減速機の摩擦を考慮した位置制御系の散逸エネルギー最小化*

朱 一 庭^{*1}, 泉 照 之^{*2}, 周 海^{*2}

Minimization of Dissipated Energy in Position Control System Considering the Friction of Gears

Yiting ZHU, Teruyuki IZUMI^{*3} and Hai ZHOU^{*3} Department of Electronic and Control Systems Engineering, Shimane University,
1060 Nishi-Kawatsu-cho, Matsue-shi, Shimane, 690-8504 Japan

This paper discusses on optimal current and velocity functions which minimize the dissipated energy of a servo system with a reduction gear train. Coulomb friction of the gears is represented by the efficiency of the gears and assumed to be proportional to the absolute value of the current of a motor. The optimal functions can be obtained from an optimal control theory by introducing a zero cross time t_c , when the current is changed from positive to negative. As the dissipated energy can be given as a function of t_c , the optimal zero cross time t_c^* minimizing the energy can be represented by a simple function of the efficiency of the gears. This method is expanded into the case including the viscous friction in addition to the Coulomb friction. The influence of the viscous frictional coefficient upon the optimal zero cross time t_c^* is examined by simulations. The expression of the Coulomb and the viscous frictions is verified by experiments using planetary gears with a DC motor.

Key Words: Position Control, Minimum Energy, Optimal Velocity Function, Reduction Gear, Coulomb Friction, Efficiency

1. ま え が き

ロボットや携帯用カメラなどメカトロニクス機器では、アクチュエータとしてモータが多く使用されている。モータで高トルクを発生させる場合、大電流を流す必要があるためモータは大型となる。したがって、小型モータで高トルクを得るには減速機が必要である。減速機は、摩擦を伴うので、機械損を増加させる。この損失は、大型のメカトロニクス機器では無駄なエネルギーを浪費することになり、機器の省エネルギー化に逆行する。また、携帯機器や歩行ロボットなどでは電池の蓄電量を短期間に消耗させる欠点につながる。減速機の減速比の選定については、モータから負荷へのトルク伝達を最大にするイナーシャマッチング法が知られている⁽¹⁾。また、モータの容量を最小にするモータや減速機を選定する方法も提案され、その消費エネルギーが検討されている⁽²⁾。一方、位置制御において消費エネルギーを少なくする動かし方の研究もある⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾。これらは、従来台形速度関数が多く用いられているのに対して、モータのジュール熱損と摩擦熱損を最小にする速度関数を決める研究である。しかし、

減速機内の歯車のクーロン摩擦と粘性摩擦が考慮されていない。

本論文は、始動・停止を繰り返すサーボ系が減速機を含む場合の散逸エネルギーを考え、それを最小にする最適な電流関数や速度関数を求める。まず、減速機に含まれるクーロン摩擦力を減速機の効率を用いて表わし、それがモータ電流の絶対値に比例するとして駆動系の運動方程式を作った。そして、決められた動作時間で目標角度に達するために散逸されるエネルギーを考え、それを最小化するために最適制御理論を用いた。その理論は、クーロン摩擦による駆動系の非線形性のために、そのまま適用できない。そこで、電流が正から負に切り替わる零交差時間を導入した。そして、散逸エネルギーが零交差時間の関数になることを導き、それを最小にする最適な零交差時間が減速機の効率に関する簡単な関数になることを示している。さらに、高速回転時の粘性摩擦が散逸エネルギーに及ぼす影響を考え、最適な零交差時間の求め方も示している。

2. 運動方程式と散逸エネルギー

モータの動力を減速機で伝達するときの運動方程式と散逸エネルギーを求める。モータの入力電流を $i(t)$ 、トルク定数を K 、減速機の減速比を n 、出力軸の角速

* 原稿受付 2005 年 10 月 7 日。

^{*1} 島根大学総合理工学部(☎ 690-8504 松江市西川津町 1060)。^{*2} 正員、島根大学総合理工学部。

E-mail: izumi@riko.shimane-u.ac.jp

度を $\dot{\theta}(t)$ とする.

2.1 減速機の効率とクーロン摩擦力 減速機の摩擦力は、速度に比例する粘性摩擦と速度に無関係なクーロン摩擦に大別できる. 減速機の効率としてクーロン摩擦による損失のみから定義される場合が多い⁽⁶⁾ ので、本論文でもそれに従う. 減速機の出力軸からみたクーロン摩擦トルクを F_c とすると、減速機の動力損失は $F_c \times \dot{\theta}$ となる. 入力軸の動力は $Ki \times n\dot{\theta}$ であるので、減速機の動力伝達効率 η は

$$\eta \triangleq \frac{nKi \dot{\theta} - F_c \dot{\theta}}{Ki n\dot{\theta}} = 1 - \frac{F_c}{nKi} \quad (1)$$

となる. この式よりクーロン摩擦トルクは、 $F_c = (1 - \eta)nKi$ となり、効率とモータの入力電流を用いて表される. 角度制御系において、指令が与えられて最終角度に至る過程では、回転方向は基本的には変わらない. したがって、クーロン摩擦トルクは、その方向が回転方向と常に逆であるので、電流の正負に関係なく一定方向であり、つぎのように表される.

$$F_c = (1 - \eta)nK |i| \quad (2)$$

この式は、クーロン摩擦トルクが伝達トルクの絶対値すなわち歯車のかみ合い力に比例することを意味する.

