音場の見かけの固有振動数問題を回避するための境界要素解析法*
(第 2 報, 改訂版)田中正隆^{*1}, 松本敏郎^{*2}, 荒井雄理^{*3}A Boundary Element Analysis for Avoiding the Fictitious
Eigenfrequency Problem in Acoustic Field
(2nd Report, Revised Version)Masataka TANAKA^{*4}, Toshiro MATSUMOTO and Youri ARAI^{*4} Mechanical Systems Engineering, Shinshu University,
4-17-1 Wakasato, Nagano-shi, Nagano, 380-8553 Japan

This paper is concerned with an approach for avoiding the fictitious eigenfrequency problem in boundary element analysis of two-dimensional acoustic problems governed by Helmholtz equation. It is well known that in solving without any care the external acoustic problem by means of the boundary integral equation, the solution is violated at the eigenfrequencies of the internal problem. The present paper shows the effectiveness to circumvent the fictitious eigenfrequency problem by using the combined integral equation, which is originally proposed by Burton-Miller for constant elements, when employing the quadratic boundary element. On the other hand, we also propose a new approach to avoid that problem, which is for the quadratic boundary element. In this new approach, the Burton-Miller integral equation is used at the end points of element, while the normal derivative boundary integral equation multiplied by some parameter is applied to the other node of element. The proposed approach is implemented, and its effectiveness is demonstrated through comparison of the numerical results obtained by the developed computer code with other solutions.

Key Words: Computational Mechanics, Boundary Element Method, Acoustic, Sound, Helmholtz Equation, Integral Equation, Fictitious Eigenfrequency

1. 緒 言

Helmholtz 方程式により支配される音響問題において, 境界積分方程式を用いて無限領域を含む外部境界値問題を解く際に, 見かけの固有振動数問題の影響により解の精度が著しく低下するという問題が生じる⁽²⁾. 解こうとする問題が内部境界値問題であれば物理的な固有振動数に対応していることを意味するが, 外部境界値問題において得られる解はそれ自体に物理的な意味はない. 見かけの固有振動数問題が生じる原因は, 外部問題や, 領域に穴が開いていて補領域に有界な孤立部分がある問題では, 積分方程式がそれらの領域における音圧が 0 となることを保証しないことである. このことより, Helmholtz 方程式に支配される外部境界値問題を取り扱う場合, この問題を回避して精度の良い解を求めることが重要になる.

見かけの固有振動数問題を回避するために, 具体的に以下のような対策が取られている.

1. 考えている領域の補領域にいくつかの点 (外点) を配置し, 最終的な方程式系を最小二乗法で解く⁽⁷⁾
2. 通常の境界積分方程式とそれを微分した導関数境界積分方程式を線形結合した式を境界積分方程式として解く (Burton - Miller)⁽⁸⁾
3. 補領域で音圧が 0 となるように基本解を修正した積分方程式で解く⁽¹⁰⁾
4. 見かけの固有振動数に対応する解をその周辺の振動数に対する解を補間して求める⁽¹¹⁾

本論文ではまず, 見かけの固有振動数問題対策に非常に有効であると知られている Burton - Miller の手法を適切な結合係数の選択のもとで高次要素に適用する. そして, 解析解が得られる呼吸円筒の問題および半無限空間内に直壁が 1 つ存在する問題について数値解析を行いその有効性を確認する. 次に, 以前著者らが提案した手法⁽⁶⁾の適用可能範囲を調べ, さらに新しい回避手法を提案し, その有効性を確認する.

* 原稿受付 2005 年 10 月 27 日.

改訂受付 2006 年 3 月 3 日.

^{*1} 正員, 信州大学工学部 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1).^{*2} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町).^{*3} 学生員, 信州大学大学院工学系研究科.

