_2 は、それぞれ、振動項 e_2 の振幅、角周波数、位相である。先の式(16)の a_0 は、ゼロではない一定値であり、これは、物理的に、仮想的なリンクにおける中点の x 軸に対する移動速度 $\dot{u}_1$ を意味している。つまり、

$$\dot{x}_0 = \dot{u}_1 = w_1 = a_0 \neq 0$$

である。仮想的なリンクが移動する速さ u_1 ($= \dot{u}_1 / \cos \theta_0$)も、ゼロではなく、第1番目～第3番目の関

節を駆動する角速度 $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3$ は、つまり、角速度入力 v_1, v_2, v_3 は、式(6)より、一意に決まる。また、仮想的な関節を駆動する角速度 $\dot{\psi}_0$ は、つまり、角速度入力 v_0 は、式(7)より、一意に決まる。このとき、式(19)に示す3次元ベクトル ζ_2 を定義すると、その時間微分 $\dot{\zeta}_2$ は、式(20)のように与えられる。

$$\zeta_2 = (\zeta_{21}, \zeta_{22}, \zeta_{23})^T = \left(z_{21}, \frac{z_{22}}{a_0}, \frac{z_{23}}{a_0} \right)^T. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_2 &= \begin{pmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \zeta_2 + \begin{pmatrix} A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \Lambda_2 \zeta_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (20)$$

この式(20)における行列 Λ_2 の固有値の実部がすべて負になるように、係数 p_{21}, p_{22}, p_{23} を与えるとき、仮想的なリンクにおける中点の y 座標値 y_0 ($= z_{23}$)は、式(21)が示すように、周期関数 r_2 に収束し、この仮想的なリンクは、 x 軸に沿って蛇行運動を行うことになる。

$$y_0 = z_{23} = r_2 = \hat{A}_2 \sin(\hat{\omega}_2 t + \hat{\varphi}_2). \quad (21)$$

この式(21)の $\hat{A}_2, \hat{\omega}_2, \hat{\varphi}_2$ は、それぞれ、周期関数 r_2 の振幅、角周波数、位相である。ここで、 $\hat{\omega}_2 = \omega_2$ である。それから、式(18)に示す振動項 e_2 の振幅 A_2 をゼロとすると、変数 z_{23}, z_{22}, z_{21} は、指数関数的にゼロに収束し、この仮想的なリンクは、 x 軸上で直進運動を行うことになる。

もちろん、 x 軸に追従する4又ヘビ型ロボットは、移動し続けなければならない。つまり、常に、第1番目～第3番目の関節、これら3つの関節のうち、少なくとも1つが駆動され、 $w_1 = a_0 \neq 0$ が満たされなければならない。したがって、この4又ヘビ型ロボットが、特異姿勢1, 2, 3を持たないようにしながら、これら3つの関節の角度 ψ_1, ψ_2, ψ_3 を、周期的に変化させなければならない。必要に応じて、仮想的な関節の角度 ψ_0 も、周期的に変化させなければならない。つまり、式(15)から理解できるように、変数 z_{i2} , $i=3, 4, 5, 6$ を、周期的に変化させなければならない。このために、制御入力 w_i , $i=3, 4, 5, 6$ を、以下のよう

$$w_i = p_{i1} z_{i1} + p_{i2} \frac{z_{i2}}{a_0} + e_i, \quad (22)$$

$$i=3, 4, 5, 6.$$

この式(22)の制御入力における e_i , $i=3, 4, 5, 6$ は、以下の式(23)に示す振動項である。

$$e_i = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) + A_{i0}, \quad (23)$$

$$i=3, 4, 5, 6.$$

この式(23)の $A_i, \omega_i, \varphi_i, A_{i0}$ は、それぞれ、振動項 e_i の振幅、角周波数、位相、振動中心である。この

とき、式(24)に示す2次元ベクトル ζ_i , $i = 3, 4, 5, 6$ を定義すると、その時間微分 $\dot{\zeta}_i$, $i = 3, 4, 5, 6$ は、式(25)のように与えられる。

$$\begin{aligned}\zeta_i &= (\zeta_{i1}, \zeta_{i2})^T = (z_{i1}, \frac{z_{i2}}{a_0})^T, \\ i &= 3, 4, 5, 6. \\ \dot{\zeta}_i &= \begin{pmatrix} p_{i1} & p_{i2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \zeta_i + \begin{pmatrix} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) + A_{i0} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \Lambda_i \zeta_i + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \{A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) + A_{i0}\}, \\ i &= 3, 4, 5, 6.\end{aligned}\quad (24)$$