2.2 運動方程式と散逸エネルギー 減速機の出力軸から見た系全体の慣性モーメントを H とする. また、潤滑剤による粘性摩擦係数を F_l とする. この場合、クーロン摩擦トルクが式 (2) より電流の絶対値に比例するので、駆動系の運動方程式はつぎのように表される.

$$H\ddot{\theta}(t) + (1 - \eta)nK |i(t)| + F_l \dot{\theta}(t) = nKi(t) \quad (3)$$

この駆動系で発生する摩擦熱は、両摩擦トルクに角速度を掛けて求められる. 一方、モータの電機子では抵抗 R によるジュール熱が発生する. したがって、駆動部で散逸されるエネルギーは、次式のようになる.

$$J = \int_0^{t_f} [R i(t)^2 + \{(1 - \eta)nK |i(t)| + F_l \dot{\theta}(t)\} \dot{\theta}(t)] dt \quad (4)$$

ここで、動作は初期時刻 $t = 0$ から最終時刻 t_f までとしている. 角度制御系を考えているので、これらの時刻における角度と角速度の境界条件はそれぞれつぎのように指定される.

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad (5)$$

$$\theta(t_f) = \theta_f \quad \dot{\theta}(t_f) = 0 \quad (6)$$

以下に、これらの境界条件を満たし、式 (4) を最小にする最適な角速度関数や電流関数を求める.

3. 最適角速度関数の一般解

運動方程式は式 (3) からわかるように電流の絶対値に依存する. 電流は制御過程で符号が変わるので、電流が正および負のそれぞれの条件において最適な角速度関数の一般解を求める.

3.1 電流が正の場合 電流 $i(t)$ が正の場合、運動方程式 (3) はつぎようになる.

$$H\ddot{\theta}(t) + F_l \dot{\theta}(t) = \eta nKi(t) \quad (7)$$

角度 $\theta(t)$ を $x_1(t)$ 、角速度 $\dot{\theta}(t)$ を $x_2(t)$ として、式 (7) を状態方程式に書き換えて、随伴変数 $p_1(t)$ 、 $p_2(t)$ を用いると、ハミルトニアン H_a はつぎようになる⁽⁷⁾.

$$H_a = -R i(t)^2 - (1 - \eta)nK i(t) x_2(t) - F_l x_2(t)^2 + p_1(t) x_2(t) + p_2(t) H^{-1} (-F_l x_2(t) + \eta nK i(t))$$

これから $\dot{x}_1(t) = \partial H_a / \partial p_1$ 、 $\dot{x}_2(t) = \partial H_a / \partial p_2$ 、 $\dot{p}_1(t) = -\partial H_a / \partial x_1$ 、 $\dot{p}_2(t) = -\partial H_a / \partial x_2$ を求めると、Euler の規準方程式

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (8)$$

$$\dot{x}_2(t) = H^{-1} (-F_l x_2(t) + \eta nK i(t)) \quad (9)$$

$$\dot{p}_1(t) = 0 \quad (10)$$

$$\dot{p}_2(t) = (1 - \eta)nK i(t) + 2F_l x_2(t) + H^{-1} F_l p_2(t) - p_1(t) \quad (11)$$

が得られる. また、 $\partial H_a / \partial i = 0$ より、最適電流は次式のようになる.

$$i(t) = (2R)^{-1} \{H^{-1} \eta nK p_2(t) - (1 - \eta)nK x_2(t)\} \quad (12)$$

式 (8)~(11) は、式 (12) が代入されると、4 元連立同次微分方程式となる. しかし、式 (10) が積分定数 c_1 を用いて $p_1(t) = -c_1$ と単独に解かれるので、Euler の規準方程式は、つぎのように $p_2(t)$ と $x_2(t)$ の 2 変数だけを用いた式に変換できる.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_2(t) + a_2 p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) &= a_3 x_2(t) + a_1 p_2(t) + c_1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、定数 a_1 、 a_2 、 a_3 は以下のとおりである.

$$a_1 = H^{-1} \{F_l + (2R)^{-1} \eta (1 - \eta) (nK)^2\}$$

$$a_2 = (2R)^{-1} (H^{-1} \eta nK)^2$$

$$a_3 = 2F_l - (2R)^{-1} (1 - \eta)^2 (nK)^2$$

さらに、式 (13) の $p_2(t)$ を消去すると、つぎのように $x_2(t)$ だけを含む簡単な微分方程式になる.

$$\ddot{x}_2(t) - (a_1^2 + a_2 a_3) x_2(t) = a_2 c_1 \quad (14)$$

左辺第2項の係数を

$$\alpha^2 = a_1^2 + a_2 a_3 = H^{-2} F_l \{F_l + R^{-1} \eta (nK)^2\} \quad (15)$$

