構造系とゲインスケジュールドコントローラの統合化設計*

平 元 和 彦^{*1}, 中 道 健 太^{*2}

An Integrated Design of Structural and Gain Scheduled Control Systems

Kazuhiko HIRAMOTO^{*3} and Kenta NAKAMICHI^{*3} Department of Mechanical Engineering, Akita University,
1-1 Tegata-gakuen-machi, Akita-shi, Akita, 010-8502 Japan

We deal with an integrated design problem of structural and gain scheduled control systems for LPV systems. The integrated design problem is formulated as an optimization problem of structural design parameters and a gain scheduled controller minimizing $\mathcal{L}_2$ gain of the closed-loop system. Even in the simplest case the integrated design problem is represented as a BMI problem which cannot be solved exactly and efficiently. In the present paper we propose an iterative LMI-based method to solve the formulated optimization problem approximately. We can guarantee the local convergence of the closed-loop $\mathcal{L}_2$ gain with the proposed design algorithm even if the coefficient matrices of the state-space form of the control object are nonlinear functions on the structural design parameters. We show the effectiveness of the proposed design method through a design example.

Key Words: Integrated Design of Structural and Control Systems, LPV Systems, Gain Scheduled Control, LMI, Robust Control, Motion Control, Computer Aided Design

1. 緒 言

従来, 制御系設計は, 制御対象の設計の後コントローラを設計する二段階の手順で行われてきた。多くの場合, 制御系の性能の改善は, 固定された制御対象(のモデル)に対してコントローラ中に存在する設計変数を調整することによって行われてきた。制御系全体の性能向上を目指す立場からは, 前述のように制御対象とコントローラをそれぞれ別個に設計することは合理的でない。制御系の性能は, コントローラの設計変数だけでなく, 物理パラメータなどの制御対象中の変数にも明らかに強く依存しているからである。

この考え方に基づき, 制御対象中の設計変数とコントローラを閉ループ系の性能を指標として同時に最適設計し, より高い制御性能を達成することを目指す構造系と制御系の統合化設計に関する研究が行われてきた^{(1)~(3)}など。これらの研究報告例で提案または紹介されている設計手法のほとんどは, いずれも制御対象が LTI (Linear Time Invariant) モデルで表現できるという前提条件の下で構築された数値的な繰り返し最適化ア

ルゴリズムであった。

ロボットマニピュレータや航空・宇宙分野の応用では, 制御対象の動特性がある検出可能な時変パラメータ(スケジューリングパラメータ)に依存して変化する場合が多い。制御対象の線形状態方程式の係数行列が, スケジューリングパラメータの関数で表されるシステムは LPV (Linear Parameter Varying) システムと呼ばれている。LPV システムは, 非線形システムの一部のクラスも高い精度で近似可能であり, その記述能力は非常に高い。さらに, LPV システムに対する LMI に基づくゲインスケジュールドコントローラの設計手法が, 近年急速に整備されてきている^{(4)~(7)}。現在も, LPV システムの解析や制御系設計に関する研究が活発に行われているが, LPV システムを制御対象として構造系とコントローラを統合的に最適設計する研究は見当たらない。

本論文では, 従来 LTI システムの制御系設計のみについて研究されてきた構造系と制御系の統合化設計を LPV システムに拡張する。制御手法には, Apkarian ら⁽⁵⁾によって提案されている LMI に基づくゲインスケジュールド制御則を採用する。このコントローラ設計手法と, Hiramoto ら⁽⁹⁾によって提案されている LTI システムに対する反復 LMI 近似を用いた統合化設計法を組み合わせ, 局所的に最適な制御対象中の設計変数

* 原稿受付 2005 年 4 月 4 日。

^{*1} 正員, 秋田大学工学資源学部機械工学科(☎010-8502 秋田市手形学園町1-1)。^{*2} 准員, (株)沖データシステムズ(☎960-2153 福島市庄野字立田1-1)。

E-mail: hira@ipc.akita-u.ac.jp

とゲインスケジュールドコントローラを求めるための繰り返し設計アルゴリズムを提案する。本手法では、文献⁽⁹⁾と同様に、制御対象の状態方程式の係数行列が設計変数である構造系の質量、減衰、剛性や状態方程式の係数行列を唯一に定める基底変数の非線形関数となる場合においても設計結果の局所的最適性が保証される。

本論文の構成を以下に示す。第2章では、対象とするLPVシステムとゲインスケジュールドコントローラの定義を行い、LPVシステムに対する統合化設計問題を定式化する。第3章では、定式化された統合化設計問題に対する設計アルゴリズムを提案する。第4章では、設計例として回転型倒立振子を取り上げ、提案する統合化設計手法の有効性を示す。第5章で、本論文のまとめを行い、今後の課題を述べる。

本論文では、 $t, g, I, \sigma_{\max}(A)$ および $\det A$ を時刻、重力加速度、行列の転置、単位行列、行列 A の最大特異値および行列式とする。また、 $\mathcal{R}^m, \mathcal{R}^{m \times n}$ および $\mathcal{S}^m$ をそれぞれ m 次元実ベクトルの集合、 m 行 n 列の実行列の集合および m 次元実対称行列の集合とする。

2. LPV システムに対する統合化設計問題

2.1 制御対象およびコントローラの定義 以下の状態方程式で表される制御対象であるLPVシステム P と、フルオーダーのゲインスケジュールドコントローラ K を考える。

$$\begin{aligned} P: \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha(t), \beta)x(t) + B_1(\alpha(t), \beta)w(t) \\ \quad + B_2(\alpha(t), \beta)u(t) \\ z(t) = C_1(\alpha(t), \beta)x(t) + D_{12}(\alpha(t), \beta)u(t) \\ y(t) = C_2(\alpha(t), \beta)x(t) + D_{21}(\alpha(t), \beta)w(t) \end{cases} \quad (1) \\ K: \begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))x_K(t) + B_K(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))y(t) \\ u(t) = C_K(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))x_K(t) \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