この式(25)における行列 Λ_i , $i = 3, 4, 5, 6$ の固有値の実部がすべて負になるように、係数 p_{i1} , p_{i2} , $i = 3, 4, 5, 6$ を与えるとき、第1番目～第4番目のリンクの仮想的なリンクに対する相対姿勢である変数 z_{i2} , $i = 3, 4, 5, 6$ は、それぞれ、以下の式(26)が示すように、周期関数 r_i , $i = 3, 4, 5, 6$ に収束する。

$$z_{i2} = r_i = \hat{A}_i \sin(\hat{\omega}_i t + \hat{\varphi}_i) + \hat{A}_{i0}, \quad (26)$$

$$i = 3, 4, 5, 6.$$

この式(26)の $\hat{A}_i$, $\hat{\omega}_i$, $\hat{\varphi}_i$, $\hat{A}_{i0}$ は、それぞれ、周期関数 r_i の振幅、角周波数、位相、振動中心である。ここで、 $\hat{\omega}_i = \omega_i$, $i = 3, 4, 5, 6$ である。そして、式(21), (26)の周期関数 r_i , $i = 2, 3, \dots, 6$ の振幅 $\hat{A}_i$, 位相 $\hat{\varphi}_i$, 振動中心 $\hat{A}_{i0}$, $i \neq 2$ は、それぞれ、式(17), (22)の振動項 e_i , $i = 2, 3, \dots, 6$ の振幅 A_i , 位相 φ_i , 振動中心 A_{i0} , $i \neq 2$ の関数である。したがって、これら A_i , ω_i , φ_i , A_{i0} , $i \neq 2$, $i = 2, 3, \dots, 6$ を用いて、この4又ヘビ型ロボットが、特異姿勢1, 2, 3を避けながら、移動し続けられるように、式(21), (26)の周期関数 r_i , $i = 2, 3, \dots, 6$ の振幅 $\hat{A}_i$, 角周波数 $\hat{\omega}_i$, 位相 $\hat{\varphi}_i$, 振動中心 $\hat{A}_{i0}$, $i \neq 2$ を設計する。

7. シミュレーション

本章では、この4又ヘビ型ロボットの直線経路である x 軸への追従を可能にする本制御方法の有効性を、シミュレーションにより検証する。このシミュレーションにおいて、仮想的なリンクと第1番目～第4番目のリンク、これら5つのリンクの長さは、いずれも、0.15[m] ($l = 0.075$ [m]) である。ここでは、この4又ヘビ型ロボットの仮想的なリンクにおける中点の x 軸に対する移動速度 $\tilde{u}_1$ を、

$$\dot{x}_0 = \tilde{u}_1 = w_1 = a_0 = 0.4[\text{m/sec}]$$

とした。制御入力である式(17), (22)については、それらの係数を以下のように決めた。

$$\begin{aligned}p_{21} &= -3.0, \quad p_{22} = -p_{21}^2/3.0 = -3.0, \\ p_{23} &= p_{21}^3/27.0 = -1.0, \\ p_{i1} &= -2.0, \quad p_{i2} = -p_{i1}^2/4.0 = -1.0, \\ i &= 3, 4, 5, 6.\end{aligned}$$

このとき、式(20), (25)の行列 Λ_i , $i = 2, 3, \dots, 6$ の固有値は、すべて -1.0 となる。そして、仮想的なリ

ンクにおける中点の y 座標値 z_{23} , ならびに、第1番目～第4番目のリンクの仮想的なリンクに対する相対姿勢 z_{i2} , $i = 3, 4, 5, 6$ が、それぞれ収束する式(21), (26)の周期関数 r_i , $i = 2, 3, \dots, 6$ の振幅 $\hat{A}_i$, 角周波数 $\hat{\omega}_i$, 位相 $\hat{\varphi}_i$, 振動中心 $\hat{A}_{i0}$, $i \neq 2$ を、以下のように決めた。

