完全非弾性衝突による自由振動抑制法*

高橋将徳^{*1}, 木下正作^{*2}, 葭原俊一^{*3}
川崎義則^{*2}, 岩井善太^{*4}

Vibration Suppression by Perfectly Inelastic Collision

Masanori TAKAHASHI^{*5}, Shosaku KINOSHITA, Syunichi YOSHIHARA,
Yoshinori KAWASAKI and Zenta IWAI^{*5} Kyushu Tokai University,
9-1-1 Toroku, Kumamoto-shi, Kumamoto, 862-8652 Japan

This paper presents two new vibration suppression methods by perfectly inelastic collision and separation of masses: one is asymptotic suppression by iterative collision and the other is perfect suppression by 'one-shot' collision. In this paper, we also apply the proposed methods to the vibration reduction problem of so-called 'stacker cranes'. In order to suppress the residual vibration, we utilize the load and the platform as the impact damper. The effectiveness of the proposed methods is also confirmed through several experiments.

Key Words: Vibration Suppression, Inelastic Collision, Impact Damper, Stacker Crane

1. は じ め に

自由振動抑制問題は、振動工学における最も基礎的な問題ではあるが、今日でもなお、各種用途にあった自由振動抑制法の開発が精力的に進められている。

基本的に、この問題は、系内に蓄えられた力学的エネルギーをいかに消失させるかという問題に帰着できる。この観点から、著者らは、既報⁽¹⁾において、物体同士が完全非弾性衝突するときに生じる力学的エネルギーの損失⁽²⁾を利用した新しい自由振動抑制法を提案している。また、提案手法をスタッククレーン(図3を参照)の残留振動問題⁽¹⁾⁽³⁾に応用し、外部装置を付加することなく荷台のリフトアップのみにより残留振動を軽減する方法を考案している。

しかしながら、これらの方法は、一回の衝突に限定した振動抑制法となっているため、衝突時における物体間の相対速度を制御できない場合には、自由振動を完全に抑制する(振幅を零とする)ことができない。この問題を本質的に解決するためには、衝突時の物体間の相対速度と位置とを適切に制御する必要がある。

そこで、本論文では、物体間に作用する内力を制御して、適切なタイミングで物体同士を分離、衝突させることで、振動抑制に必要な衝突時の相対速度と位置を与える方法を提案する。具体的に、ここでは、衝突と分離の繰り返しによる漸近的振動抑制法と、一回のみの分離と衝突による完全振動抑制法の二つの新しい振動抑制法を提案する。さらに、それらの方法をスタッククレーンの残留振動問題に応用して、クレーンに積載された貨物を衝突体として利用する新たな振動抑制法を提案し、その効果を実験により検証する。

2. 問 題 設 定

質量 M の物体(振動体)とバネ定数 k のバネとからなる減衰のない一自由度振動系を考える。問題は、この一自由度振動系の自由振動を抑制することである。

さて、上記の問題を解決するために、本論文では、図1および図2に示すように、振動体 M の上部に質量 m の物体(衝突体)を載せ、これを利用する方法について考える。ただし、物体間に作用する内力を制御することができて、これら二体の完全非弾性衝突¹と分離が自由に行なえるものとする。

以降では、この衝突体を利用した振動抑制法を示す。

* 原稿受付 2005年8月26日。

^{*1} 正員、九州東海大学(☎862-8652 熊本市渡鹿9-1-1)。^{*2} 正員、有明工業高等専門学校(☎836-8585 大牟田市東萩尾150)。^{*3} 学生員、有明工業高等専門学校。^{*4} 正員、フェロー、熊本大学工学部(☎360-8555 熊本市黒髪2-39-1)。

E-mail: mtakahasi@ktmail.ktokai-u.ac.jp

¹ 本論文では、二つの物体が衝突し、その後、内力の作用により一体となって運動を続けることを、完全非弾性衝突と呼ぶ。これは、物理学で用いられる定義とはやや異なるので注意する。

Fig. 1 Asymptotic suppression by iterative collision (Method I)

3. 衝突と分離の繰り返しによる漸近的振動抑制

3.1 振動抑制法 I の提案 振動体 M と衝突体 m が既に一体となり、自由振動をしているものとする。この一体となった振動体を、その速度が零となる点（振れが極大となる点）で静かに元の二体へ分離させる。さらに、振動体 M が中立点上に戻ってきたときに分離した二体を再び完全非弾性衝突（一体化）させる。この一連の動作を繰り返し行なうとき、振動体 M の振幅は漸的に零に収束する。