ここで、 $x(t) \in \mathcal{R}^{n_x}$, $w(t) \in \mathcal{R}^{n_w}$, $u(t) \in \mathcal{R}^{n_u}$, $z(t) \in \mathcal{R}^{n_z}$ および $y(t) \in \mathcal{R}^{n_y}$ は、それぞれ状態ベクトル、外乱、操作量、制御出力および観測出力である。 $x_K(t) \in \mathcal{R}^{n_x}$ はコントローラの状態ベクトルである。 $\alpha(t) := [\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n_\alpha}(t)]^T \in \mathcal{R}^{n_\alpha}$ は、少なくとも t で一回微分可能なスケジューリングパラメータである。 $\alpha(t)$ および $\dot{\alpha}(t)$ はそれぞれ以下の集合 $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}_\alpha$ に属しているとする。

$$\alpha(t) \in \mathcal{A} := \{\alpha(t) \in \mathcal{R}^{n_\alpha} | \underline{\alpha} \leq \alpha(t) \leq \bar{\alpha}\}, \quad (3)$$

$$\underline{\alpha} := [\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_{n_\alpha}] \in \mathcal{R}^{n_\alpha}, \bar{\alpha} := [\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n_\alpha}] \in \mathcal{R}^{n_\alpha},$$

$$\dot{\alpha}(t) \in \mathcal{D}_\alpha := \{\dot{\alpha}(t) \in \mathcal{R}^{n_\alpha} | \underline{\delta} \leq \dot{\alpha}(t) \leq \bar{\delta}\}, \quad (4)$$

$$\underline{\delta} := [\underline{\delta}_1, \dots, \underline{\delta}_{n_\alpha}] \in \mathcal{R}^{n_\alpha}, \bar{\delta} := [\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_{n_\alpha}] \in \mathcal{R}^{n_\alpha}$$

$\beta \in \mathcal{R}^{n_\beta}$ は、制御対象中の調整可能な設計変数をベクトルにまとめたものであり、以下のような集合 $\mathcal{B}$ に属しているとする。

$$\beta \in \mathcal{B} := \{\beta \in \mathcal{R}^{n_\beta} | \underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}, \underline{\beta}, \bar{\beta} \in \mathcal{R}^{n_\beta}\} \quad (5)$$

なお、本論文では、一般化プラント P の状態方程式 (1) の係数行列が $\alpha(t) \in \mathcal{A}$ および $\beta \in \mathcal{B}$ の線形関数に限定されないことに注意しておく。

2.2 統合化設計問題の定式化 式 (1) および (2) からなる閉ループ系 G は、以下ようになる。

$$G: \begin{cases} \dot{x}_G(t) = A_G x_G(t) + B_G w(t) \\ z(t) = C_G x_G(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$x_G(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{bmatrix}, A_G(\alpha(t), \beta) := \begin{bmatrix} A & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{bmatrix},$$

$$B_G(\alpha(t), \beta) := \begin{bmatrix} B_1 \\ B_K D_{21} \end{bmatrix}, C_G(\alpha(t), \beta) := [C_1 \ D_{12} C_K]$$

本論文では、すべての $\alpha(t) \in \mathcal{A}$, $\dot{\alpha}(t) \in \mathcal{D}_\alpha$ の下で、閉ループ系 G の内部安定性を保ちながら次式の不等式中の $\gamma > 0$ を最小化するゲインスケジュールドコントローラ K を設計する。

$$\int_0^{T_f} z^T(t)z(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^{T_f} w^T(t)w(t)dt, \forall T_f \geq 0 \quad (7)$$

式 (7) $\gamma > 0$ は、式 (6) の閉ループ系 G の $\mathcal{L}_2$ ゲインである。本論文では、閉ループ系の $\mathcal{L}_2$ ゲイン γ を制御系の性能を測る指標とし、構造系とゲインスケジュールド制御系の設計問題を以下のように定式化する。

構造系とゲインスケジュールド制御系の統合化設計問題： 式 (1) の一般化プラントに対し、式 (3) および (4) の条件下で、式 (7) 中の $\gamma > 0$ を最小化するゲインスケジュールドコントローラ K_{opt} (式 (2)) および構造系の設計変数ベクトル $\beta_{opt} \in \mathcal{B}$ を求めよ。

3. 設計手法

3.1 コントローラの設計法 式 (1) で与えられるLPVシステムに対して、式 (2) のゲインスケジュールドコントローラ K を Apkarian らによって提案されている設計手法⁽⁵⁾を用いて、以下の手順で求める。

Step 1: 集合 $\mathcal{A}$ から有限個数の部分集合 $\mathcal{A}^g := \{\alpha_g^1, \dots, \alpha_g^{n_g}\}$, $\alpha_g^i \in \mathcal{A} \ \forall i$ を選択する。 n_g は、設計者によって決定される。この選択の過程をグリッディングという。集合 $\mathcal{D}_\alpha$ を n_α 次元の超直方体と考え、その頂点を $\alpha_d^i \in \mathcal{R}^{n_\alpha}$, $i = 1, \dots, 2^{n_\alpha}$ とおく。集合 $\mathcal{D}_\alpha^g := \{\alpha_d^1, \dots, \alpha_d^{n_d}\}$, $n_d := 2^{n_\alpha}$ を定義する。

Step 2: 以下の $\alpha(t)$ に依存する行列変数を定義する.

$$X(\alpha) := X_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \bar{p}_i(\alpha) X_i, \quad X_j \in \mathcal{S}^{n_x}, \quad (8)$$

$$Y(\alpha) := Y_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \bar{p}_i(\alpha) Y_i, \quad Y_j \in \mathcal{S}^{n_x}, \quad (9)$$

$$\hat{A}(\alpha) := \hat{A}_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \bar{p}_i(\alpha) \hat{A}_i, \quad \hat{A}_j \in \mathcal{R}^{n_x \times n_x}, \quad (10)$$

$$\hat{B}(\alpha) := \hat{B}_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \bar{p}_i(\alpha) \hat{B}_i, \quad \hat{B}_j \in \mathcal{R}^{n_x \times n_y}, \quad (11)$$

$$\hat{C}(\alpha) := \hat{C}_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \bar{p}_i(\alpha) \hat{C}_i, \quad \hat{C}_j \in \mathcal{R}^{n_u \times n_x}, \quad (12)$$

$$\forall j = 0, \dots, n_p$$

ここで, $\bar{p}_i(\alpha)$ ($i = 1, \dots, n_p$) は, 設計者によって指定される t に関して少なくとも一回微分可能な $\alpha(t)$ のスカラー関数である.