と置くと、式(14)の一般解は任意定数 q_1, q_2 を用いて

$$x_{2a}(t) = q_1 e^{\alpha t} + q_2 e^{-\alpha t} - \frac{a_2 c_1}{\alpha^2} \quad (16)$$

となる。添字 a を付けたこの $x_{2a}(t)$ は、電流が正であるときの最適角速度関数である。

もし、 $F_l = 0$ のとき、式(15)より $\alpha^2 = 0$ となるので、式(14)はつぎのように非常に簡単な式になる。

$$\ddot{x}_2(t) = a_2 c_1 \quad (17)$$

この式の一般解は積分定数 c_2, c_3 を用いて

$$x_{2a}(t) = a_2 c_1 t^2 / 2 + c_2 t + c_3 \quad (18)$$

と表される。したがって、粘性摩擦が無視できる場合、最適角速度関数 $x_{2a}(t)$ は2次関数になる。

3.2 電流が負の場合 電流 $i(t)$ が負の場合、運動方程式(3)はつぎようになる。

$$H \ddot{\theta}(t) + F_l \dot{\theta}(t) = (2 - \eta) n K i(t) \quad (19)$$

前節と同様に Euler の規準方程式を導き、 $p_1(t) = -d_1$ と置いて、整理すると次式が得られる。

$$\ddot{x}_2(t) - (b_1^2 + b_2 b_3) x_2(t) = b_2 d_1 \quad (20)$$

ここで、定数 b_1, b_2, b_3 は以下に示される。

$$b_1 = H^{-1} \{F_l - (2R)^{-1} (2 - \eta) (1 - \eta) (nK)^2\}$$

$$b_2 = (2R)^{-1} \{H^{-1} (2 - \eta) nK\}^2$$

$$b_3 = 2F_l - (2R)^{-1} (1 - \eta)^2 (nK)^2$$

これから得られた

$$\beta^2 = b_1^2 + b_2 b_3 = H^{-2} F_l \{F_l + R^{-1} (2 - \eta) (nK)^2\} \quad (21)$$

を用いると、式(20)の一般解は任意定数 r_1, r_2 を用いてつぎのように表される。

$$x_{2b}(t) = r_1 e^{\beta t} + r_2 e^{-\beta t} - \frac{b_2 d_1}{\beta^2} \quad (22)$$

この $x_{2b}(t)$ が負電流における最適角速度関数である。

もし、 $F_l = 0$ のとき、式(21)より $\beta = 0$ となるので、式(20)は $\ddot{x}_2(t) = b_2 d_1$ となる。したがって、電流が負の場合の最適角速度関数 $x_{2b}(t)$ も、正の場合と同様につぎのように2次関数となる。

$$x_{2b}(t) = b_2 d_1 t^2 / 2 + d_2 t + d_3 \quad (23)$$

4. 低速回転

角度制御において減速機を駆動するモータの電流は、一般性を失うことなく正から始まり負で終わると仮定できる。本論文では、電流が正の期間を前期、負の期間を後期と称し、正から負に変わる零交差時間 t_c を仮定する。そして、 t_c における境界条件を満たす最適な角速度関数や電流関数を求め、散逸エネルギーが t_c の関数になることを示し、散逸エネルギーを最小にする最適な零交差時間 t_c^* を求める。

本章は角度制御が比較的低速回転で実現される場合を考える。したがって、粘性摩擦力が無視できるので、角速度関数として電流が正の場合式(18)を、電流が負の場合式(23)をそれぞれ用い、それらの未定定数を決める。

4.1 最適角速度関数の係数

4.1.1 初期・最終速度条件を満たす c_3, d_3 式(5)より初期速度が0であるので、式(18)の c_3 は0と決まる。したがって、前期の角速度関数は、次式のように未定定数 c_1, c_2 だけを含む関数になる。

$$x_{2a}(t) = a_2 c_1 t^2 / 2 + c_2 t \quad (24)$$

一方、式(6)より最終速度も0であるから、式(23)は $x_{2b}(t_f) = 0$ となるので、 d_3 は $-b_2 d_1 t_f^2 / 2 - d_2 t_f$ と決められる。この値を式(23)に代入すると、後期の角速度関数 $x_{2b}(t)$ は、

$$x_{2b}(t) = b_2 d_1 (t^2 - t_f^2) / 2 + d_2 (t - t_f) \quad (25)$$

のように未定定数 d_1, d_2 だけを含む関数になる。

4.1.2 電流の連続性を満たす c_2, d_2 電流が正から負に切り替わる零交差時間 t_c に注目する。その瞬間の電流値は電流の連続性より0となるので、 $F_l = 0$ とした式(9)より角加速度も0になる。したがって、前期の角加速度関数が $\ddot{x}_{2a}(t) = a_2 c_1$ であるので、 $\dot{x}_{2a}(t_c) = 0$ より、 c_2 は次式のように c_1 で表せる。

$$c_2 = -t_c a_2 c_1 \quad (26)$$

同様に、後期の角加速度関数が $\ddot{x}_{2b}(t) = b_2 d_1$ と表されるので、 $\dot{x}_{2b}(t_c) = 0$ より、 d_2 は