E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp

2. 理 論

本研究で取り扱う外部境界値問題を境界積分方程式を用いて解く場合に、対応する内部問題の固有振動数に等しい周波数において方程式系が不定となり、物理的に意味の無い解が得られてしまう。これを見かけの固有振動数問題と呼んでいる⁽²⁾。そこで本研究ではまず、この問題を回避するのに有効であると知られている Burton - Miller の手法を高要素に適用する。この手法に関する詳細は文献⁽⁸⁾に記されているため参照していただきたい。次に本報では、2次境界要素を用いる場合について新しい回避手法を提案する。すなわち、境界上の全節点に対して Burton - Miller 型の結合境界積分方程式を適用するのではなく、要素を構成する節点で結合境界積分方程式とその結合係数を乗じた導関数境界積分方程式の2式を使い分けることで見かけの固有振動数問題を回避する手法である。2つの式の適用方法に関しては、要素端点で結合境界積分方程式を適用し、中間節点で結合係数を乗じた導関数境界積分方程式を適用する、あるいは要素端点で結合係数を乗じた導関数境界積分方程式を適用し、中間節点で結合境界積分方程式を適用するという2つの可能性がある。どちらの適用方法でも見かけの固有振動数の影響を回避した解が得られていることを確認しているが、本報では前者の適用方法による数値結果を示す。

以下に本研究で用いる境界積分方程式とその法線方向導関数境界積分方程式の定式化について簡単に記述する。

2.1 境界積分方程式

微小振幅の振動を考えるものとし、角振動数 ω で定常振動している場合には、音場の支配微分方程式は次の非同次 Helmholtz 方程式となる⁽¹²⁾⁽¹³⁾。

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) + f(x) = 0 \quad (1)$$

ただし、 $p(x)$ は音圧、 $f(x)$ は内部音場の集中音源等を表すソース項である。また、 k は波数であり C_0 を音速とすれば次式で表される。

$$k = \frac{\omega}{C_0} \quad (2)$$

式(1)において、境界条件は以下のように与えられる。

$$p(x) = \bar{p}(x) \quad (3)$$

$$q(x) = \frac{\partial p}{\partial n}(x) = \bar{q}(x) \quad (4)$$

ただし、 $q(x)$ は境界の外向き法線方向の粒子速度 $v(x)$ と媒質密度 ρ を用いて以下のように表すことができる。

$$q(x) = -i\omega\rho v(x) \quad (5)$$

Helmholtz 方程式 (1) に対して境界要素法に従った定式化を行い関数 $f(x)$ として集中音源を想定することで、以下の正則化された境界積分方程式を得る⁽¹⁾⁽³⁾

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{q^*(x, y) - Q^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} Q^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} p^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) + Ip^*(x^s, y) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし I は集中音源の強さであり、 x^s は音源の座標である。また、基本解の成分はそれぞれ次のようである。

$$p^*(x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (7)$$

$$q^*(x, y) = \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (8)$$

$$Q^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (9)$$

ここで r はソース点 y と観測点 x との距離であり、 $H_0^{(2)}$ 、 $H_1^{(2)}$ はそれぞれ0次と1次の第2種 Hankel 関数である。

通常の音響問題では、境界積分方程式 (6) を境界要素で離散化して音圧 p と粒子速度 v に関する代数方程式を求め、この方程式系に境界条件を適用して解けばよい⁽¹⁾。しかしながら、本研究で取り扱う外部問題を解く場合には、対応する内部問題の固有振動数に等しい周波数で見かけの固有振動数問題の影響により物理的に意味のない解が得られてしまう。そこで以下に示す法線方向導関数境界積分方程式を準備する。

2.2 法線方向導関数境界積分方程式

本研究で用いる法線方向導関数境界積分方程式は、境界積分方程式 (6) をソース点 y で微分した関係を正則化した表示式を用いる。以下にはその導出手順を示すが、説明を簡潔にするために、正則化に関わりが無い集中音源に関する項は途中の表示式では省略してあることに注意されたい。式 (6) をソース点 y で微分した次式を考える。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{q_{,j}^*(x, y) - Q_{,j}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} Q_{,j}^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ & - \left\{ \int_{\Gamma} Q^*(x, y) d\Gamma(x) \right\} p_{,j}(y) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} p_{,j}^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、基本解の微分 $p_{,j}^*(x, y)$ は以下のように正則な部分と特異な部分に分けることができる⁽³⁾。