Step 3: $i = 1, \dots, n_g, j = 1, \dots, n_d$ に対して, 以下の連立 LMI の下で, $\gamma > 0$ を最小化するような行列変数 $X(\alpha), Y(\alpha), \hat{A}(\alpha), \hat{B}(\alpha), \hat{C}(\alpha)$ を求める.

$$E(i, j) < 0, \quad (13)$$

$$E(i, j) := \begin{bmatrix} E_{11}(i, j) & E_{12}(i) & E_{13}(i) & E_{14}(i) \\ E_{12}(i)^T & E_{22}(i, j) & E_{23}(i) & E_{24}(i) \\ E_{13}(i)^T & E_{23}(i)^T & -\gamma I & 0 \\ E_{14}(i)^T & E_{24}(i)^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$E_{11}(i, j) := \dot{X}(\alpha_g^j) + A(\alpha_g^j)^T X(\alpha_g^j) + X(\alpha_g^j) A(\alpha_g^j) + \hat{B}(\alpha_g^j) C_2(\alpha_g^j) + C_2(\alpha_g^j)^T \hat{B}(\alpha_g^j)^T,$$

$$E_{12}(i) := \hat{A}(\alpha_g^i) + A(\alpha_g^i)^T,$$

$$E_{13}(i) := X(\alpha_g^i) B_1(\alpha_g^i) + \hat{B}(\alpha_g^i) D_{21}(\alpha_g^i),$$

$$E_{14}(i) := C_1(\alpha_g^i)^T,$$

$$E_{22}(i, j) := -\dot{Y}(\alpha_d^j) + A(\alpha_g^i) Y(\alpha_g^j) + Y(\alpha_g^j) A(\alpha_g^i)^T + B_2(\alpha_g^i) \hat{C}(\alpha_g^j) + \hat{C}(\alpha_g^j)^T B_2(\alpha_g^i)^T,$$

$$E_{23}(i) := B_1(\alpha_g^i),$$

$$E_{24}(i) := C_1(\alpha_g^i) Y(\alpha_g^i) + D_{12}(\alpha_g^i) \hat{C}(\alpha_g^i),$$

$$\begin{bmatrix} X(\alpha_g^i) & I \\ I & Y(\alpha_g^i) \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

ここで, $\dot{X}(\alpha_d^j) \in \mathcal{S}^{n_x}, \dot{Y}(\alpha_d^j) \in \mathcal{S}^{n_x}$ ($j = 1, \dots, n_d$) は, 式 (8), (9) のパラメトリゼーションの下で $X(\alpha(t))$ および $Y(\alpha(t))$ を t で偏微分することによって, 簡単に求めることができる.

Step 4: 式 (2) のゲインスケジュールドコントローラ K の係数行列を次式によって求める.

$$A_K := N^{-1}(X\dot{Y} + \hat{A} - XAY - \hat{B}C_2Y - XB_2\hat{C}),$$

$$B_K := N^{-1}\hat{B}, \quad C_K := \hat{C}, \quad N := I - XY \quad \square$$

本設計手法では, グリッディングを行った時点で閉ループ系 G の $\mathcal{L}_2$ ゲイン制約 (式 (7)) はグリッドされた点上 ($\alpha(t) \in \mathcal{A}^g$) のみで成立し, すべての $\alpha(t) \in \mathcal{A}$ で満足される保証はなくなることによる. さらに式 (8)~(12) のパラメトリゼーションにおいても, 関数 $\bar{p}_i(\alpha(t))$ ($i = 1, \dots, n_p$) の選択法に決定的な指針はない¹. よって, 式 (13) および (14) の LMI 条件は, G に対してすべての $\alpha(t) \in \mathcal{A}, \alpha(t) \in \mathcal{A}_\alpha$ において式 (7) の $\mathcal{L}_2$ ゲイン制約が成立する必要条件である. 文献⁽⁵⁾では, 式 (7) の $\mathcal{L}_2$ ゲイン制約を満足するゲインスケジュールドコントローラ設計のための必要十分条件が無限次元の LMI 条件で与えられている. これまでこのような無限次元 LMI を近似なしに解く手法は知られておらず, グリッディングや式 (8)~(12) のパラメトリゼーションは, 文献⁽⁵⁾の無限次元の LMI 条件を現在入手可能な LMI ソルバ⁽⁸⁾で解くことのできる有限次元の LMI 条件で近似するためのものである. 一般化プラント P の状態方程式 (1) の係数行列を $\alpha(t)$ の線形関数に限定しない場合は, 今のところこの設計手法が最も実用的である. また, グリッドを十分細かく取ることによって, 実用的に十分な高い性能が得られることが多い⁽⁶⁾⁽⁷⁾.

3.2 統合化設計アルゴリズム 本論文では, 前節のゲインスケジュールドコントローラ K の設計法に基づいて, Hiramoto ら⁽⁹⁾による反復 LMI 近似を用いた統合化設計アルゴリズムを提案する. 本手法は, 文献⁽⁹⁾では LTI システムに対して適用され, その有効性が示されているが, 本論文のようなゲインスケジュールド制御を考えた場合でも同様に適用可能である. 以下にその設計アルゴリズムを示す. 本手法は, 多目的制御系設計などの BMI 問題をホモトピー法によって解く際用いられているもの⁽¹⁰⁾を元としている.

Step 1: k を繰り返し回数とする. $k = 1$ とおく. 正数 ε_c を決定する.

Step 2: 構造系の設計変数 $\beta^k \in \mathcal{B}$ を決定し, 式 (1) に代入し, 一般化プラント P^k を求める. 適当なグリッディングを行い², 前節の手法を用いて閉ループ系の $\mathcal{L}_2$ ゲインを最小化するゲインスケジュールドコントローラ K^k を求め, 達成された $\mathcal{L}_2$ ゲインを γ^k とおく. $k \geq 2$ の場合, $|\gamma^k - \gamma^{k-1}| < \varepsilon_c$ ならば $K_{opt} := K^k, \beta_{opt} := \beta^k$ として設計終了. そのとき達成される閉ループ系の $\mathcal{L}_2$ ゲインは γ^k となる. $|\gamma^k - \gamma^{k-1}| \geq \varepsilon_c$ ならば

¹変数行列を式 (8)~(12) のように $\alpha(t)$ の関数とおくことによって, それらを定数行列とおいた場合と比較して必ず γ の意味で優れた (少なくとも同等な) ゲインスケジュールドコントローラが求められることは保証される.