$$d_2 = -t_c b_2 d_1 \quad (27)$$

と d_1 で表せる。以上、 c_2, d_2 がそれぞれ c_1, d_1 より決定されることが分かる。

4.1.3 c_1 と d_1 の関係 式(24)に式(26)を代入すると、前期の $t = t_c$ における角速度は

$$x_{2a}(t_c) = -t_c^2 a_2 c_1 / 2 \quad (28)$$

となる。同様に式 (25) に式 (27) を代入して、後期の $t = t_c$ における角速度を求めるとつぎようになる。

$$x_{2b}(t_c) = -(t_f - t_c)^2 b_2 d_1 / 2 \quad (29)$$

$t = t_c$ において角速度関数は連続しているの、 $x_{2a}(t_c) = x_{2b}(t_c)$ が成立する。したがって、式 (28), (29) より d_1 が c_1 で次のように表される。

$$d_1 = \frac{a_2}{b_2} \left(\frac{t_c}{t_f - t_c} \right)^2 c_1 \quad (30)$$

4.1.4 角度条件から c_1 の決定 未定定数 c_2, d_1, d_2 は c_1 のみで表現できるようになった。この c_1 を含んだ角速度関数を積分して、式 (5), (6) の角度の境界条件を満たす式

$$\int_0^{t_c} x_{2a}(t) dt + \int_{t_c}^{t_f} x_{2b}(t) dt = \theta_f - \theta_0 \quad (31)$$

より、 c_1 が次式のように決定できる。

$$c_1 = -\frac{3}{t_f} \frac{1}{a_2 t_c^2} (\theta_f - \theta_0) \quad (32)$$

以上のことより全ての未定定数が決められたので、最終角速度関数は式 (18), (23) から次のように表される。

$$\begin{cases} x_{2a}(t) = \frac{3}{2t_f} \left\{ 1 - \frac{(t - t_c)^2}{t_c^2} \right\} (\theta_f - \theta_0) & (0 \leq t \leq t_c) \\ x_{2b}(t) = \frac{3}{2t_f} \left\{ 1 - \frac{(t - t_c)^2}{(t_f - t_c)^2} \right\} (\theta_f - \theta_0) & (t_c \leq t \leq t_f) \end{cases} \quad (33)$$

4.2 最適電流関数と損失 前・後期の最適な電流関数は、式 (33) から得られた角加速度関数を $F_l = 0$ とした式 (7) および式 (19) にそれぞれ代入して、つぎのように求められる。

$$\begin{cases} i_a(t) = \frac{3}{t_f} \frac{H}{\eta n K} \frac{-t + t_c}{t_c^2} (\theta_f - \theta_0) & (0 \leq t \leq t_c) \\ i_b(t) = \frac{3}{t_f} \frac{H}{(2 - \eta) n K} \frac{-t + t_c}{(t_c - t_f)^2} (\theta_f - \theta_0) & (t_c \leq t \leq t_f) \end{cases} \quad (34)$$

この電流の式を式 (4) の第 1 項目に代入して前・後期のジュール熱をそれぞれ計算すると、全ジュール熱 J_R は、つぎのように t_c の関数で表される。

$$J_R = \frac{3}{t_f^2} \left\{ \frac{1}{t_c \eta^2} + \frac{1}{(t_f - t_c)(2 - \eta)^2} \right\} \frac{H^2 R}{(nK)^2} (\theta_f - \theta_0)^2 \quad (35)$$

一方、クーロン摩擦による損失 J_C は、式 (33) と式 (34) を $F_l = 0$ とした式 (4) の第 2 項目に代入して、積分すれば、つぎようになる。

$$J_C = \frac{9}{4t_f^2} \frac{1 - \eta}{\eta(2 - \eta)} H(\theta_f - \theta_0)^2 \quad (36)$$

この式は、クーロン摩擦による損失が零交差時間 t_c に無関係であることを示す。

4.3 最適な零交差時間 J_C は t_c に関係しないので、散逸エネルギーを最小にする最適な零交差時間 t_c^* は、全ジュール熱 J_R のみに依存する。式 (35) を t_c で微分すれば、

$$\frac{\partial J_R}{\partial t_c} = \frac{3}{t_f^2} \left\{ \frac{1}{(t_f - t_c)^2 (2 - \eta)^2} - \frac{1}{t_c^2 \eta^2} \right\} \frac{H^2 R}{(nK)^2} (\theta_f - \theta_0)^2 \quad (37)$$

が得られ、これが零となる式より、次式が導かれる。

$$t_c^* = \frac{t_f}{2} (2 - \eta) \quad (38)$$

以上、最適な零交差時間 t_c^* は減速機の効率 η を用いた簡潔な式で表現できた。この t_c^* を式 (35) に代入して求めた最小ジュール熱と、式 (36) のクーロン摩擦熱を合わせることによって、散逸エネルギーの最小値がつぎのように表される。

$$J = \frac{12}{t_f^3} \frac{H^2 R}{(nK)^2} \frac{1}{\eta^2 (2 - \eta)^2} (\theta_f - \theta_0)^2 + \frac{9}{4t_f^2} H \frac{1 - \eta}{\eta(2 - \eta)} (\theta_f - \theta_0)^2 \quad (39)$$

