標準形の方法を用いた直方体容器内液面の非線形振動解析*

田村 晋司^{*1}, 信田 恵美^{*2}, 木村 康治^{*1}Nonlinear Vibration Analysis of Liquid Motion in a Rectangular Tank
using the Method of Normal FormsShinji TAMURA^{*3}, Emi SHIDA and Koji KIMURA^{*3} Department of Mechanical and Environmental Informatics, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

The method of normal forms is applied to the nonlinear equations of the liquid motion in a rectangular tank. The basic idea underlying the method of normal forms is the use of local coordinate transformations so that the dynamical system can take the "simplest form". In this study, the lowest symmetric and asymmetric modes are considered, and two sets of the transformed equations which correspond to the cases with and without internal resonance are derived. The obtained normal forms show that the stationary responses without internal resonance are described by only one state variable. The calculated frequency responses are compared with the results of the direct numerical integrations of the original nonlinear equations of motion. These results show that the response characteristics change from hardening-type to softening-type when the liquid depth is increasing. And it is observed that the time histories of the symmetric mode shift to the negative region. These phenomena coincide with the well-known results.

Key Words: Vibration of Continuous System, Nonlinear Vibration, Sloshing, Normal Forms, Rectangular Tank, Frequency Response

1. 緒 言

自由表面を有する容器内液体が外部励振と共振する現象はスロッシングと呼ばれ、顕著な非線形性を示すことが知られている。従来の研究によりモードの一般化座標の多自由度非線形常微分方程式が導出され、モード間の非線形連成メカニズムが明らかにされている⁽¹⁾⁽²⁾。また、液深を大きくするにつれて、ハードスプリング特性からソフトスプリング特性へ変化する事が示されている⁽³⁾⁽⁴⁾。

一方、非線形力学系の観点からのスロッシング現象の研究として、パラメータの変化とともに系の持つ性質がどのように変化するかを直接数値計算によって調べた報告や、円筒容器におけるカオスの挙動の存在を解析および実験で調べた報告⁽⁵⁾⁽⁶⁾などがあるが、比較的小数である。

非線形振動系の研究に用いられる解析的な方法としては、平均法、多重尺度法、調和バランス法、標準形の方法⁽⁷⁾などがあり、1自由度系に対しては Duffing

系や van del Pol 系をはじめ、様々な系に適用されている。しかし、多自由度系に対しての適用例⁽⁸⁾はそれほど多くはない。これらの解析法の中で、標準形の方法とは、複雑な非線形項を持つ多自由度系などに対して有効な手法で、現象を表す本質的な非線形項のみを残すように、支配方程式の座標変換を行う方法である。

本研究では、水平軸まわりのピッチング励振を受ける剛体直方体容器内の液面揺動に対して、著者らの以前の研究⁽¹⁾で導出されている液位の逆対称モード・対称モードに関する非線形振動方程式に、標準形の方法を適用し周波数応答解析を行う。

2. 解析モデルと振動方程式系

2.1 解析モデルと基礎方程式 図1に解析モデルを示す。初期静止時の直方体容器の各辺に平行に静止座標系 $O-XYZ$ を設定し、容器に固定された移動座標系 $o-xyz$ を設定する。外部励振として y 軸を中心としたピッチング励振 ξ を考え、励振振幅 ξ_0 、励振振動数 Ω として、 $\xi(t) = \xi_0 \sin \Omega t$ で表されるとする。そして、液面形状が y 軸方向に変化しない二次元揺動を扱う。容器は剛体とし、液体運動は非圧縮完全流体のポテンシャル理論を適用する。 a, h は容器半幅、液

* 原稿受付 2006年1月11日。

^{*1} 正員、東京工業大学情報理工学研究所(〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。^{*2} 東京工業大学大学院情報理工学研究所情報環境学専攻。

E-mail: stamura@mei.titech.ac.jp

Fig. 1 Analytical model

深を, ρ は液体の密度を表す. 液体の速度ポテンシャルを $\phi(x, z, t)$, 静止液面からの変位量(液位)を $\eta(x, t)$ とすると, 本系の基礎方程式は次のように表される⁽¹⁾.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=a} = v_x \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = v_z \quad (3)$$

$$P|_{z=h+\eta} = 0 \quad (4)$$

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h+\eta} - v_z - \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} - v_x \right|_{z=h+\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

式(1)は連続条件, 式(2), (3)は, それぞれ側壁および底壁での適合条件, 式(4), (5)は液面における力学的および運動学的非線形境界条件である. v_x, v_z は静止座標系に対する容器速度の移動座標系での x, z 方向成分で,

$$v_x = \dot{\xi}z, \quad v_z = -\dot{\xi}x \quad (6)$$

であり, P は圧力で, 移動座標系で表現したベルヌイの定理より, 次式で表される.

$$P = -\rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} + g(-x \sin \xi + z \cos \xi) + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \dot{G}(t) \right] \quad (7)$$

式(7)中の $\dot{G}(t)$ は液面の平均圧力を 0 とする条件より定められる.