$$\begin{aligned}\hat{A}_2 &= 0.1[\text{m}], & \hat{\omega}_2 &= 2\pi/5[\text{rad/sec}], \\ \hat{A}_i &= \pi/8[\text{rad}], & \hat{\omega}_i &= 2\pi/5[\text{rad/sec}], \\ i &= 3, 4, 5, 6, \\ \hat{\varphi}_2 &= 0[\text{rad}], & \hat{A}_{20} &\text{ doesn't exist}, \\ \hat{\varphi}_3 &= 0[\text{rad}], & \hat{A}_{30} &= -3\pi/4[\text{rad}], \\ \hat{\varphi}_4 &= \pi/2[\text{rad}], & \hat{A}_{40} &= -\pi/4[\text{rad}], \\ \hat{\varphi}_5 &= 3\pi/2[\text{rad}], & \hat{A}_{50} &= \pi/4[\text{rad}], \\ \hat{\varphi}_6 &= \pi[\text{rad}], & \hat{A}_{60} &= 3\pi/4[\text{rad}].\end{aligned}$$

このとき、式(18), (23)の制御入力における振動項 e_i , $i = 2, 3, \dots, 6$ の振幅 A_i , 角周波数 ω_i , 位相 φ_i , 振動中心 A_{i0} , $i \neq 2$ は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}A_2 &= \hat{A}_2 (9\hat{\omega}_2^2 + p_{21}^2)^{3/2} / (27a_0^2), \\ A_i &= \hat{A}_i (4\hat{\omega}_i^2 + p_{i1}^2) / (4a_0), \\ \omega_2 &= \hat{\omega}_2, \\ \omega_i &= \hat{\omega}_i, \\ \varphi_2 &= \hat{\varphi}_2 - \text{atan2}\{9\hat{\omega}_2 (3\hat{\omega}_2^2 - p_{21}^2) / (27\hat{\omega}_2^2 p_{21} - p_{21}^3)\}, \\ \varphi_i &= \hat{\varphi}_i - \text{atan2}\{4\hat{\omega}_i p_{i1} / (-4\hat{\omega}_i^2 + p_{i1}^2)\}, \\ A_{20} &\text{ doesn't exist}, \\ A_{i0} &= \hat{A}_{i0} p_{i1}^2 / (4a_0), \\ i &= 3, 4, 5, 6.\end{aligned}$$

このように、式(21), (26)の周期関数 r_i , $i = 2, 3, \dots, 6$ の振幅 $\hat{A}_i$, 角周波数 $\hat{\omega}_i$, 位相 $\hat{\varphi}_i$, 振動中心 $\hat{A}_{i0}$, $i \neq 2$ を設計することで、この4又ヘビ型ロボットは、特異姿勢1, 2, 3を避けながら、移動することができる。初期状態を、以下のように与えた。

$$\begin{aligned}(x_0, y_0)^T|_{t=0} &= (0.40[\text{m}], -0.0587785[\text{m}])^T, \\ \theta_0|_{t=0} &= 0.2488903[\text{rad}], & \phi_0|_{t=0} &= 0.0395890[\text{rad}], \\ \theta_1|_{t=0} &= -2.3381269[\text{rad}], & \phi_1|_{t=0} &= -0.4954061[\text{rad}], \\ \theta_2|_{t=0} &= -0.2188077[\text{rad}], & \phi_2|_{t=0} &= 0.3410648[\text{rad}], \\ \theta_3|_{t=0} &= 0.7165882[\text{rad}], & \phi_3|_{t=0} &= -0.4957722[\text{rad}], \\ \theta_4|_{t=0} &= 2.8359075[\text{rad}], & \phi_4|_{t=0} &= 0.4858774[\text{rad}].\end{aligned}$$

この初期状態において、仮想的なリンクにおける中点の y 座標値 z_{23} , ならびに、第1番目～第4番目のリンクの仮想的なリンクに対する相対姿勢 z_{i2} , $i = 3, 4, 5, 6$ は、それぞれ、式(21), (26)の周期関数 r_i , $i = 2, 3, \dots, 6$ に収束している。