5. 粘性摩擦力の考慮

粘性摩擦トルクは角速度に比例するので高速回転時には無視できない。したがって、前・後期の角速度関数 $x_{2a}(t), x_{2b}(t)$ として、それぞれ式 (16), (22) を用いなければならない。前章と同様に、これらの式の未定定数を境界条件から決めて、最適な角速度関数や電流関数を求める。

5.1 最適角速度関数

5.1.1 初期・最終速度を満たす条件 式 (16) の係数 c_1 は、初期速度の条件より、 $(q_1 + q_2)\alpha^2/a_2$ と決まる。したがって、前期の角速度関数は、

$$x_{2a}(t) = q_1(e^{\alpha t} - 1) + q_2(e^{-\alpha t} - 1) \quad (40)$$

と未定定数 q_1, q_2 だけを含む関数になる。一方、最終速度の条件より式 (22) は $x_{2b}(t_f) = 0$ となるので、係数 d_1 は $(r_1 e^{\beta t_f} + r_2 e^{-\beta t_f})\beta^2/b_2$ と決められる。この式を式 (22) に代入すると、後期の角速度関数 $x_{2b}(t)$ も、つぎのように未定定数 r_1, r_2 のみで表される。

$$x_{2b}(t) = r_1(e^{\beta t} - e^{\beta t_f}) + r_2(e^{-\beta t} - e^{-\beta t_f}) \quad (41)$$

5.1.2 電流の連続性を満たす条件 零交差時間 t_c において、電流の連続性より $i(t_c) = 0$ となるので、式 (9) より $H\dot{x}_{2a}(t_c) + F_l x_{2a}(t_c) = 0$ が成立する。これに前期の角速度 $x_{2a}(t_c)$ と角加速度 $\dot{x}_{2a}(t_c)$ を代入すると

$$H(q_1 \alpha e^{\alpha t_c} - q_2 \alpha e^{-\alpha t_c}) + F_l \{q_1(e^{\alpha t_c} - 1) + q_2(e^{-\alpha t_c} - 1)\} = 0 \quad (42)$$

が得られる。したがって、 q_2 は次式のように q_1 で表される。

$$q_2 = q_1 \frac{H\alpha e^{\alpha t_c} + F_l(e^{\alpha t_c} - 1)}{H\alpha + F_l(e^{\alpha t_c} - 1)} e^{\alpha t_c} \quad (43)$$

後期の開始時刻 $t = t_c$ において電流は同様に 0 となる。したがって、式 (19) より $H\dot{x}_{2b}(t_c) + F_l x_{2b}(t_c) = 0$ となるので、 r_2 は次式のように r_1 で表せる。

$$r_2 = r_1 \frac{H\beta e^{\beta t_c} + F_l(e^{\beta t_c} - e^{\beta t_f})}{H\beta e^{\beta t_f} + F_l(e^{\beta t_c} - e^{\beta t_f})} e^{\beta(t_c + t_f)} \quad (44)$$

5.1.3 速度の連続性を満たす条件 式 (40) に式 (43) を代入すると、前期の $t = t_c$ における角速度は

$$x_{2a}(t_c) = -\frac{H\alpha(e^{\alpha t_c} - 1)^2}{H\alpha + F_l(e^{\alpha t_c} - 1)} q_1 \quad (45)$$

となる。同様に式 (41) に式 (44) を代入して、 $t = t_c$ 時の後期の角速度を求めるとつぎのように表される。

$$x_{2b}(t_c) = -\frac{H\beta(e^{\beta t_c} - e^{\beta t_f})^2}{H\beta e^{\beta t_f} + F_l(e^{\beta t_c} - e^{\beta t_f})} r_1 \quad (46)$$

速度の連続性 $x_{2a}(t_c) = x_{2b}(t_c)$ より、 r_1 が q_1 で次のように表現できる。

$$r_1 = q_1 \frac{\alpha(e^{\alpha t_c} - 1)^2 \{H\beta e^{\beta t_f} + F_l(e^{\beta t_c} - e^{\beta t_f})\}}{\beta(e^{\beta t_c} - e^{\beta t_f})^2 \{H\alpha + F_l(e^{\alpha t_c} - 1)\}} \quad (47)$$

5.1.4 角度を満たす条件 q_2 , r_1 , r_2 は q_1 のみの関数であるので、式 (31) を計算して整理すると、 q_1 が次式のように決定できる。

$$q_1 = \frac{\alpha\beta^2(e^{\beta t_c} - e^{\beta t_f})^2 \{H\alpha + F_l(e^{\alpha t_c} - 1)\}}{D(t_c)} (\theta_f - \theta_0) \quad (48)$$