2.2 振動方程式系 ϕ と η の許容関数を, 線形自由振動モードの重ね合わせによって表す.

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) = & \sum_{n=1}^N A_{1n}(t) \sin(\lambda_{1n}x) \frac{\cosh(\lambda_{1n}z)}{\cosh(\lambda_{1n}h)} \\ & + \sum_{n=1}^N A_{2n}(t) \cos(\lambda_{2n}x) \frac{\cosh(\lambda_{2n}z)}{\cosh(\lambda_{2n}h)} \\ & + x v_x + (z-h)v_z + \dot{\xi} \{ (z-h)x + \Psi(x, z) \} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & \sum_{n=1}^N C_{1n}(t) \sin(\lambda_{1n}x) + \sum_{n=1}^N C_{2n}(t) \cos(\lambda_{2n}x) \\ & + x \tan \xi \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, $A_{1n}(t), A_{2n}(t), C_{1n}(t), C_{2n}(t)$ は一般化座標, $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}$ は固有値, 右辺第 1 項は逆対称モード, 第 2 項は対称モード, 第 3 項以下は容器の回転に関する項を表す. $\Psi(x, z)$ は境界条件を満たすための項である. σ_0 を離調度として, 最低次モード主共振時 ($\Omega - \omega_1 = \varepsilon \sigma_0$) を考え, 逆対称モード・対称モードともに最低次のみを考慮し ($N=1$), 下記のオーダの仮定を導入する.

$$A_{11}, C_{11} = O(\varepsilon), \quad A_{21}, C_{21} = O(\varepsilon^2), \quad \xi = O(\varepsilon^3)$$

これ以後, オーダを陽に表すために以下の変換を行う.

$$\varepsilon C_1 = C_{11}, \quad \varepsilon^2 C_2 = C_{21}, \quad \varepsilon^3 \xi_{00} = \xi_0$$

諸量を, 容器半幅と逆対称モードの最低次固有振動数 ω_1 を用いて無次元化する. 式(8), (9)を式(4), (5)に代入して, ガレキ法を適用することにより振動方程式系が得られる⁽¹⁾.

$$\begin{aligned} \ddot{C}_1 = & -\omega_1^2 C_1 - 2\varepsilon \xi_1 \omega_1 \dot{C}_1 + \varepsilon^2 (\alpha_1 C_1^3 + \alpha_2 C_1 \dot{C}_1^2 \\ & + \alpha_3 C_1 C_2 + \alpha_4 \dot{C}_1 \dot{C}_2 + \alpha_5 \xi_{00} \sin \Omega t) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\ddot{C}_2 = -\omega_2^2 C_2 + \beta_1 C_1^2 + \beta_2 \dot{C}_1^2 - 2\varepsilon \xi_2 \omega_2 \dot{C}_2 \quad (11)$$

ξ_1, ξ_2 は, エネルギー散逸を等価的に表すために導入した線形減衰比である. ω_n および係数 α_i, β_j は液深 h の関数であり, 次式で表される.

$$\omega_1 = 1 \quad (12)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2 \tanh(\pi h)}{\tanh(\frac{\pi h}{2})}} \quad (13)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi^2}{16} \left\{ 3 - 2 \tanh\left(\frac{\pi h}{2}\right) \tanh(\pi h) \right\} \quad (14)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\pi^2}{16} \left\{ 2 - \frac{1}{\tanh^2(\frac{\pi h}{2})} + \frac{\tanh(\pi h)}{\tanh(\frac{\pi h}{2})} - \tanh\left(\frac{\pi h}{2}\right) \tanh(\pi h) \right\} \quad (15)$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{\tanh(\frac{\pi h}{2})} - \tanh\left(\frac{\pi h}{2}\right) - 2 \tanh(\pi h) \right\} \quad (16)$$

$$\alpha_4 = \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{\tanh(\frac{\pi h}{2})} + \tanh\left(\frac{\pi h}{2}\right) \right\} \quad (17)$$

$$\alpha_5 = -\frac{8\omega_1^2}{\pi^2} \left\{ 1 - \frac{\pi h \tanh(\frac{\pi h}{2})}{2} - \frac{2}{\cosh(\frac{\pi h}{2})} \right\} \quad (18)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{\tanh(\frac{\pi h}{2})} - \tanh(\pi h) \right\} \quad (19)$$

$$\beta_2 = -\frac{\pi}{4} \left\{ \frac{2}{\tanh(\frac{\pi h}{2})} - \tanh(\pi h) + \frac{\tanh(\pi h)}{\tanh^2(\frac{\pi h}{2})} \right\} \quad (20)$$