$$p_{,j}^*(x, y) = p_{R,j}^*(x, y) + u_{,j}^*(x, y) \quad (11)$$

$p_{R,j}^*(x, y)$ は正則な項であり, $u_j^*(x, y)$ は Laplace の基本解の微分であり特異性を有する項である. また, 式 (10) の左辺第3項はソース点 y の位置により決まる定数 $c(y)$ との関係があり, それと式 (11) を考慮することで式 (10) は以下になる.

$$\begin{aligned} c_{ij}(y)p_i(y) + \int_{\Gamma} \{q_{,j}^*(x, y) - Q_{,j}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ + \int_{\Gamma} Q_{,j}^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ = -i\omega\rho \int_{\Gamma} \{p_{,j}^*(x, y) - u_{,j}^*(x, y)\} v(x) d\Gamma(x) \\ - i\omega\rho \int_{\Gamma} u_{,j}^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) において基本解 $u_j^*(x, y)$ および $Q_{,j}^*(x, y)$ は2次元問題の場合, それぞれ強い特異性 $O(1/r)$ と超特異性 $O(1/r^2)$ を有している. そこで, 積分を直接数値的に評価可能にするために, 音圧の勾配が一様である場を考えて正則化を行う⁽⁴⁾. 一様な音圧勾配の場において $p(x)$ および $q(x)$ はそれぞれ以下になる.

$$p(x) = p(y) + r_m(x, y)p_{,m}(y) \quad (13)$$

$$q(x) = n_m(x)p_{,m}(y) \quad (14)$$

ここで $r_m = x_m - y_m$ であり, n_m は外向き単位法線ベクトルの成分である. 式 (13), (14) を Laplace 方程式の正則化された境界積分方程式を微分した関係式⁽⁵⁾ に代入すれば, 次の積分方程式を得る.

$$\begin{aligned} c_{ij}(y)p_i(y) + \int_{\Gamma} Q_{,j}^*(x, y)r_m(x, y)p_{,m}(y) d\Gamma(x) \\ = \int_{\Gamma} u_{,j}^*(x, y)n_m(x)p_{,m}(y) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (15)$$

式 (12) から式 (15) を差し引き, 両辺に $n_j(y)$ を乗じ, これまで省略していた集中音源に関する項を追加すれば, 以下の正則化された法線方向導関数境界積分方程式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \{\tilde{q}^*(x, y) - \tilde{Q}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ + \int_{\Gamma} \tilde{Q}^*(x, y) \{p(x) - p(y) - r_m(x, y)p_{,m}(y)\} d\Gamma(x) \\ = -i\omega\rho \int_{\Gamma} \{\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)\} v(x) d\Gamma(x) \\ - i\omega\rho \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) \{v(x) - n_m(x)p_{,m}(y)\} d\Gamma(x) \\ + I\tilde{p}^*(x^s, y) \end{aligned} \quad (16)$$

ただし $\tilde{() } = \partial()/\partial n(y)$ であり, 基本解の各成分は以下になる.

$$\tilde{u}^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (17)$$

$$\tilde{Q}^*(x, y) = \frac{1}{2\pi r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) + n_j(x)n_j(y) \right\} \quad (18)$$

$$\tilde{p}^*(x, y) = \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}^*(x, y) = \frac{i}{4} k \left[k H_0^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \\ \left. - H_1^{(2)}(kr) \frac{1}{r} \left\{ n_j(x)n_j(y) + 2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right\} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

3. 数 値 解 析

3.1 例題1 数値解析モデルとして, 図1のように無限空間内に呼吸円筒が1つ存在する場合を考える. 境界は2次のアイソパラメトリック要素を用いて離散化を行った. 媒質密度 $\rho = 1.2$ [kg/m³], 伝播速度 $c = 340$ [m/s], 呼吸円筒の半径 $a = 0.2$ [m] とした. 呼吸円筒の表面は $v = 1.0$ [m/s] の境界条件を与え, 円筒表面を1様に境界要素分割するとし, 全要素数は192とした. 解析する周波数は1 [Hz] から2 [kHz] を0.5 [Hz] 刻みで解析を行った. 結果として示すのは, 図1における8つの評価点の音圧の絶対値の平均値と解析解による相対誤差を以下の式で計算したものである.