ここで、分母 D は t_c の関数で、以下ようになる。

$$\begin{aligned} D(t_c) = 2 \Big[& \beta^2(e^{\beta t_c} - e^{\beta t_f})^2 e^{\alpha t_c} \{ \alpha(H - F_l t_c) \sinh(\alpha t_c) \\ & + (2F_l - H\alpha^2 t_c) \cosh(\alpha t_c) - 2F_l \} \\ & - \alpha^2(e^{\alpha t_c} - 1)^2 e^{\beta(t_c + t_f)} \\ & \{ \beta(H - F_l(t_c - t_f)) \sinh(\beta(t_c - t_f)) \\ & + (2F_l - H\beta^2(t_c - t_f)) \cosh(\beta(t_c - t_f)) - 2F_l \} \Big] \quad (49) \end{aligned}$$

式 (48) より q_1 が決定できたので、式 (47) より r_1 が、続いて式 (44) より r_2 が、また、式 (43) より q_2 がそれぞれ決められる。これらを式 (40) と式 (41) に代入することにより最適角速度関数が t_c の関数として求められたことになる。

5.2 最適な電流関数と零交差時間 前・後期の最適な電流関数は、前節で得られた角速度関数を式 (7)

および式 (19) にそれぞれ代入して、つぎのように求められる。

$$\begin{cases} i_a(t) = -e^{-\alpha t} q_1 \{ (e^{t_c} - e^{t_f}) F_l (F_l - H\alpha) \\ + (e^{(t+t_c)\alpha} - e^{(2t+t_c)\alpha}) F_l (F_l + H\alpha) \\ + (e^{2t\alpha} - e^{2t_c\alpha}) (F_l^2 - H^2\alpha^2) \} \\ \quad \{ nK \{ H\alpha + (e^{t_c} - 1) F_l \} \eta \}^{-1} & (0 \leq t \leq t_c) \\ i_b(t) = e^{-\beta t} (e^{t_c} - 1)^2 q_1 \alpha \{ (e^{(t_c+2t_f)\beta} \\ - e^{(t+2t_f)\beta}) F_l (F_l - H\beta) + (e^{(t+2t_c)\beta} \\ - e^{(2t+t_c)\beta}) F_l (F_l + H\beta) + (e^{(2t+t_f)\beta} - e^{(2t_c+t_f)\beta}) \\ (F_l^2 - H^2\beta^2) \} \{ nK \{ H\alpha + (e^{t_c} - 1) F_l \} \\ \beta(\eta - 2)(e^{t_c\beta} - e^{t_f\beta})^2 \}^{-1} & (t_c \leq t \leq t_f) \end{cases} \quad (50)$$

この電流の式を式 (4) に代入して積分すれば、第 1 項目より全ジュール熱 J_R が決められる。また、第 2 項目にある角速度 $\dot{\theta}(t)$ として式 (40) と式 (41) を用いれば、クーロン摩擦による損失 J_C および粘性摩擦による損失 J_l もそれぞれ求められる。これらは零交差時間 t_c の関数であるので、散逸エネルギーを最小にする最適な零交差時間 t_c^* は、次式から求められる。

$$\frac{\partial(J_R + J_C + J_l)}{\partial t_c} = 0 \quad (51)$$

低速回転の場合と違って、 J_R , J_C , J_l は t_c の複雑な関数になっている。したがって、最適な零交差時間は簡単な式によって表現できない。

6. シミュレーション

シミュレーションは $n = 10$, $K = 0.1$, $\theta_f = 1$, $\theta_0 = 0$, $t_f = 1$ の条件で行われた。

6.1 最適な角速度・電流関数 最適な電流関数、角速度関数が粘性摩擦力の有無によって受ける影響を $H = 1$ の条件のもとで調べる。

効率が $\eta = 0.6$ となるクーロン摩擦力だけがある場合、最適な零交差時間は式 (38) より $t_c^* = 0.7$ である。式 (34) の最適な電流関数は、図 1(a) の上図のように $t = 0.7$ で折れ曲がった直線である。それに対応する角速度関数は、図 1(a) の下図のように、前期と後期でそれぞれ 2 次係数の異なる完全な 2 次関数である。なお、効率が $\eta = 1$ の場合、 $t_c^* = 0.5$ となり、電流関数は 1 本の直線になることは容易にわかる。

一方、図 1(b) は粘性摩擦係数を $F_l = 2$ とした結果である。その場合の最適な零交差時間は式 (51) より $t_c^* = 0.852$ となる。それに基づく電流関数は、式 (50) より図 1(b) の上図のように描かれた。前期と後期の電流関数は共にもはや直線ではなく曲線となっている。その曲り方は F_l の値が大きくなるほど増加する。式 (9) からわかるように $t = t_c^*$ で角加速の値は 0 では

Fig. 1 Difference of optimal functions of current $i(t)$ and angular velocity $\dot{\theta}(t)$ between the absence and the presence of viscous friction when $\eta = 0.6$.