3. 標準形の方法を用いた近似解析

3.1 複素座標の導入 本節では、液位 η の一般化座標 C_n ($n=1, 2$) に対して複素座標 η_n ($n=1, 2$) を導入する。

$$C_n = \eta_n + \eta_n^*, \quad \dot{C}_n = i\omega_n (\eta_n - \eta_n^*) \quad (21)$$

ここで、 $*$ は複素共役を表す。外部励振の項は

$$v = \exp(i\Omega t) \quad (22)$$

とおく。

式 (21) を η_n ($n=1, 2$) について解くと次式となる。

$$\eta_n = \frac{1}{2} \left(C_n + \frac{\dot{C}_n}{i\omega_n} \right) \quad (23)$$

式 (23) および、それを微分した

$$\dot{\eta}_n = \frac{1}{2} \left(\dot{C}_n + \frac{\ddot{C}_n}{i\omega_n} \right) \quad (24)$$

より、式 (10), (11) は以下の 1 階微分方程式で表される。

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 = & i\omega_1 \eta_1 - \varepsilon \zeta_1 \omega_1 (\eta_1 - \eta_1^*) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2\omega_1} \left\{ -i(\alpha_1 - \alpha_2 \omega_1^2) (\eta_1^3 + \eta_1^{*3}) \right. \\ & - i(3\alpha_1 + \alpha_2 \omega_1^2) (\eta_1^2 \eta_1^* + \eta_1 \eta_1^{*2}) \\ & - i(\alpha_3 - \alpha_4 \omega_1 \omega_2) (\eta_1 \eta_2 + \eta_1^* \eta_2^*) \\ & - i(\alpha_3 + \alpha_4 \omega_1 \omega_2) (\eta_1 \eta_2^* + \eta_1^* \eta_2) \\ & \left. - \frac{\alpha_5 \xi_{00}}{2} (v - v^*) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2 = & i\omega_2 \eta_2 - \frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{2\omega_2} (\eta_1^2 + \eta_1^{*2}) \\ & - \frac{i(\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2} \eta_1 \eta_1^* - \varepsilon \zeta_2 \omega_2 (\eta_2 - \eta_2^*) \end{aligned} \quad (26)$$

3.2 座標変換と共鳴項 項を簡単化するために、 η_1, η_2 から ξ_1, ξ_2 への座標変換を導入する。

$$\begin{aligned} \eta_n = & \xi_n + h_{n0} (\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*) + \varepsilon h_{n1} (\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*) \\ & + \varepsilon^2 h_{n2} (\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*, v, v^*), \quad (n=1, 2) \end{aligned} \quad (27)$$

上式を式 (25), (26) へ代入し、式ができるだけ簡単になるように h_{nm} ($n=1, 2, m=0, 1, 2$) を選ぶ。ここで、式 (27) を式 (25), (26) の左辺に代入すると $\dot{\xi}_n$ を含む項が表れるので、第 1 次近似、第 2 次近似、... と解析を進めるにつれて、それまでに得られた標準形の方程式で $\dot{\xi}_n$ の関数形を更新してゆく必要がある。そこで、本研究では表記の簡略化を図るため、 ξ_n をオーダを表すパラメータ ε を含めた次式とおく。

$$\begin{aligned} \xi_n = & i\omega_n \xi_n + g_{n0} (\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*) + \varepsilon g_{n1} (\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*) \\ & + \varepsilon^2 g_{n2} (\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*, v, v^*) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (28)$$