²本論文では, $k = 1$ で決定したグリッディングをすべての k で変更しないと仮定する.

Step 3 に行く。

Step 3: 行列 $\Delta X^k \in \mathcal{R}^{n_x}$, $\Delta Y^k \in \mathcal{R}^{n_y}$, $\Delta \hat{A}^k \in \mathcal{R}^{n_x \times n_x}$, $\Delta \hat{B}^k \in \mathcal{R}^{n_x \times n_u}$ および $\Delta \hat{C}^k \in \mathcal{R}^{n_u \times n_x}$ をそれぞれ式 (8)~(12) と同様のパラメトリゼーションを持つ (Step 2 で得られた) 行列 $X, Y, \hat{A}, \hat{B}$ および $\hat{C}$ の微小変動行列とする。以下の行列不等式を $i = 1, \dots, n_g$, $j = 1, \dots, n_d$ に対して定義する。

$$F^k(i, j) < 0, \quad (15)$$

$$F^k(i, j) := \begin{bmatrix} F_{11}^k(i, j) & F_{12}^k(i) & F_{13}^k(i) & F_{14}^k(i) \\ F_{12}^k(i)^T & F_{22}^k(i, j) & F_{23}^k(i) & F_{24}^k(i) \\ F_{13}^k(i)^T & F_{23}^k(i)^T & -(\gamma + \Delta\gamma^k)I & 0 \\ F_{14}^k(i)^T & F_{24}^k(i)^T & 0 & -(\gamma + \Delta\gamma^k)I \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} F_{11}^k(i, j) &:= \dot{X}(\alpha_d^j) + \Delta \dot{X}^k(\alpha_d^j) \\ &\quad + (A(\alpha_g^i) + \Delta A^k(\alpha_g^i))^T (X(\alpha_g^i) + \Delta X^k(\alpha_g^i)) \\ &\quad + (X(\alpha_g^i) + \Delta X^k(\alpha_g^i)) (A(\alpha_g^i) + \Delta A^k(\alpha_g^i)) \\ &\quad + (\hat{B}(\alpha_g^i) + \Delta \hat{B}^k(\alpha_g^i)) (C_2(\alpha_g^i) + \Delta C_2^k(\alpha_g^i)) \\ &\quad + (C_2(\alpha_g^i) + \Delta C_2^k(\alpha_g^i))^T (\hat{B}(\alpha_g^i) + \Delta \hat{B}^k(\alpha_g^i))^T, \\ F_{12}^k(i) &:= \hat{A}(\alpha_g^i) + \Delta \hat{A}^k(\alpha_g^i) + (A(\alpha_g^i) + \Delta A^k(\alpha_g^i))^T, \\ F_{13}^k(i) &:= (X(\alpha_g^i) + \Delta X^k(\alpha_g^i)) (B_1(\alpha_g^i) + \Delta B_1^k(\alpha_g^i)) \\ &\quad + (\hat{B}(\alpha_g^i) + \Delta \hat{B}^k(\alpha_g^i)) (D_{21}(\alpha_g^i) + \Delta D_{21}^k(\alpha_g^i)), \\ F_{14}^k(i) &:= (C_1(\alpha_g^i) + \Delta C_1^k(\alpha_g^i))^T, \\ F_{22}^k(i, j) &:= -(\dot{Y}(\alpha_d^j) + \Delta \dot{Y}^k(\alpha_d^j)) \\ &\quad + (A(\alpha_g^i) + \Delta A^k(\alpha_g^i)) (Y(\alpha_g^i) + \Delta Y^k(\alpha_g^i)) \\ &\quad + (Y(\alpha_g^i) + \Delta Y^k(\alpha_g^i)) (A(\alpha_g^i) + \Delta A^k(\alpha_g^i))^T \\ &\quad + (B_2(\alpha_g^i) + \Delta B_2^k(\alpha_g^i)) (\hat{C}(\alpha_g^i) + \Delta \hat{C}^k(\alpha_g^i)) \\ &\quad + (\hat{C}(\alpha_g^i) + \Delta \hat{C}^k(\alpha_g^i))^T (B_2(\alpha_g^i) + \Delta B_2^k(\alpha_g^i))^T, \\ F_{23}^k(i) &:= B_1(\alpha_g^i) + \Delta B_1^k(\alpha_g^i), \\ F_{24}^k(i) &:= (C_1(\alpha_g^i) + \Delta C_1^k(\alpha_g^i)) (Y(\alpha_g^i) + \Delta Y^k(\alpha_g^i)) \\ &\quad + (D_{12}(\alpha_g^i) + \Delta D_{12}^k(\alpha_g^i)) (\hat{C}(\alpha_g^i) + \Delta \hat{C}^k(\alpha_g^i)), \\ &\quad \begin{bmatrix} X(\alpha_g^i) + \Delta X^k(\alpha_g^i) & I \\ I & Y(\alpha_g^i) + \Delta Y^k(\alpha_g^i) \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、行列 $\Delta A^k(\alpha_g^i) \in \mathcal{R}^{n_x \times n_x}$, $\Delta B_1^k(\alpha_g^i) \in \mathcal{R}^{n_x \times n_u}$, $\Delta B_2^k(\alpha_g^i) \in \mathcal{R}^{n_x \times n_u}$, $\Delta C_1^k(\alpha_g^i) \in \mathcal{R}^{n_u \times n_x}$, $\Delta C_2^k(\alpha_g^i) \in \mathcal{R}^{n_y \times n_x}$, $\Delta D_{12}^k(\alpha_g^i) \in \mathcal{R}^{n_z \times n_u}$ および $\Delta D_{21}^k(\alpha_g^i) \in \mathcal{R}^{n_y \times n_z}$ は、制御対象中の設計変数ベクトル β^k が、微小変動 $\Delta \beta^k := [\Delta \beta_1^k, \dots, \Delta \beta_{n_\beta}^k]^T \in \mathcal{R}^{n_\beta}$ によって $\beta^k + \Delta \beta^k \in \mathcal{B}$ と変動することによる一般化プラント P の状態方程式の係数行列 $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$ の変動の一次近似である³。これらの係数行列の変動は、係数行列が設計変数ベクトル β の一般的な非線形関数で与えられ