$$\text{Relative error}[\%] = \frac{|P_N - P_A|}{P_A} \times 100 \quad (21)$$

ここで P_N は各観測点で数値解析により得られた音圧の絶対値の平均値, P_A は解析解による値である. また, Burton - Miller による積分方程式を適用する際の結合係数は Cunefare - Koopmann⁽⁹⁾ に従い i/k として解析を行った.

Fig. 1 Analysis model 1

図2に通常の境界積分方程式 (6) (以下 OBIE) を適用して得られた結果と解析解との相対誤差を示す. 数

値解析結果より、見かけの固有振動数問題の影響で解の精度が低下している波数域が存在することが確認できる。

図3に以前著者らが提案した手法、即ち要素端点で式(6)を適用し、中間節点において式(16)を適用する手法を用いて得られた解と解析解との相対誤差を示す。数値解析結果より、波数 $ka = 5.5$ 付近で見かけの固有振動数問題の影響をうけて解の精度が低下していることがわかり、呼吸円筒の問題に関しては波数 $ka = 5$ までこの手法は有効であるがそれ以上の周波数では適用できないことがわかる。

図4に全節点に式(6)と式(16)を結合した Burton - Miller 型の境界積分方程式を適用して得られた結果と解析解との相対誤差を示す。数値解析結果より、この方法では見かけの固有振動数問題の影響が回避できていることが確認できる。

図5に要素端点において Burton - Miller 型の境界積分方程式を適用し、中間節点において法線方向導関数境界積分方程式(16)(以下 NDBIE)に i/k を乗じたもの(以下 Hybrid method)を適用して得た解と解析解との相対誤差を示す。数値解析結果より、この手法でも見かけの固有振動数問題の影響を回避できることがわかる。

Fig. 2 Numerical results 1

3.2 例題2 解析対象として図6に示すように、半無限空間内に直壁が存在する場合を考える。媒質密度 $\rho = 1.2[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、伝播速度 $c = 340[\text{m}/\text{s}]$ 、点音源 A の強さを $(2.0, 0.0)[\text{Pa}]$ とし、壁の厚さ $t = 0.34[\text{m}]$ 、高さ $h = 3.0[\text{m}]$ と与えた。周波数は $1[\text{Hz}]$ から $2[\text{kHz}]$ を $0.5[\text{Hz}]$ 刻みで解析を行った。評価点は地表面に3点設置し、各点で得られる音圧の絶対値の平均値を音圧レベルに変換したものをプロットする。数値解析するにあたって直壁表面を要素の長さが $0.02[\text{m}]$ の境界2次要素を用いて全要素数317で一様に離散化し、直壁と路面は完全反射とした。

Fig. 3 Numerical results 2

Fig. 4 Numerical results 3

Fig. 5 Numerical results 4

図7にOBIE(6)を適用して得られた結果を示す。数値解析結果より、特定の波数域において見かけの固有振動数問題の影響がでていることがわかる。

図8に以前著者らが提案した手法を適用して得られた結果を示す。積分方程式の併用の方法は、先の呼吸円筒の例題と同様である。数値解析結果より、 $kt = 6$ 付近までは見かけの固有振動数問題を回避した解を得られていることがわかるが、それ以上の波数域では解の精度が非常に落ちていることが確認できる。

Fig. 6 Analysis model 2

図9にBurton - Millerにより提案された手法を適用した結果を示す。2つの積分方程式を結合する際の係数は、呼吸円筒問題の場合と同様 i/k である。数値解析結果より、見かけの固有振動数の影響を回避した数値解が求められていることが確認できる。