g_{nm} は各オーダにおける座標変換の過程で消去できずに残る項であり、 m 次の共鳴項と呼ばれる。

式 (27) を微分して ε のべきで整理し、式 (28) を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_n = & i\omega_n \dot{\xi}_n + \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_1} (i\omega_1 \xi_1 + g_{10}) - \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_1^*} (i\omega_1 \xi_1^* - g_{10}^*) \\ & + \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_2} (i\omega_2 \xi_2 + g_{20}) - \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_2^*} (i\omega_2 \xi_2^* - g_{20}^*) + g_{n0} \\ & + \varepsilon \left\{ \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_1} g_{11} + \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_1^*} g_{11}^* + \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_2} g_{21} + \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_2^*} g_{21}^* \right. \\ & + \frac{\partial h_{n1}}{\partial \xi_1} (i\omega_1 \xi_1 + g_{10}) - \frac{\partial h_{n1}}{\partial \xi_1^*} (i\omega_1 \xi_1^* - g_{10}^*) \\ & + \frac{\partial h_{n1}}{\partial \xi_2} (i\omega_2 \xi_2 + g_{20}) - \frac{\partial h_{n1}}{\partial \xi_2^*} (i\omega_2 \xi_2^* - g_{20}^*) + g_{n1} \left. \right\} \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_1} g_{12} + \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_1^*} g_{12}^* + \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_2} g_{22} + \frac{\partial h_{n0}}{\partial \xi_2^*} g_{22}^* \right. \\ & + \frac{\partial h_{n1}}{\partial \xi_1} g_{11} + \frac{\partial h_{n1}}{\partial \xi_1^*} g_{11}^* + \frac{\partial h_{n1}}{\partial \xi_2} g_{21} + \frac{\partial h_{n1}}{\partial \xi_2^*} g_{21}^* \\ & + \frac{\partial h_{n2}}{\partial \xi_1} (i\omega_1 \xi_1 + g_{10}) - \frac{\partial h_{n2}}{\partial \xi_1^*} (i\omega_1 \xi_1^* - g_{10}^*) \\ & + \frac{\partial h_{n2}}{\partial \xi_2} (i\omega_2 \xi_2 + g_{20}) - \frac{\partial h_{n2}}{\partial \xi_2^*} (i\omega_2 \xi_2^* - g_{20}^*) \\ & \left. + \frac{\partial h_{n2}}{\partial v} i\Omega v - \frac{\partial h_{n2}}{\partial v^*} i\Omega v^* + g_{n2} \right\} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (29)$$

一方、式 (27) を式 (25), (26) の右辺に代入し ε のべきで整理することによって、次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 = & i\omega_1 (\xi_1 + h_{10}) \\ & + \varepsilon \{ i\omega_1 h_{11} - \zeta_1 \omega_1 (\xi_1 - \xi_1^* + h_{10} - h_{10}^*) \} \\ & + \varepsilon^2 \{ i\omega_1 h_{12} - \zeta_1 \omega_1 (h_{11} - h_{11}^*) \\ & - \frac{i(\alpha_1 - \alpha_2 \omega_1^2)}{2\omega_1} \{ (\xi_1 + h_{10})^3 + (\xi_1^* + h_{10}^*)^3 \} \\ & - \frac{i(3\alpha_1 + \alpha_2 \omega_1^2)}{2\omega_1} \{ (\xi_1 + h_{10})^2 (\xi_1^* + h_{10}^*) \\ & + (\xi_1 + h_{10}) (\xi_1^* + h_{10}^*)^2 \} \\ & - \frac{i(\alpha_3 - \alpha_4 \omega_1 \omega_2)}{2\omega_1} \{ (\xi_1 + h_{10}) (\xi_2 + h_{20}) \\ & + (\xi_1^* + h_{10}^*) (\xi_2^* + h_{20}^*) \} \\ & - \frac{i(\alpha_3 + \alpha_4 \omega_1 \omega_2)}{2\omega_1} \{ (\xi_1 + h_{10}) (\xi_2^* + h_{20}^*) \\ & + (\xi_1^* + h_{10}^*) (\xi_2 + h_{20}) \} - \frac{\alpha_5 \xi_{00}}{4\omega_1} (v - v^*) \left. \right\} \\ & + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2 = & i\omega_2 (\xi_2 + h_{20}) \\ & - \frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{2\omega_2} \{ (\xi_1 + h_{10})^2 + (\xi_1^* + h_{10}^*)^2 \} \\ & - \frac{i(\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2} \{ (\xi_1 + h_{10}) (\xi_1^* + h_{10}^*) \} \\ & + \varepsilon \{ i\omega_2 h_{21} - \zeta_2 \omega_2 (\xi_2 - \xi_2^* + h_{20} - h_{20}^*) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2} \{h_{11}(\xi_1 + h_{10}) + h_{11}^*(\xi_1^* + h_{10}^*)\} \\
& -\frac{i(\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2} \{h_{11}(\xi_1^* + h_{10}^*) + h_{11}^*(\xi_1 + h_{10})\} \Big] \\
& + \varepsilon^2 [i\omega_2 h_{22} - \zeta_2 \omega_2 (h_{21} - h_{21}^*) \\
& -\frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{2\omega_2} \{h_{11}^2 + h_{11}^{*2} + 2h_{12}(\xi_1 + h_{10}) \\
& + 2h_{12}^*(\xi_1^* + h_{10}^*)\} \\
& -\frac{i(\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2} \{h_{11}h_{11}^* + h_{12}(\xi_1^* + h_{10}^*) \\
& + h_{12}^*(\xi_1 + h_{10})\}] + O(\varepsilon^3) \quad (31)
\end{aligned}$$