³式 (15) および (16) は、設計変数ベクトル $\beta \in \mathcal{R}^{n_\beta}$ の関数にもなっていることに注意する。

る場合は以下のような近似式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \star^k(\beta^k + \Delta \beta^k) &\simeq \star^k(\beta^k) + \sum_{i=1}^{n_\beta} \Delta \beta_i^k \frac{\partial \star^k(\beta^k)}{\partial \beta_i^k} \\ &= \star^k(\beta^k) + \Delta \star^k(\beta^k, \Delta \beta^k) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 $\star^k(\beta^k)$ は、 P の状態方程式の係数行列を表し、 $\partial \star^k(\beta^k) / \partial \beta_i^k$ は、その係数行列を β^k の成分 β_i^k で偏微分した行列である。 $\Delta \beta_i^k$ が十分小さい場合、近似式 (17) は実際の変動量に対して十分高い精度を持つと考えることができる。なお、式 (17) は、係数行列が設計変数 β_i^k の線形関数である場合は近似なく厳密に成立する。

Step 4: 式 (15) は、 Δ つき変数に関する BMI となる。本論文では変動が微小であると考え、式 (15) の Δ に関する二次項を無視した以下の近似条件を考える。

$$\overline{F}^k(i, j) < 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \overline{F}^k(i, j) &:= \begin{bmatrix} \overline{F}_{11}^k(i, j) & \overline{F}_{12}^k(i) & \overline{F}_{13}^k(i) & \overline{F}_{14}^k(i) \\ \overline{F}_{12}^k(i)^T & \overline{F}_{22}^k(i, j) & \overline{F}_{23}^k(i) & \overline{F}_{24}^k(i) \\ \overline{F}_{13}^k(i)^T & \overline{F}_{23}^k(i)^T & -(\gamma + \Delta\gamma^k)I & 0 \\ \overline{F}_{14}^k(i)^T & \overline{F}_{24}^k(i)^T & 0 & -(\gamma + \Delta\gamma^k)I \end{bmatrix}, \\ \overline{F}_{11}^k(i, j) &:= \dot{X}(\alpha_d^j) + \Delta \dot{X}^k(\alpha_d^j) \\ &\quad + A(\alpha_g^i)^T X(\alpha_g^i) + X(\alpha_g^i) A(\alpha_g^i) \\ &\quad + A(\alpha_g^i)^T \Delta X^k(\alpha_g^i) + \Delta X^k(\alpha_g^i) A(\alpha_g^i) \\ &\quad + \Delta A^k(\alpha_g^i)^T X(\alpha_g^i) + X(\alpha_g^i) \Delta A^k(\alpha_g^i) \\ &\quad + \hat{B}(\alpha_g^i) C_2(\alpha_g^i) + C_2(\alpha_g^i)^T \hat{B}(\alpha_g^i)^T \\ &\quad + \hat{B}(\alpha_g^i) \Delta C_2^k(\alpha_g^i) + \Delta C_2^k(\alpha_g^i)^T \hat{B}(\alpha_g^i)^T \\ &\quad + \Delta \hat{B}_K^k(\alpha_g^i) C_2(\alpha_g^i) + C_2(\alpha_g^i)^T \Delta \hat{B}_K^k(\alpha_g^i)^T, \\ \overline{F}_{13}^k(i) &:= X(\alpha_g^i) B_1(\alpha_g^i) + X(\alpha_g^i) \Delta B_1^k(\alpha_g^i) \Delta X^k(\alpha_g^i) B_1(\alpha_g^i) \\ &\quad + \hat{B}(\alpha_g^i) D_{21}(\alpha_g^i) + \hat{B}(\alpha_g^i) \Delta D_{21}^k(\alpha_g^i) + \Delta \hat{B}^k(\alpha_g^i) D_{21}(\alpha_g^i), \\ \overline{F}_{22}^k(i, j) &:= -(\dot{Y}(\alpha_d^j) + \Delta \dot{Y}^k(\alpha_d^j)) \\ &\quad + A(\alpha_g^i) Y(\alpha_g^i) + Y(\alpha_g^i) A(\alpha_g^i)^T \\ &\quad + A(\alpha_g^i) \Delta Y^k(\alpha_g^i) + \Delta Y^k(\alpha_g^i) A(\alpha_g^i)^T \\ &\quad + \Delta A^k(\alpha_g^i) Y(\alpha_g^i) + Y(\alpha_g^i) \Delta A^k(\alpha_g^i)^T \\ &\quad + B_2(\alpha_g^i) \hat{C}(\alpha_g^i) + \hat{C}(\alpha_g^i)^T B_2(\alpha_g^i)^T \\ &\quad + B_2(\alpha_g^i) \Delta \hat{C}^k(\alpha_g^i) + \Delta \hat{C}^k(\alpha_g^i)^T B_2(\alpha_g^i)^T \\ &\quad + \Delta B_2^k(\alpha_g^i) \hat{C}(\alpha_g^i) + \hat{C}(\alpha_g^i)^T \Delta B_2^k(\alpha_g^i)^T, \\ \overline{F}_{24}^k(i) &:= C_1(\alpha_g^i) Y(\alpha_g^i) + C_1(\alpha_g^i) \Delta Y^k(\alpha_g^i) + \Delta C_1^k(\alpha_g^i) Y(\alpha_g^i) \\ &\quad + D_{12}(\alpha_g^i) \hat{C}(\alpha_g^i) + D_{12}(\alpha_g^i) \Delta \hat{C}^k(\alpha_g^i) + \Delta D_{12}^k(\alpha_g^i) \hat{C}(\alpha_g^i) \\ i &= 1, \dots, n_g, j = 1, \dots, n_d \end{aligned}$$

式 (18) は、すべての変動行列 (Δ つき行列) に関する LMI である。さらに、すべての変動行列が“小さい”

ことを、次式のように $\Delta\beta^k$ および、変動行列変数の最大特異値で制限する。

$$\sigma_{\max}(\Delta\bullet) \leq \kappa \sigma_{\max}(\bullet), \quad 0 < \kappa < 1 \quad (19)$$