図10にHybrid methodを適用して得られた数値結果を示す。数値解析結果よりBurton - Millerの手法同様に見かけの固有振動数問題を回避できていることが確認できる。

Fig. 7 Numerical results 5

図11, 図12に最初に見かけの固有振動数問題の影響で解が乱れる $kt = 2 \sim 4$ におけるOBIEの結果とBurton - Millerの手法とHybrid methodによる数値結果をそれぞれ比較して示す。2つの数値結果の比較より、Hybrid methodを適用しても見かけの固有振動数問題を回避しつつ高精度の解が得られていることがわかる。

4. 結 論

境界要素法を用いてHelmholtz方程式で支配される定常音響問題を解析する際に現れる見かけの固有振動数問題を回避する手法に関して考察し、新しい回避手

Fig. 8 Numerical results 6

Fig. 9 Numerical results 7

法を提案した。まず、Burton - Millerの考え方を適切な結合係数のもとで高次要素に適用し、その有効性を数値解析により確認した。また、以前に著者らが提案した、2つの境界積分方程式を要素を構成する節点で使い分けるという手法の適用範囲が極めて狭いことも確認した。数値解析結果より以前に提案した手法は、ある程度の波数域までは有効であるが、高次の波数域

Fig. 10 Numerical results 8

Fig. 11 Numerical results 9

Fig. 12 Numerical results 10

では見かけの固有振動数問題を回避できないことがわかった。さらに、本論文で提案した Hybrid method は、Burton - Miller の手法と同様に、見かけの固有振動数の影響を回避した解を得ることができることを示した。

本手法は全節点において結合型の積分方程式を適用しないため、Burton - Miller の手法よりも係数行列の

計算時間を低減できる。従って細かな要素分割を必要とする高次の周波数の問題を取り扱う際には非常に有効であると考えられる。

文 献

- (1) Tanaka, M. et al., *Boundary Element Method* (in Japanese), (1991), Baifukan.
- (2) Kobayashi, S. et al., *Wave Analysis and Boundary Element Method* (in Japanese), (2000), Kyoto University Press Online.
- (3) Matsumoto, T. Tanaka, M., An Alternative Discretization Technique for Regularized Boundary Integral Equation, *Transactions of the JASCOME, Journal of BEM technology conference*, Vol.1, (1991), pp.7-12.
- (4) Arai, M. et al., Highly Accurate Analysis by Boundary Element Method Based on Uniform Gradient Condition (Application for Formulation of Classical Potential Problems), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.61, No.581, (1995), pp.161-168.
- (5) Matsumoto, T. et al., Evaluation of the Hypersingular and Regularized Boundary Integral Equations for the Boundary Potential Gradients in 2D Field, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.64, No.619, (1998), pp.743-750.
- (6) Tanaka, M. et al., A New Method for Avoiding the Fictitious Eigenfrequency Problem in Boundary Element Analysis of Acoustic Problems (Consideration on 2D Problems), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.71, No.711, (2005), pp.9-16.
- (7) H. A. Schenck, Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.44, No.1, (1968), pp.41-58.
- (8) A. J. Burton, and G. F. Miller, The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary-Value Problems, *Journal of Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, Vol.323, (1971), pp.201-210.
- (9) K. A. Cunefare, and Gary Koopmann, A Boundary Element Method for Acoustic Radiation Valid for All Wavenumbers, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.85, No.1, (1989), pp.39-48.
- (10) K. Bord, On the Uniqueness of Solution for All Wavenumbers in Acoustic Radiation, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.76, No.4, (1984), pp.1238-1443.
- (11) P. K. Banerjee and R. P. Shaw (eds.), *Developments in Boundary Element Methods*, 2, (1982), Chapt.7, pp.177-210, Applied Science Publishers.
- (12) Itimiya, R., *Acoustical Engineering of Mechanics* (in Japanese), (1992), Corona Publishing Co.,Ltd.
- (13) Acoustical Society of Japan (ed.), *Basic Acoustical Engineering* (in Japanese), (1990), Corona Publishing Co.,Ltd.