式(29)と式(30),(31)を比較し、各オーダーごとに座標変換と共鳴項の多項式を決定していく。なお、共鳴項 g_{nm} が残る場合には、 h_{nm} に任意係数が残る。その場合には、 C_n の ε^2 のオーダーの近似解が、式(21),(25),(26)より、

$$\begin{aligned}
C_n = & \xi_n + \xi_n^* + h_{n0} + h_{n0}^* \\
& + \varepsilon(h_{n1} + h_{n1}^*) + \varepsilon^2(h_{n2} + h_{n2}^*) \quad (32)
\end{aligned}$$

と表されることを用いて、 C_n の ε の各オーダーの近似解が最も簡単な形となるように h_{nm} を定める。

また、式(31)の右辺の $O(1)$ の項に、 ξ_1, ξ_1^* の2乗の項が含まれており、 η_2 がゼロ平均とならない可能性がある。この平均がずれることは、従来の研究において、対称モードの一般化座標 C_2 の時刻歴の負側へのずれとして指摘されてきたことと対応していると考えられるので、後に示す計算例で定量的な評価を行う。

3.3 標準形の導出

3.3.1 $O(1)$ の簡単位 式(29)と式(30)の $O(1)$ 部分を比較することにより、

$$g_{10} = 0 \quad (33)$$

$$h_{10} = 0 \quad (34)$$

とすればよいことが分かる。

次に、式(29)と式(31)の $O(1)$ 部分を比較し、式(33),(34)を用いると、

$$\begin{aligned}
g_{20} + \frac{\partial h_{20}}{\partial \xi_1} i\omega_1 \xi_1 - \frac{\partial h_{20}}{\partial \xi_1^*} i\omega_1 \xi_1^* \\
+ \frac{\partial h_{20}}{\partial \xi_2} (i\omega_2 \xi_2 + g_{20}) + \frac{\partial h_{20}}{\partial \xi_2^*} (-i\omega_2 \xi_2^* + g_{20}^*) \\
= i\omega_2 h_{20} - \frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{2\omega_2} (\xi_1^2 + \xi_1^{*2}) \\
- \frac{i(\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2} \xi_1 \xi_1^* \quad (35)
\end{aligned}$$

となるので、 h_{20} を以下の形の多項式と仮定する。

$$h_{20}(\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*) = \Delta_{20}^{(1)} \xi_1^2 + \Delta_{20}^{(2)} \xi_1 \xi_1^* + \Delta_{20}^{(3)} \xi_1^{*2} \quad (36)$$

Fig. 2 Variation of natural frequencies

上式を式(35)に代入し、 ξ_1, ξ_1^* の項をまとめると次式を得る。

$$\begin{aligned}
g_{20} = & \left\{ -i(2\omega_1 - \omega_2) \Delta_{20}^{(1)} - \frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{2\omega_2} \right\} \xi_1^2 \\
& + \left\{ i\omega_2 \Delta_{20}^{(2)} - \frac{i(\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2} \right\} \xi_1 \xi_1^* \\
& + \left\{ i(2\omega_1 + \omega_2) \Delta_{20}^{(3)} - \frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{2\omega_2} \right\} \xi_1^{*2} \quad (37)
\end{aligned}$$

ここで、 $\Delta_{20}^{(1)}$ の係数に現れる $2\omega_1 - \omega_2$ について考える。 C_1 の固有振動数 ω_1 によって無次元化された C_2 の固有振動数 ω_2 は、式(13)で表されるように液深 h の関数となる。 $2\omega_1, \omega_2$ と液深 h の関係を図2に示す。図2より、液深 h が小さい場合には $2\omega_1$ と ω_2 の値はほぼ等しくなり、液深 h が大きい場合には異なる値となる。これらは、それぞれ内部共振の起こる場合と起こらない場合に対応する。以降では、低液深 ($2\omega_1 - \omega_2 = O(\varepsilon)$) と、高液深 ($2\omega_1 - \omega_2 = O(1)$) の二つに場合分けを行い、低液深と高液深で異なる量については、それぞれに $\sim$ と $\hat{\sim}$ をつけて区別するものとする。