以下では、このことを理論的に示す。

3.2 各質点の挙動解析 振動体 M と衝突体 m の挙動は、二体が一体化している状態と、分離している状態とに分けて考えることができる。そこで、 n (≥ 1) 回目の分離 ($t = t_n^-$) から n 回目の衝突 ($t = t_n^+$) までの区間と、 n 回目の衝突から $n+1$ 回目の分離 ($t = t_{n+1}^-$) までの区間の二つの区間について解析する。

区間 $[t_n^-, t_n^+)$ では、二体は分離している。よって、振動体 M と衝突体 m の変位をそれぞれ X_n^- と x_n^- とすると、各運動方程式は次式となる。

$$\begin{cases} M\ddot{X}_n^- + kX_n^- = 0, & \dot{X}_n^-(t_n^-) = 0 \\ m\ddot{x}_n^- = 0, & \dot{x}_n^-(t_n^-) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

上式の微分方程式を解けば、振動体 M の変位 X_n^- は、次のように求められる。

$$X_n^- = A_n \sin \left[\omega^-(t - t_n^-) + \frac{2n-1}{2}\pi \right] \quad (2)$$

ここで、 n 回目の衝突直前の速度 V_n^- とすれば、振幅 A_n は次のように表される。

$$A_n = \frac{V_n^-}{\omega^-}, \quad \omega^- = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (3)$$

一方、この区間での衝突体 m の変位 x_n^- は次式となる。

$$x_n^- = x_n^-(t_n^-) =: b_n \quad (4)$$

すなわち、衝突体 m は上式の点上に停留する。

区間 $[t_n^+, t_{n+1}^-)$ では、二体は一体化している。よって、振動体 M と衝突体 m の変位をそれぞれ X_n^+ と x_n^+ 、衝突直後の速度を V_n^+ 、さらに一体化に必要な内力を T とすると、各運動方程式は次式となる。

$$\begin{cases} M\ddot{X}_n^+ + kX_n^+ = T, & \dot{X}_n^+(t_n^+) = V_n^+ \\ m\ddot{x}_n^+ = -T, & \dot{x}_n^+(t_n^+) = V_n^+ \end{cases} \quad (5)$$

明らかに、衝突体 m の変位 x_n^+ は次式である。

$$x_n^+ = b_n + X_n^+ \quad (6)$$

これを式 (5) に代入すれば、振動体 M の変位 X_n^+ は次のように求められる。

$$X_n^+ = A_{n+1} \sin [\omega^+(t - t_n^+) + n\pi] \quad (7)$$

ここで、振幅 A_{n+1} は次のように表される。

$$A_{n+1} = \frac{V_n^+}{\omega^+}, \quad \omega^+ = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \quad (8)$$

さて、運動量保存の法則から次式を得る。

$$MV_n^- = (M+m)V_n^+ \quad (9)$$

式 (3), (8) および上式より、各振動間には次の関係が成立する。

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{V_n^+ \omega^-}{V_n^- \omega^+} = \sqrt{\frac{M}{M+m}} =: S \quad (10)$$

このとき、 $0 < S < 1$ であるから次式を得る。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_1 S^{n-1} = 0 \quad (11)$$

これは、無限回の完全非弾性衝突と分離の繰り返しで、振動体 M の振動が漸的に零に収束することを意味する。また、このときの収束速度は、式 (10) で定義される振幅比 S で決まり、これは衝突体 m の質量が大きいほど小さくなる。

ところで、 $n+1$ 回目の分離時に、衝突体 m は、

$$x_n^+(t_{n+1}^-) = b_n + (-1)^n A_{n+1} =: b_{n+1} \quad (12)$$

なる点上に位置する。よって、式(4)より、一周期分に相当する区間 $[t_n^-, t_{n+1}^-]$ でのその振れの大きさは、

$$|x_n^+(t_{n+1}^-) - x_n^-(t_n^-)| = |b_{n+1} - b_n| = A_{n+1} \quad (13)$$

となる。これは、振動体 M の振れの大きさ

$$|X_n^+(t_{n+1}^-) - X_n^-(t_n^-)| = A_{n+1} + A_n \quad (14)$$

の半周期分である。さらに、式(12)の漸化式を解けば、

$$b_n = b_1 + A_1 \left[\frac{(-S) - (-S)^n}{1 - (-S)} \right] \quad (15)$$

となるから、十分に時間が経過すれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_1 - \frac{A_1 S}{1 + S} \quad (16)$$