ここで、 $\bullet$ には変動を仮定する行列変数の記号 ($\beta^k, \hat{x}, \hat{A}$ 等) が入る。式 (19) と等価な LMI 制約は、次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \kappa \sigma_{\max}(\bullet) I & \Delta\bullet \\ (\Delta\bullet)^T & \kappa \sigma_{\max}(\bullet) I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (20)$$

式 (18), (16), β^k の上下限に関する線形制約 $\underline{\beta} < \beta^k \leq \bar{\beta}$ (式 (5)) および式 (20) はいずれも調整される変数に対する LMI である。これらと $\Delta\gamma^k \leq 0$ の線形制約を連立させ、 $\Delta\gamma^k$ を最小化する変数を求める。解がない場合は、探索領域を現在の設計変数のより近傍付近に制限するように、

$$\kappa := \eta \kappa, \quad 0 < \eta < 1 \quad (21)$$

と更新し、再度上記連立 LMI を解く。制約 $\Delta\gamma^k \leq 0$ ($\gamma^{k+1} \leq \gamma^k$) を満たす解が得られるまで式 (21) の更新を繰り返して (κ を小さくして)、上記連立 LMI を解く。解が得られた時点で、 $\Delta\beta^k$ を用いて、 $\beta^{k+1} := \beta^k + \Delta\beta^k$, $k \leftarrow k+1$ と更新して、Step 2 に戻る。□

提案する設計アルゴリズムの特徴を以下に述べる。

- 著者の知る限り、従来の統合化設計アルゴリズムはすべて LTI システムを対象としたものであった。本アルゴリズムは、グリiddingによる近似を経てはいるものの LPV システムに対してはじめて提案された統合化設計手法である。
- Step 3 において、 $\Delta\gamma < 0$ が成立するまで変数の更新量を支配する定数 κ を調整している。これより、同一グリiddingの下で初期設計パラメータ β の局所的最適解への収束は保証される。
- 式 (15) の BMI の Δ に関する 2 次項を無視した LMI (式 (18)) が意味を持つように、 β の更新量を小さくしていることが、結果として式 (17) の一次近似の精度も保っている。よって、本アルゴリズムは、 P の状態方程式中の係数行列が β の非線形関数となっても適用可能である。文献⁽¹¹⁾⁽¹²⁾では、LTI システムに対し統合化設計問題を BMI 問題で定式化し、構造系およびコントローラの設計変数の一方を固定した LMI を繰り返し解く手法が提案されているが、これらの手法には、制御対象の状態方程式 (またはディスクリプタ表現) の係数行列が制御対象に存在する設計変数の線形関数であるという制限があった。その意味で、本アルゴリズムはこれらの文献⁽¹¹⁾⁽¹²⁾の手法を超えている。

注意 1 P の状態方程式の係数行列のうち、行列 A, B_1, C_1 が $\alpha(t)$ の線形関数で、他の行列が定数行列の場合、ゲインスケジュールドコントローラの設計は (グリiddingなどの近似なく) 著しく簡単化される⁽⁴⁾。すなわち、集合 $\mathcal{A}$ を n_α 次元の超直方体と考えた場合の端点 $\mathcal{V}(\mathcal{A}) := \{\alpha_v^1, \dots, \alpha_v^{n_\alpha}\}$, $n_v := 2^{n_\alpha}$ 上で、以下の LMI 中の $\gamma > 0$ を最小化する定数行列 $X, Y \in \mathcal{S}^{n_x}$, $\hat{A} \in \mathcal{R}^{n_x \times n_x}$, $\hat{B} \in \mathcal{R}^{n_x \times n_y}$, $\hat{C} \in \mathcal{R}^{n_u \times n_x}$ ($i = 1, \dots, n_v$) を求めればよい⁴。

$$H(i) < 0, \quad (22)$$

$$H(i) := \begin{bmatrix} H_{11}(i) & H_{12}(i) & H_{13}(i) & H_{14}(i) \\ H_{12}(i)^T & H_{22}(i) & H_{23}(i) & H_{24}(i) \\ H_{13}(i)^T & H_{23}(i)^T & -\gamma I & 0 \\ H_{14}(i)^T & H_{24}(i)^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$H_{11}(i) := A(\alpha_v^i)^T X + X A(\alpha_v^i) + \hat{B} C_2 + C_2^T \hat{B},$$

$$H_{12}(i) := \hat{A} + A(\alpha_v^i)^T, \quad H_{13}(i) := X B_1(\alpha_v^i) + \hat{B} D_{21},$$

$$H_{14}(i) := C_1(\alpha_v^i),$$

$$H_{22}(i) := A(\alpha_v^i) Y + Y A(\alpha_v^i)^T + B_2 \hat{C} + \hat{C}^T B_2,$$

$$H_{23}(i) := B_1(\alpha_v^i), \quad H_{24}(i) := C_1(\alpha_v^i) Y + D_{12} \hat{C},$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

本論文で提案した統合化設計アルゴリズムは、 P に関して文献⁽⁴⁾の条件が成立している場合でも、式 (13), (14) で与えられているゲインスケジュールドコントローラ設計条件を式 (22), (23) に変更することにより、そのまま用いることができる。

注意 2 本論文では、最小化する評価指標を閉ループ系の $\mathcal{L}_2$ ゲイン γ とした。構造の強度や重量等の構造系に関する ($\beta \in \mathcal{B}$ のみに依存する) 評価指標を J_s とおき J_s の最小化問題が LMI に帰着されるか近似可能な場合は、以下の新しい重みつき和で表される評価指標 $J := \lambda \gamma + (1 - \lambda) J_s$, $0 \leq \lambda \leq 1$ を定義すれば、 J を最小化するために本論文で提案した設計アルゴリズムをそのまま使⁵ できる。

注意 3 本論文では、スケジューリングパラメータ $\alpha(t)$ と構造系の設計変数 β は別個のものであると仮定し、問題設定および設計アルゴリズムの提案を行ってきた。もし $\alpha(t)$ の一部または全部が、式 (3) や (4) の下で変動はするものの設計者によって調整可能な場合は、それらの調整可能なスケジューリングパラメータを何らかの指標に基づいて適切に設計することが可能となり、新たな設計自由度が発生する。このような問題の例と