低液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(\varepsilon)$ の場合 式(37)を最も簡単にするという条件と、式(32)の条件を用いると、低液深の場合の共鳴項 $\hat{g}_{20}$ と座標変換式 $\hat{h}_{20}$ が以下のよう求められる。

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{20} = & -\frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{2\omega_2} \xi_1^2 \quad (38) \\
\hat{h}_{20} = & \frac{\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2}{\omega_2^2} \xi_1 \xi_1^* + \frac{\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2}{2\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)} (-\xi_1^2 + \xi_1^{*2}) \quad (39)
\end{aligned}$$

高液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(1)$ の場合 この場合、式(37)の各項のオーダーは等しくなり、それぞれの項の係数を0とする条件より各係数が得られ、共鳴項 $\hat{g}_{20}$ と座標変換式 $\hat{h}_{20}$ が以下のよう求められる。

$$\hat{g}_{20} = 0 \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
\hat{h}_{20} = & -\frac{\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2}{2\omega_2(2\omega_1 - \omega_2)} \xi_1^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2}{\omega_2^2} \xi_1 \xi_1^* \\
& + \frac{\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2}{2\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)} \xi_1^{*2} \quad (41)
\end{aligned}$$

3.3.2 $O(\varepsilon)$ の簡単化 式 (29), (30), および式 (29), (31) の ε の項を比較する. 式 (38)–(41) より, 液深に関わらず,

$$\frac{\partial h_{20}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial h_{20}}{\partial \xi_2^*} = \frac{\partial g_{20}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial g_{20}}{\partial \xi_2^*} = 0 \quad (42)$$

となること, および式 (33), (34) を用いると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} g_{11} + \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_1} i \omega_1 \xi_1 - \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_1^*} i \omega_1 \xi_1^* \\ + \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_2} (i \omega_2 \xi_2 + g_{20}) - \frac{\partial h_{11}}{\partial \xi_2^*} (i \omega_2 \xi_2^* - g_{20}^*) \\ = i \omega_1 h_{11} - \zeta_1 \omega_1 \xi_1 + \zeta_1 \omega_1 \xi_1^* \quad (43) \\ g_{21} + \frac{\partial h_{20}}{\partial \xi_1} g_{11} + \frac{\partial h_{20}}{\partial \xi_1^*} g_{11}^* + \frac{\partial h_{21}}{\partial \xi_1} i \omega_1 \xi_1 - \frac{\partial h_{21}}{\partial \xi_1^*} i \omega_1 \xi_1^* \\ + \frac{\partial h_{21}}{\partial \xi_2} (i \omega_2 \xi_2 + g_{20}) - \frac{\partial h_{21}}{\partial \xi_2^*} (i \omega_2 \xi_2^* - g_{20}^*) \\ = i \omega_2 h_{21} - \zeta_2 \omega_2 (\xi_2 + h_{20} - \xi_2^* - h_{20}^*) \\ - \frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2} (\xi_1 h_{11} + \xi_1^* h_{11}^*) \\ - \frac{i(\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2} (\xi_1 h_{11}^* + \xi_1^* h_{11}) \quad (44) \end{aligned}$$

式 (43), (44) の形より,

$$h_{11}(\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*) = \Delta_{11}^{(1)} \xi_1 + \Delta_{11}^{(2)} \xi_1^* \quad (45)$$

$$\begin{aligned} h_{21}(\xi_1, \xi_1^*, \xi_2, \xi_2^*) = \Delta_{21}^{(1)} \xi_1^2 + \Delta_{21}^{(2)} \xi_1 \xi_1^* + \Delta_{21}^{(3)} \xi_1^{*2} \\ + \Delta_{21}^{(4)} \xi_2 + \Delta_{21}^{(5)} \xi_2^* \quad (46) \end{aligned}$$

とにおいて, 低液深と高液深のそれぞれにおいて, 共鳴項 g_{11}, g_{21} と座標変換式 h_{11}, h_{21} を求める.