となり、やがて衝突体 m の運動も止まる。

3.3 力学的エネルギーによる解析 本節では、完全非弾性衝突と分離の繰り返し動作に伴う系内の力学的エネルギーの変化について論じる。

区間 $[t_n^-, t_{n+1}^+]$ における系内の力学的エネルギー E_n は次式である。

$$E_n = \frac{1}{2} M V_n^2 = \frac{1}{2} k A_n^2 \quad (17)$$

一方、区間 $[t_n^+, t_{n+1}^-]$ における力学的エネルギー E_{n+1} は次式である。

$$E_{n+1} = \frac{1}{2} (M + m) V_n^2 = \frac{1}{2} k A_{n+1}^2 \quad (18)$$

これらの結果と式(9)より、 n 回目の衝突前後の二つの力学的エネルギーの間には次の関係が成立する。

$$E_{n+1} = S^2 E_n \quad (19)$$

前節の考察から、 $0 < S < 1$ であるので次式を得る。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E_1 (S^2)^{n-1} = 0 \quad (20)$$

従って、無限回の完全非弾性衝突と分離の繰り返しによって力学的エネルギーが消失し、系内の全ての運動が止まる。消失したエネルギーは、完全非弾性衝突の際に、力学的エネルギー以外のエネルギーに変換される。

なお、式(17)、(18)および式(19)より、振動体 M の振幅に関して、式(10)の結果が導かれる。

4. 一回の分離と衝突による完全振動抑制法

4.1 振動抑制法Ⅱの提案 ここでは、振動体の質量が衝突体のそれより小さい場合、すなわち、 $M < m$ である場合の振動抑制法を与える。

前章の方法と同様、二体が既に一体となり、自由振動をしているものとする。また、そのときの振幅を A としておく。そこで、図2に示すように、二体の変位が

$$X_S = A \sqrt{1 - \frac{M}{m}} \quad (21)$$

となるとき ($t = t_S$)、静かに二体を分離させる。その後、振動体 M が、分離時の速度と逆向きの速度で中立点に戻ってきたとき ($t = t_C$) に、再び二体を完全非弾性衝突させる。このとき、衝突後の振動体 M の振幅は完全に零となる。

以下ではこのことを理論的に確かめる。

4.2 各質点の挙動解析 まずはじめに、分離前 $[t_0, t_S]$ の二体の挙動について考える。

振動体 M と衝突体 m の変位をそれぞれ X^+ と x^+ すると、各運動方程式は次式となる。

$$\begin{cases} M \ddot{X}^+ + k X^+ = T \\ m \ddot{x}^+ = -T \end{cases} \quad (22)$$

ここに、 T は内力である。当然のことながら、二体は一体化しているので、

$$X^+ = x^+ \quad (23)$$

である。これから運動方程式(22)の解を求めると、振動体 M と衝突体 m の変位は次式となる。

$$X^+ = x^+ = A \sin [\omega^+(t - t_0) + \phi_0] \quad (24)$$

ここに、 ϕ_0 は初期位相である。ここで、二体の変位が $X^+ = x^+ = X_S$ となるとき、速度を V_S とすれば、式(24)より、 X_S と V_S との間には次の関係が成立する。

$$X_S^2 + \left(\frac{V_S}{\omega^+} \right)^2 = A^2 \quad (25)$$

式(21)を上式に代入すれば、分離時 ($t = t_S$) の二体の速度 V_S は、その方向を考慮に入れて、次のように表される。

$$V_S = -\omega^+ A \sqrt{\frac{M}{m}} < 0 \quad (26)$$

次に、分離後 $[t_S, t_C]$ の二体の挙動について考える。分離後、二体の挙動は次の運動方程式に従う。

$$\begin{cases} M \ddot{X}^- + k X^- = 0 \\ m \ddot{x}^- = 0 \end{cases} \quad (27)$$

分離時の状態 $X^+(t_S) = X_S$ 、 $\dot{X}^+(t_S) = V_S$ から、運動方程式(27)の解を求めると、振動体 M の変位 X^- は次のように表される。

$$X^- = \sqrt{X_S^2 + \left(\frac{V_S}{\omega^-} \right)^2} \sin [\omega^-(t - t_S) + \phi_S] \quad (28)$$

Fig. 2 Perfect suppression by 'one-shot' collision (Method II)

$$\phi_S = \tan^{-1} \left(\frac{X_S \omega^-}{V_S} \right), \quad \frac{\pi}{2} < \phi_S < \pi$$

上式に式 (21) と式 (26) の結果を代入すると、振動体 M が再び中立点に戻ってくるとき ($t = t_C$) の速度 V_C は、次のように表される。

$$V_C = \omega^- \sqrt{X_S^2 + \left(\frac{V_S}{\omega^-} \right)^2} = \omega^+ A \sqrt{\frac{m}{M}} > 0 \quad (29)$$