⁴文献⁽⁴⁾では、コントローラ設計のためのより規模の小さい LMI 条件が導出されている。

作量 $u(t)$ を $z_2(t) := \zeta u(t)$ で評価するためのスカラー重みである。 $w(t) := [w_r(t)^T w_u(t)^T]^T$, $z(t) := [z_1(t)^T z_2(t)^T]^T$ および $y(t) = w_r(t) - [q_0(t) \ q_1(t)]^T$ とおくと、式 (1) の一般化プラント P の係数行列は以下になる。

$$\begin{aligned} A(\alpha(t), \beta) &= [a_{ij}], B_2(\alpha(t), \beta) = [b_i], i, j = 1, \dots, 4, \\ B_1 &:= [0_{4 \times 2} \ B_2(\alpha(t), \beta)], C_1 = [I \ 0_{2 \times 2}], C_2 := -C_1, \\ D_{11} &:= 0_{3 \times 3}, D_{12} := [0 \ 0 \ \zeta]^T, D_{21} := [I \ 0_{2 \times 1}] \quad (25) \end{aligned}$$

$A(\alpha(t), \beta)$ および $B_2(\alpha(t), \beta)$ の詳細は付録で示す。

$\zeta = 1$ として、3.2 節で提案された設計アルゴリズムによって β_{opt} およびゲインスケジュールドコントローラ K_{opt} を求めた。式 (8)–(12) の各行列は、それぞれ $X = X_0 + \alpha(t)X_1$, $Y = Y_0 + \alpha(t)Y_1$, $\hat{A} = \hat{A}_0 + \alpha(t)\hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_0 + \alpha(t)\hat{B}_1$, $\hat{C} = \hat{C}_0 + \alpha(t)\hat{C}_1$ ($X_i, Y_i \in \mathcal{S}^4$, $\hat{A}_i \in \mathcal{R}^{4 \times 4}$, $\hat{B}_i \in \mathcal{R}^{4 \times 2}$, $\hat{C}_i \in \mathcal{R}^{1 \times 4}$, $i = 0, 1$) とおき、スケジュールリングパラメータ $\alpha(t)$ は、 $\mathcal{S}^g := \{\alpha_g^1, \dots, \alpha_g^{n_g}\}$, $\alpha_g^i = \pi[-1/6 + (i-1)/60]$ ($i = 1, \dots, 21$) のようにグリッドディングした。式 (4) の $\alpha(t)$ に関する制約は、 $\mathcal{D}_\alpha = \{\alpha(t) | -4 \leq \alpha(t) \leq 2\}$ とした。なお、集合 $\mathcal{D}_\alpha$ は、試行的な統合化設計後に $\alpha(t) = \dot{q}_1(t)$ の初期値応答を計算し決定した。

以上の条件下で、提案する設計手法を用いて統合化設計を行った結果を表 2 に示す。計算には、PC (CPU: Intel Pentium IV 3.0GHz, RAM: 512MB) 上で MATLAB を用い約 30 分を要した。初期時と比較して、閉ループ系の $\mathcal{L}_2$ ゲインは約 42% 減少していることが分かる。図 3 に、 $x(0) = [0 \ \pi/6 \ 0 \ 0]^T$ としたときの初期値応答を示す。なお、以下で示されるすべての応答は、制御対象を式 (24) の非線形状態方程式とした非線形シミュレーションの結果である。初期時、最適化後共にゲインスケジュールド制御により安定化が達成されているが、最適化後は、初期時と比べて操作量 $u(t)$ の最大絶対値は小さくなっているにも関わらず、 $q_0(t)$ および $q_1(t)$ の応答は明らかに改善しており、統合化設計の効果が現れている。なお、本設計例においては、異なる l_0, l_1 の初期値から最適化を行った場合も、結果は本章で示したものとほぼ同様であった。

ゲインスケジュールド制御の有効性を確認するため、最適化された設計変数 β_{opt} で式 (24) を平衡点 x_e まわりに線形化した後 $q_1(t)$ を微小と仮定して求められた倒立振子の LTI 近似システムに対して、本設計例と同一の w, z ($\zeta = 1$) で閉ループ系の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを最小化するコントローラを設計し⁵、図 3 と同じ初期条件で非線形シミュレーションを行った結果を図 4 に示す。

Table 2 Result of the Integrated Design

	Initial Value	Optimized Value
γ	110.1	63.7
l_0	1.0[m]	0.812[m]
l_1	1.0[m]	0.418[m]

Fig. 3 Initial Response (Comparison between the Initial and the Optimized Structure)

Fig. 4 Initial Response (Comparison between the Gain Scheduled Control and $\mathcal{H}_\infty$ Control Law)

ゲインスケジュールドコントローラでは、システムは安定化されているのに対し、LTI コントローラである $\mathcal{H}_\infty$ コントローラでは、閉ループ系を安定化することが出来ず応答は発散している。以上の結果から、本論文で提案された構造系とゲインスケジュールド制御系の統合化設計の有効性が示された。

⁵LTI システムにおいては、 $\mathcal{L}_2$ ゲインと $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの定義は等価である。

5. 結 言

本論文では, LPV システムで表される制御対象中に存在する設計変数と, ゲインスケジュールドコントローラを同時に最適設計する一手法を提案した. 本文の内容を以下にまとめる.

- 閉ループ系の $\mathcal{L}_2$ ゲインを規範として, LPV システムに対する構造系と制御系の統合化設計問題を定式化した.
 - 反復 LMI 近似による繰り返し設計アルゴリズムを提案した. 本アルゴリズムは, 制御対象の状態方程式の係数行列が構造系の設計変数の非線形関数となっている場合でも, 設計変数 β を局所的最適解に収束させることができる.
 - 回転型倒立振子に対する設計例によって, 提案手法の有効性を示した.
- 今後の課題を以下に示す.
- 構造系の設計変数がスケジューリングパラメータと一致する場合に対する検討.
 - 提案する設計手法の実システムへの適用