低液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(\varepsilon)$ の場合 式 (38), (39) を式 (43), (44) に代入し, 式 (37) において, $2\omega_1 - \omega_2$ の項が $O(\varepsilon)$ になることを考慮すると, 共鳴項 $\check{g}_{11}, \check{g}_{21}$ と座標変換式 $\check{h}_{11}, \check{h}_{21}$ が次式のように得られる.

$$\check{g}_{11} = -\zeta_1 \omega_1 \xi_1 \quad (47)$$

$$\check{h}_{11} = \frac{i\zeta_1}{2} \xi_1 + \frac{i\zeta_1}{2} \xi_1^* \quad (48)$$

$$\check{g}_{21} = -\zeta_2 \omega_2 \xi_2 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \check{h}_{21} = & \left\{ \frac{i\beta_1(4\zeta_1\omega_1 + 2\zeta_2\omega_1 - 3\zeta_2\omega_2)}{4\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)^2} \right. \\ & + \frac{i\beta_2\omega_1^2(4\zeta_1\omega_1 - 2\zeta_2\omega_1 + 4\zeta_1\omega_2 + 3\zeta_2\omega_2)}{4\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)^2} \Big\} \\ & \times (\xi_1^2 + \xi_1^{*2}) \\ & + \frac{2i\zeta_1\omega_1(\beta_1 + \beta_2\omega_1^2)}{\omega_2^3} \xi_1 \xi_1^* \\ & - \left\{ \frac{2i(\zeta_1\omega_1 - \zeta_2\omega_2)}{2\omega_1 + \omega_2} + \frac{2i\beta_2\zeta_1\omega_1^2}{\beta_1 - \beta_2\omega_1^2} + \frac{\sigma}{2\omega_1 + \omega_2} \right\} \xi_2 \\ & + \frac{i\zeta_2}{2} \xi_2^* \quad (50) \end{aligned}$$

ここで, σ は次式で定義される C_1 と C_2 の固有振動数間の離調度である.

$$\varepsilon\sigma = 2\omega_1 - \omega_2 \quad (51)$$

高液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(1)$ の場合 式 (40), (41) を式 (43), (44) に代入することにより, 共鳴項 $\hat{g}_{11}, \hat{g}_{21}$ と座標変換式 $\hat{h}_{11}, \hat{h}_{21}$ が次式のように得られる.

$$\hat{g}_{11} = -\zeta_1 \omega_1 \xi_1 \quad (52)$$

$$\hat{h}_{11} = \frac{i\zeta_1}{2} \xi_1 + \frac{i\zeta_1}{2} \xi_1^* \quad (53)$$

$$\hat{g}_{21} = -\zeta_2 \omega_2 \xi_2 \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_{21} = i\omega_1 & \left[\frac{\beta_1 \{ \zeta_1 (2\omega_1 + \omega_2) - 2\zeta_2 \omega_2 \}}{\omega_2 (2\omega_1 - \omega_2)^2 (2\omega_1 + \omega_2)} \right. \\ & + \frac{\beta_2 \omega_1 \{ \zeta_1 (2\omega_1 + \omega_2) (\omega_1 - \omega_2) + 2\zeta_2 \omega_1 \omega_2 \}}{\omega_2 (2\omega_1 - \omega_2)^2 (2\omega_1 + \omega_2)} \Big] \xi_1^2 \\ & + \frac{2i\zeta_1 \omega_1 (\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2^3} \xi_1 \xi_1^* \\ & + i\omega_1 \left[\frac{\beta_1 \{ \zeta_1 (2\omega_1 - \omega_2) - 2\zeta_2 \omega_2 \}}{\omega_2 (2\omega_1 - \omega_2) (2\omega_1 + \omega_2)^2} \right. \\ & + \frac{\beta_2 \omega_1 \{ \zeta_1 (2\omega_1 - \omega_2) (\omega_1 + \omega_2) + 2\zeta_2 \omega_1 \omega_2 \}}{\omega_2 (2\omega_1 - \omega_2) (2\omega_1 + \omega_2)^2} \Big] \xi_1^{*2} \\ & + \frac{i\zeta_2}{2} \xi_2 + \frac{i\zeta_2}{2} \xi_2^* \quad (55) \end{aligned}$$

3.3.3 $O(\varepsilon^2)$ の簡単化 同様の手順を用いて, 式 (29) と式 (30), (31) の ε^2 の項を比較することにより, 低液深と高液深のそれぞれの場合における共鳴項 g_{12}, g_{22} と座標変換式 h_{12}, h_{22} が求められる. 座標変換式 h_{12}, h_{22} は繁雑になるので省略し, 共鳴項のみを示す.