上式と式 (26) から、衝突時 ($t = t_C$) の二体の運動量の総和を計算すると、

$$mV_S + MV_C = 0 \quad (30)$$

となる。これは、衝突後の二体の速度が零となることを意味する。よって、中立点での二体の速度が零となるから、衝突後の振幅は零となる。すなわち、完全に振動が抑制される。

さて、衝突時 ($t = t_C$) の衝突体 m の変位 x_C は次式となる。

$$x^-(t_C) = x_C = X_S + V_S \left[\frac{2\pi - \phi_S}{\omega^-} \right] \quad (31)$$

4.3 力学的エネルギーによる解析 分離前の二体は、振幅 A で自由振動しているから、系内に蓄えられている力学的エネルギー E は次式となる。

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (32)$$

力学的エネルギーの保存則から、分離時には、

$$E = \frac{1}{2} k X_S^2 + \frac{1}{2} M V_S^2 + \frac{1}{2} m V_S^2 \quad (33)$$

なる関係を得る。式 (21) および式 (32) を上式に代入し整理すれば次式を得る。

$$E = \frac{1}{2} \frac{m}{M} (M + m) V_S^2 \quad (34)$$

ところで、衝突直前まで系内の力学的エネルギーは保存されているから、

$$E = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} m V_S^2 \quad (35)$$

よって、式 (34) および式 (35) より、

$$m^2 V_S^2 - M^2 V_C^2 = 0 \quad (36)$$

ここで、二つの速度 V_S と V_C が異符号であることに注意すれば、 $mV_S - MV_C \neq 0$ であるので、式 (30) が導かれる。よって、衝突後の二体の速度は零となる。中立点では力学的エネルギーは全て運動エネルギーに変換されるから、系内の力学的エネルギーは、一回の衝突で完全に零となる（力学的エネルギー以外のエネルギーに全て変換される）。

5. スタッカクレーンの残留振動抑制問題への応用

本章では、前述した完全非弾性衝突による二つの振動抑制法をスタッカクレーン^{(1) (3)}と呼ばれる搬送装置の残留振動抑制問題へ応用する。

5.1 残留振動抑制問題

スタッカクレーンは、前後方向に移動する台車と上下方向に移動する荷台とから構成された、二次元の搬送を可能とする高速搬送装置である（図3を参照）。近年、倉庫の大規模化に伴い、スタッカクレーンは高層化、大型化の傾向にあり、その構造は低剛性化されている。そのため、台車停止時に、車体のもつ慣性力によって、無視することのできない残留振動が生じる^{(1) (3)}。このような残留振動は、位置決め精度の劣化、搬送時間の遅れ等の要因となるため、残留振動抑制問題は、高効率な搬送を実現するための解決すべき重要な課題の一つとなっている。

そこで次節では、完全非弾性衝突にもとづく前章の振動抑制法をスタッカクレーンの残留振動抑制問題に応用し、具体的な残留振動抑制法を提案する。

5.2 残留振動抑制法の提案

前章の方法を残留振動問題に応用するために、スタッカクレーンの構造に以下のような改良を加える。

図4（左）に示しているように、通常スタッカクレーンでは、荷台がフレームに固定された構造となっている。これに対し、ここでは、摩擦の小さな車輪を介して、フレームと荷台とを分離させた構造とする（図4（右）を参照）。ただし、ブレーキなどの機械的拘束力や電磁石による磁力などを内力として利用し、

Fig. 3 Illustration of a stacker crane

Fig. 4 A modified structure of the platform for vibration reduction

フレームと荷台の衝突（合体）と分離が自由に制御できるものとする。このような改良を加えたスタッククレーンにおいて、フレームを振動体、荷台および貨物を衝突体として考えれば、直接、振動抑制法ⅠおよびⅡが適用できて、フレームに生じた残留振動を荷台との完全非弾性衝突によって抑制することができる。ただし、図4にも示しているように、式(16)および式(31)の結果を利用して、隙間 h を十分に広く確保しておく必要がある。

前章の結果から、提案する振動抑制法では、貨物が重いほどその抑制効果が高くなる。このことは、実用上、非常に有用である。なぜなら、貨物が重いほどその慣性力が大きくなり、その結果、更なる大きな残留振動が生じるからである。

6. 実験モデルによる有効性の検証

本章では、前章で提案した、スタッククレーンの残留振動抑制法の有効性を実験により検証する。

6.1 実験モデルの概要 本論文では台車停止後の残留振動のみを考えているので、実験では、図5と図6に示すような、柔軟な構造物をスタッククレーンのフレーム部の実験モデルとして利用する。また、構造物の上部に、前後に移動可能な錘を積載したテーブルを載せ、これを荷台の実験モデルとして考える。このテーブルに電磁石を設置し、磁力によってテーブル