図3, 4に、この場合におけるシミュレーション結果を示す。このシミュレーションにおいては、図1に示す4又ヘビ型ロボットの運動学的方程式である式(4)に対して、図2に示す仮想的な機械要素を持つ4又ヘビ型ロボットの運動学的方程式である式(5)の $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$, $\tilde{u}_4$, $\tilde{u}_5$, $\tilde{u}_6$ から計算される第1番目～第3番目の関節を駆動する角速度 $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$, $\dot{\psi}_3$ と第1番目～第4番目のリンクのステアリングを操舵する角速度 $\dot{\phi}_1$, $\dot{\phi}_2$, $\dot{\phi}_3$, $\dot{\phi}_4$ を与えている。図3から、この

Fig. 3 A Simulation Result

Fig. 4 Evolutions of γ_1 , γ_2 , and γ_3

4叉ヘビ型ロボットが、座標系の x 軸に沿って、蛇行運動していることが理解できる。また、図4から、この4叉ヘビ型ロボットが、特異姿勢2を避けながら移動していることが理解できる。もちろん、特異姿勢1, 3も避けている。このように、図3, 4に示すシミュレーション結果から、この4叉ヘビ型ロボットの x 軸への追従を可能にする本制御方法の有効性が検証された。

8. 結論

本論文では、4つのステアリングを持つ4叉ヘビ型ロボット、ならびに、そのフィードバック制御法を提案した。この4叉ヘビ型ロボットにおいて、仮想的な関節、仮想的なリンク、仮想的なリンクの仮想的な車軸と仮想的なステアリングを想定することで、その運動学的方程式が、Five-Chain, Single-Generator Chained Formへ変換可能となることを、その計算結果を与えることで示した。また、このChained Formに基づいて、直線経路への追従を可能にするフィードバック制御法を提案した。この4叉ヘビ型ロボットは、関節の駆動をその移動に変換できない特異姿勢になれば、2次元平面上において、いかなる方向にも動き出すことができ、さらに、動き出した方向に持続的に移動することができる。特に、この4叉ヘビ型ロボットは、3つの関節の駆動と4つのステアリングの操舵により、直線経路への滑らかな追従を実現している。この4叉ヘビ型ロボットの設計、その運動学的方程式のChained Formへの変換、ならびに、直線経路への追従を可能にするフィードバック制御法の有効性は、シミュレーションにより検証されている。

文 献

- (1) 広瀬茂男, 生物機械工学, "工業調査会", 1987.
- (2) 山北昌毅, 橋本実, 山田毅, 三次元ヘビロボットの推進制御と先端位置姿勢制御, "日本ロボット学会誌", vol.22, no.1, 2004, pp.61-67.
- (3) 遠藤玄, 広瀬茂男, ローラーウォーカーに関する研究システムの構成と基本的動作実験, "日本ロボット学会誌", vol.18, no.2, 2000, pp.270-277.
- (4) 遠藤玄, 広瀬茂男, ローラーウォーカーに関する研究—基本的運動の生成と自立推進実験—, "日本ロボット学会誌", vol.18, no.8, 2000, pp.1159-1165.
- (5) 三平満司, 小林忠晴, 非線形制御理論を用いた多重トラレーラの直線経路追従制御, "日本ロボット学会誌", vol.11, no.4, 1993, pp.587-592.
- (6) C. Samson, *Control of Chained Systems: Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots*, "IEEE Transactions on Automatic Control", vol.40, no.1, 1995, pp.64-77.
- (7) L. G. Bushnell, D. M. Tilbury, and S. S. Sastry, *Steering Three-Input Nonholonomic Systems: The Fire Truck Example*, "the International Journal of Robotics Research", vol.14, no.4, 1995, pp.366-381.
- (8) 中村仁彦, 江崎秀明, 鄭 宇真, 非ホロノミック・トラレーシステムの操舵機構設計と制御, "日本ロボット学会誌", vol.17, no.6, 1999, pp.839-847.
- (9) 山口博明, 新井民夫, 2台の車両型移動ロボットから構成される協調搬送システムの経路追従フィードバック制御法, "計測自動制御学会論文集", vol.39, no.6, 2003, pp.575-584.
- (10) A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, "New York: Springer-Verlag", Second Edition, 1989.
- (11) R. M. Murray, *Nilpotent Bases for A Class of Non-Integrable Distributions with Applications to Trajectory Generation for Nonholonomic Systems*, "Mathematics of Controls, Signals, and Systems", vol.7, no.1, 1994, pp.58-75.