Fig. 2 Dissipated energy J for t_c in low speed rotation

ないので、図1(b)の角速度関数は、(a)の $F_l = 0$ の場合と異なる。

6.2 散逸エネルギーの計算 $H = 1$ の条件でクーロン摩擦や粘性摩擦が散逸エネルギーに及ぼす影響を調べる。

まず、減速機の効率が $\eta = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ となるクーロン摩擦のみがある場合を考える。したがって、式(35)で示されたジュール熱による損失 J_R と式(36)の摩擦熱による損失 J_C に注目する。零交差時間 t_c に対する全散逸エネルギー $J = J_R + J_C$ を計算すると、図2のようになった。この図は、いかなる効率 η でも、 J を最小にする最適な t_c^* は存在することを示す。一番上の2点鎖線は、 $\eta = 0.4$ の場合を示し、最適な零交差時間が $t_c^* = 0.8[\text{sec}]$ 、そのときのエネルギーは $J = 31.4[\text{J}]$ になる。一番下の実線は、 $\eta = 1$ の場合を示し、 $t_c^* = 0.5[\text{sec}]$ で最小エネルギーは $J = 12[\text{J}]$ となる。これらの値はそれぞれ式(38)と式(39)に一致するので、第4章の理論の正当性が証明された。

つぎに、 $\eta = 0.6$ の条件で、 F_l を1, 2, 3と変えて粘

Fig. 3 J vs. t_c in high speed rotation when $\eta = 0.6$, $H = 1$.

Fig. 4 Tendency of optimal t_c^* for F_l in 3 kinds of inertia when $\eta = 0.6$

性摩擦係数の影響を調べる。図3は、それぞれの F_l における t_c に対する全散逸エネルギーの計算結果である。この図から F_l が大きくなればなるほど、散逸エネルギーも増加することがわかる。その原因は粘性摩擦力によって消耗されるエネルギーが増えるからである。また、どの曲線にも、 J を最小にする最適な t_c^* が存在することがわかる。なお、 H を大きくすると、ジュール熱による損失が相対的に増加し、粘性摩擦係数による曲線の差異は小さくなる。

6.3 最適な零交差時間 効率 $\eta = 0.6$ の条件のもとで、粘性摩擦係数 F_l と慣性モーメント H が最適な零交差時間 t_c^* に及ぼす影響を調べた。図4は、 $H = 1, 2, 3$ における F_l と t_c^* の関係を調べた結果である。 t_c^* は、 H に関係なく、 F_l の低下とともに $0.7[\text{s}]$ に収束することがわかった。この $t_c = 0.7[\text{s}]$ はクーロン摩擦力だけがある場合の最適な零交差時間を与える式(38)に一致する。また、同一の粘性摩擦係数において慣性モーメント H の増加につれて t_c^* が小さくなることがわかる。これは、式(3)からわかるように、 H が大きくなると相対的に F_l の影響が小さくなるから

である。

7. 実験

実験に用いたモータは、定格出力が 25.4[W]、電機子抵抗が $R = 5.5 [\Omega]$ 、トルク定数が $K = 0.041 [\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}]$ である。このモータに減速比 $n = 14$ の遊星歯車装置からなる減速機が付けられている。

7.1 パラメータの同定 減速機の摩擦に関する主なパラメータ η と F_l を同定する。そのために、定電流源で減速機付モータを駆動し、モータ軸に取り付けられたタコメータの角速度信号をデジタルスコープで観測した。図 5 と図 6 のそれぞれの上部の波形は、モータに流す矩形波電流を示し、振幅が $i_p = \pm 0.2 [\text{A}]$ と設定されている。それぞれの下部は角速度の波形を示す。

伝達効率 η を測定するために、低速回転で実験する必要がある。したがって、矩形波電流の周期を 0.2 [s] と短くした。角速度関数は、電流が正の場合 $F_l = 0$ とした運動方程式 (7) より、 $\dot{\theta}(t) = H^{-1}\eta n K i_p t$ と 1 次式で表される。したがって、その傾き s_p は

$$s_p = H^{-1}\eta n K i_p \quad (52)$$

となる。一方、電流が負の場合、 $F_l = 0$ とした運動方程式 (19) より $\dot{\theta}(t) = H^{-1}(2 - \eta)n K i_p t$ が得られる。同様に、その傾きの絶対値 s_m は次式となる。

$$s_m = H^{-1}(2 - \eta)n K i_p \quad (53)$$

式 (52) と式 (53) の比より、減速機の効率 η は、

$$\eta = \frac{2s_p}{s_m + s_p} \quad (54)$$

と表される。この方法による η の計測は、 H などのパラメータの影響を受けず、簡単に測定できる 2 つの傾斜のみから求められる利点がある。低速回転実験における図 5 の角速度は、区分的な直線ではほぼ近似できる。その傾きの絶対値は、電流の正負に応じて異なっていることがわかる。これは、式 (2) のクーロン摩擦トルクの式が妥当であることを示す。図 5 から s_p 、 s_m を読み取って、式 (54) から $\eta \approx 0.70$ という値を得た。

図 6 は、矩形波電流の周期を 2.47 [s] と長くして、高速回転を実現させたときの実験結果である。図の下部の波形は、角速度 $\dot{\theta}(t)$ を示し、粘性摩擦力のために一次遅れ系の応答となっている。この時定数 T は、式 (7) からわかるように $T = H/F_l$ である。図 6 より測定された時定数 $T \approx 0.4 [\text{s}]$ と、出力軸から見た慣性モーメント $H = 0.960 \times 10^{-3} [\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ より、粘性摩擦係数として $F_l \approx 0.002 [\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}]$ と同定した。