Fig. 5 Overview of the experimental apparatus

Fig. 6 Photograph of the experimental models

Table 1 Physical parameters of the models

Mass of the platform, m_p	7.5	kg
Mass of the roof, m_r	5.5	kg
Stiffness of aluminum plate, k_p	0.2	kN/m

と構造物との完全非弾性衝突と分離を制御する。構造物の変位 X とテーブルの変位 x は、レーザー変位計によって計測され、A/D変換器を経由し、コンピュータ内に取り込まれる。コンピュータは、構造物の変位 X から衝突・分離を判断を行ない、電磁石のオン・オフ制御を実行する。

実験モデルの各物理パラメータを表1に示しておく。

6.2 振動抑制法Ⅰによる実験結果 振動抑制法Ⅰでは、振動体の変位と速度との間に、

$$\begin{cases} X_n^- \dot{X}_n^- < 0, t \in (t_n^-, t_n^+) \\ X_n^+ \dot{X}_n^+ > 0, t \in (t_n^+, t_{n+1}^-) \end{cases} \quad (37)$$

なる関係が成立するので、これを利用して、衝突・分離（オン・オフ）の制御を行う。すなわち、構造物の変位と速度の符号が異符号のときに電磁石をオンにし、同符号のときにオフにする。

構造物の最上部に $X(0) \simeq 0.1$ m の初期変位を、さらにテーブルには $x(0) = b_1 \simeq 0$ m の初期変位を手動で与えたときの結果を図7に示す。なお、点線は振動抑制法を用いない場合（テーブルを構造物上に固定し

Fig. 7 Experimental results (Method I)

Fig. 8 Experimental results (Method II)

た場合)のテーブルの自由振動波形である。

点線との比較から、提案手法によって抑制された構造物の振動 X が、自由振動より速く減衰していることが分かる。特に、実用で問題とされるテーブル(荷台)の変位 x については、構造物の変位 X の約半分(半周期分)にまで振動が軽減されている。

6.3 振動抑制法Ⅱによる実験結果 表1の物理パラメータと式(21)から、構造物とテーブルとを分離(電磁石をオフに)する位置 X_S は次のように算出される。

$$X_S \approx 0.052 \text{ m} \quad (38)$$

初期変位として、 $X(0) = x(0) = 0.1 \text{ m}$ を与えたときの結果を図8に示す。点線は、前節と同様、テーブルの自由振動波形を表したものである。

結果から分かるように、一回の分離と衝突によって、振動が大幅に抑制されている。ただし、若干の残留振動が観測されている。これは、電磁石の特性から分離と衝突のタイミングに遅れが生じたためと考えられる。

また、衝突時の荷台の変位が原点から大きくはなれている。これを小さくするためには、式(31)より、荷台の質量を大きくすればよい。

7. おわりに

本論文では、適切な周期で完全非弾性衝突と分離を繰り返すことにより振動を漸近的に抑制する方法(振動抑制法Ⅰ)と、一回の分離と完全非弾性衝突で振動を完全に抑制する方法(振動抑制法Ⅱ)を提案した。また、これらの方法をスタッククレーンの残留振動抑制問題に応用し、新しい残留振動抑制法を考案した。

物体同士の衝突を利用した振動抑制法として、インパクトダンパ法⁽⁴⁾がよく知られている。この方法では、振動体の内部に衝突球を挿入しておき、この衝突球が振動時に振動体と繰り返し衝突することで振動が抑制される。提案手法は、原理的にはこのインパクトダンパ法と同様ではあるが、衝突のタイミングと相対速度を積極的に制御することによって、従来のインパクトダンパ法にはないいくつかの興味深い利点が得られている。例えば、対象のパラメータを必要としない振動抑制を実現している点(振動抑制法Ⅰ)、一回の衝突で振動を完全に抑制することができる点(振動抑制法Ⅱ)、抑制原理や解析が比較的単純で分かりやすい点等が挙げられる。

文 献

- (1) Takahashi, M. et al, Vibration Suppression by Inelastic Collision and Its Application to Vibration Reduction in Stacker Cranes, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.71, No. 704* (2005) pp. 89-94
- (2) Irie, T. and Yamada, G., *Mechanics*, (1988) pp.152-158, Rikogakusya
- (3) Takemoto, K. et al, Motion and Multimode-Vibration Control of a High Speed Transportation System, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.70, No. 694* (2004) pp. 113-120
- (4) Masri, S. F. and Coughney T. K., On the Stability of the Impact Damper, *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mathematics Vol.33* (1966) pp.586-592