文 献

- (1) Onoda, J. and Haftka, R. T., An Approach to Structure/Control Simultaneous Optimization for Large Flexible Spacecraft, *AIAA J.*, Vol. 25, No. 8 (1987), pp. 1133-1138.
- (2) Obinata, G., Simultaneous Optimal Design of Structural and Control Systems, *J. of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 36, No. 4 (1997), pp. 254-261.
- (3) Kajiwara, I., Simultaneous Design of Structure and Control System Considering Performance and Stability, *Systems, Control and Information*, Vol. 44, No. 11 (2000), pp. 623-631.
- (4) Apkarian, P. et al., Self-Scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-varying Systems: a Design Example, *Automatica*, Vol. 31, No. 9 (1995), pp. 1251-1261.
- (5) Apkarian, P. and Adams, R. J., Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 6, No. 1 (1998), pp. 21-32.
- (6) Wu, F. and Grigoriadis, K. M., LPV Systems with Parameter-varying Time Delays: Analysis and Control, *Automatica*, Vol. 37, No. 2 (2001), pp. 221-229.
- (7) Tuan, H. D. et al., Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control for an Integrated Suspension System via Parameterized Linear Matrix Inequality Characterization, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 9, No. 1 (2001), pp. 175-185.
- (8) Gahinet, P. et al., *LMI Control Toolbox for Use with MATLAB*, (1995), The MathWorks, Inc.
- (9) Hiramoto, K. and Grigoriadis, K. M., Integrated Design of Structural and Control Systems with a Homotopy Like Iterative Method, *Proc. of American Control Conference*, (2005-6), pp. 2510-2515.
- (10) Hassibi, A. et al., Low-Authority Controller Design via Convex Optimization, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 22, No. 6 (1999), pp. 862-872.
- (11) Tanaka, H. and Sugie, T., General Framework and BMI Formulae for Simultaneous Design of Structure and Control Systems, *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 34, No. 1 (1998), pp. 27-33.
- (12) Lu, J. and Skelton, R. E., Integrating Structure and Control Design to Achieve Mixed H_2/H_∞ Performance, *Int. J. of Control*, Vol. 73, No. 16 (2000), pp. 1449-1462.
- (13) Ishii, C. et al., Swing-Up and Stabilization Control for an Inverted Pendulum System via Nonlinear Robust H_∞ Control, *Trans. of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 62, No. 599 (1996), pp. 2666-2673.

付 録

式 (25) の行列 $A(\alpha(t), \beta) = [a_{ij}]$, $B_2(\alpha(t), \beta) = [b_i]$ ($i, j = 1, \dots, 4$) は, 以下のように表される.

$$a_{11} = a_{12} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{41} = 0,$$

$$a_{13} = a_{24} = 1, \quad b_1 = b_2 = 0,$$

$$a_{32} = \frac{\xi_{32}}{\psi^2}, \quad a_{33} = \frac{\xi_{33}l_1^3}{\psi}, \quad a_{34} = \frac{\xi_{34}}{\psi}, \quad a_{42} = \frac{\xi_{42}}{\psi^2},$$

$$a_{43} = \frac{\xi_{43}l_0l_1^2}{\psi}, \quad a_{44} = \frac{\xi_{44}}{\psi}, \quad b_3 = \frac{\chi_3l_1^3}{\psi}, \quad b_4 = \frac{\chi_4l_0l_1^2}{\psi},$$

$$\psi = \psi_1l_0^3l_1^3 + \psi_2l_1^6 + \psi_3l_0^2l_1^4,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \theta_0 + \theta_1 \right) \theta_1, \quad \psi_2 = \frac{1}{12} \theta_1^2 \sin^2 \alpha(t), \quad \psi_3 = -\frac{1}{4} \theta_1^2 \cos^2 \alpha(t)$$

$$\xi_{32} = \xi_{321}l_0^4l_1^7 + \xi_{322}l_0l_1^{10} + \xi_{323}l_0^3l_1^8,$$

$$\xi_{321} = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{3} \theta_0 + \theta_1 \right) \theta_1^3 \cos 2\alpha(t),$$

$$\xi_{322} = \frac{1}{48} \theta_1^4 g \sin^2 \alpha(t), \quad \xi_{323} = \frac{1}{16} \theta_1^4 g \cos^2 \alpha(t) (4 \cos^2 \alpha(t) - 1),$$

$$\xi_{33} = -\frac{1}{3} d_0 \theta_1, \quad \xi_{34} = \frac{1}{2} d_1 \theta_1 \cos \alpha(t),$$

$$\xi_{42} = \xi_{421}l_0^3l_1^8 + \xi_{422}l_1^1 + \xi_{423}l_0^2l_1^9 + \xi_{424}l_0^6l_1^5 + \xi_{425}l_0^5l_1^6,$$

$$\xi_{421} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{3} \theta_0 + \theta_1 \right) \theta_1^3 g \sin^2 \alpha(t) \cos \alpha(t),$$

$$\xi_{422} = \frac{1}{96} \theta_1^4 g \sin^4 \alpha(t) \cos \alpha(t),$$

$$\xi_{423} = -\frac{1}{32} \theta_1^4 g \sin^2 \alpha(t) \cos \alpha(t) (\cos^2 \alpha(t) + 2),$$

$$\xi_{424} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \theta_0 + \theta_1 \right) \theta_1^2 g \cos \alpha(t),$$

$$\xi_{425} = -\frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} \theta_0 + \theta_1 \right) \theta_1^3 g \cos \alpha(t) (1 + \sin^2 \alpha(t)),$$

$$\xi_{43} = \frac{1}{2} d_0 \theta_1 \cos \alpha(t), \quad \xi_{44} = \xi_{441}l_0^3 + \xi_{442}l_1^3,$$

$$\xi_{441} = -d_1 \left(\frac{1}{3} \theta_0 + \theta_1 \right), \quad \xi_{442} = -\frac{1}{4} d_1 \theta_1 \sin^2 \alpha(t),$$

$$\chi_3 = \frac{1}{3} \theta_1, \quad \chi_4 = -\frac{1}{2} \theta_1 \cos \alpha(t), \quad \theta_0 = \frac{\pi \phi_0^2}{4} \rho, \quad \theta_1 = \frac{\pi \phi_1^2}{4} \rho$$

行列 $A(\alpha(t), \beta)$ および $B_2(\alpha(t), \beta)$ は, 設計変数である l_0, l_1 に関する複雑な非線形関数になっている. よって, 本設計例に対しては, 文献⁽¹¹⁾⁽¹²⁾の手法は適用できない. 本論文で提案した統合化設計手法は, LMI による 1 回の設計変数の更新量はその一次近似が有効になる範囲内に制限されるため, このような場合でも有効である.