Fig. 5 Driving current $i(t)$ and angular velocity $\dot{\theta}(t)$ in low speed rotation

Fig. 6 Driving current $i(t)$ and angular velocity $\dot{\theta}(t)$ in high speed rotation

7.2 実験結果 $\eta \approx 0.70$, $F_l \approx 0.002$ という同定結果を用いて、 $t_f = 1 [\text{s}]$, $\theta_f - \theta_0 = 2\pi [\text{rad}]$ の条件下で実験をした。減速機の出力側に慣性モーメント $H_L = 2.8 \times 10^{-3} [\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ の円盤を付加して、入力側を前述のモータで駆動させた。駆動系のパラメータを用いて式 (51) より最適な零交差時間 $t_c^* \approx 0.72$ を求め、式 (50) より最適な電流関数と 5.1 節より角速度関数を計算すると、これらは図 7 に示す波形となった。この最適な角速度関数を速度フィードバック制御回路に指令して、駆動実験を行った。その結果、図 8 に示す電流波形が得られ、理論から得られた図 7 の波形とほぼ一致した。

図 9 は、零交差時間 $t_c = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ に対する消費エネルギー J の測定結果である。この図は、 J を小さくする最適な零交差時間 t_c が存在することと、それが理論値 $t_c^* \approx 0.72$ と概ね整合することを示す。図 9 に示す実験結果は、 t_c に対する J の理論と傾向が一致したが、その値は理論値に比べて大きかった。その理由は、本論文の理論が減速機の摩擦のみに注目していて、それを駆動するモータ自身の摩擦を無視しているからである。

Fig. 7 Theoretical waveforms of current $i(t)$ and angular velocity $\dot{\theta}(t)$

Fig. 8 Experimental waveforms of current $i(t)$ and angular velocity $\dot{\theta}(t)$

Fig. 9 Experimental results of J for t_c when $\theta_f = \pi$

8. あとがき

減速機をもつ角度制御系が始動・停止をする場合に散逸するエネルギーを最小化する方法を検討した。まず、減速機をもつクーロン摩擦トルクを減速機の効率とそれを駆動するモータの電流で表した。角度制御系の回転方向の一定性を仮定して、クーロン摩擦トルク

がモータの電流の絶対値に比例する運動方程式を作った。クーロン摩擦によるこの非線形性を解決するために、電流が正から負への変化する零交差時間 t_c を導入した。この零交差時間 t_c を用いることによって、決められた動作時間で目標角度に達するために散逸されるジュール熱と摩擦熱を定式化できた。そして、散逸エネルギーを最小にする最適な零交差時間 t_c^* が減速機の効率の簡単な関数になることを導いた。さらに、高速回転時の粘性摩擦が散逸エネルギーに及ぼす影響を考慮した最適な零交差時間を求める方法を示した。

提案した方法を用いてシミュレーションを行い、粘性摩擦係数や慣性モーメントが最適な零交差時間 t_c^* に及ぼす影響を調べた。その結果、最適な零交差時間は粘性摩擦係数の増加とともに大きくなり、その傾向は慣性モーメントが小さい程大きいことがわかった。小型のモータを用いて基本的な実験をして、クーロン摩擦トルクがモータの電流の絶対値に比例することを確認した。また、実験で得られた電流関数、角速度関数、および零交差時間に対する散逸エネルギーの傾向は理論とほぼ一致した。しかし、両者の値には差異があったので、今後、モータの摩擦も考慮して、理論と実験の一致度を高める予定である。

文 献

- (1) Takano, M., Techniques for Speed-up of Robot Motion, *T. of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. 21, No. 12 (1982), pp. 1122–1128.
- (2) Funabashi, H., Iwatsuki, N. and Takeda, Y., Selection of DC Motors and Reduction Gears for Robots with Consideration of Energy Consumption, *T. of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 56, No. 528 (1990), pp. 2179–2186.
- (3) Izumi, T., Minimization of Energy Consumption for a Manipulator with Nonlinear Friction in PTP Motion, *J. of the Robotics Society of Japan*, Vol. 13, No. 8 (1995), pp. 1179–1185.
- (4) Izumi, T., Energy and Time Optimal Path Planning of a Horizontally Articulated Manipulator, *P. of the 2000 Japan-USA Flexible Automation Conference*, (2000).
- (5) Yokose, Y. and Izumi, T., Minimization of Dissipated Energy of a Manipulator with Coulomb Friction using the GA Increasing the Calculated Genetic Information Dynamically, *T. of the Japan Society for Computational Engineering and Science*, Vol. 7, (2005), pp. 95–102.
- (6) Naruse, C., Friction loss of Spur Gear, *Science of machine*, Vol. 49, No. 7 (1997), pp. 751–761.
- (7) Katou, K., *Applied Optimal Control*, (1993), University of Tokyo Press