低液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(\varepsilon)$ の場合 式 (33), (34), (38), (39), (47)–(50) より,

$$\check{g}_{12} = -\frac{i\zeta_1^2 \omega_1}{2} \xi_1 - \frac{i(\alpha_3 + \alpha_4 \omega_1 \omega_2)}{2\omega_1} \xi_1^* \xi_2 - \frac{\alpha_5 \xi_{00}}{4\omega_1} v \quad (56)$$

$$\check{g}_{22} = -\frac{i\zeta_2^2 \omega_2}{2} \xi_2 - i\check{\Lambda}_1 \xi_1 \xi_1^* \xi_2 - \alpha_5 \xi_{00} \check{\Lambda}_2 \xi_1 v \quad (57)$$

ここで, 係数 $\check{\Lambda}_1, \check{\Lambda}_2$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \check{\Lambda}_1 = & \frac{3\alpha_1 + \alpha_2 \omega_1^2}{\omega_1} + \frac{2\alpha_4 \omega_1 (\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2 + \beta_2 \omega_1 \omega_2)}{\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} \\ & + \frac{\alpha_3 (4\beta_1 \omega_1 + 3\beta_1 \omega_2 + 4\beta_2 \omega_1^3 + \beta_2 \omega_1^2 \omega_2)}{\omega_1 \omega_2^2 (2\omega_1 + \omega_2)} \\ \check{\Lambda}_2 = & \frac{\beta_1}{4\omega_1 \omega_2 (2\omega_1 + \omega_2)} + \frac{\beta_2 \omega_1 (3\omega_1 + 2\omega_2 - \Omega)}{4\omega_2 (2\omega_1 + \omega_2) (\omega_1 + \Omega)} \end{aligned}$$

高液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(1)$ の場合 式 (33), (34), (40), (41), (52)–(55) より,

$$\hat{g}_{12} = -\frac{i\zeta_1^2 \omega_1}{2} \xi_1 - i\hat{\Lambda}_1 \xi_1^2 \xi_1^* - \frac{\alpha_5 \xi_{00}}{4\omega_1} v \quad (58)$$

$$\hat{g}_{22} = -\frac{i\zeta_2^2 \omega_2}{2} \xi_2 - i\hat{\Lambda}_2 \xi_1 \xi_1^* \xi_2 \quad (59)$$

ここで、係数 $\hat{\Lambda}_1, \hat{\Lambda}_2$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_1 &= \frac{3\alpha_1 + \alpha_2 \omega_1^2}{2\omega_1} - \frac{\alpha_4 \omega_1 (\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{4\omega_1^2 - \omega_2^2} \\ &\quad + \alpha_3 \left\{ \frac{\beta_1 + \beta_2 \omega_1^2}{\omega_1 \omega_2^2} - \frac{\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2}{2\omega_1 (4\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right\} \\ \hat{\Lambda}_2 &= \frac{2\alpha_3 (\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{\omega_2 (4\omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{2\alpha_4 \omega_1^2 (2\beta_1 + 2\beta_2 \omega_1^2 - \beta_2 \omega_2^2)}{\omega_2 (4\omega_1^2 - \omega_2^2)} \end{aligned}$$

3-3-4 標準形 以上より、低液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(\varepsilon)$ の場合の標準形は、式 (28), (33), (38), (47), (49), (56), (57) より、

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \left(i - \varepsilon \zeta_1 - \frac{i\varepsilon^2 \zeta_1^2}{2} \right) \omega_1 \xi_1 \\ &\quad - \frac{i\varepsilon^2 (\alpha_3 + \alpha_4 \omega_1 \omega_2)}{2\omega_1} \xi_1^* \xi_2 - \frac{\varepsilon^2 \alpha_5 \xi_{00}}{4\omega_1} v \quad (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \left(i - \varepsilon \zeta_2 - \frac{i\varepsilon^2 \zeta_2^2}{2} \right) \omega_2 \xi_2 - \frac{i(\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2)}{2\omega_2} \xi_1^2 \\ &\quad - i\varepsilon^2 \hat{\Lambda}_1 \xi_1 \xi_1^* \xi_2 + \varepsilon^2 \alpha_5 \xi_{00} \hat{\Lambda}_2 \xi_1 v \quad (61) \end{aligned}$$

であり、高液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(1)$ の場合の標準形は、式 (28), (33), (40), (52), (54), (58), (59) より、

$$\dot{\xi}_1 = \left(i - \varepsilon \zeta_1 - \frac{i\varepsilon^2 \zeta_1^2}{2} \right) \omega_1 \xi_1 - i\varepsilon^2 \hat{\Lambda}_1 \xi_1^2 \xi_1^* - \frac{\varepsilon^2 \alpha_5 \xi_{00}}{4\omega_1} v \quad (62)$$

$$\dot{\xi}_2 = \left(i - \varepsilon \zeta_2 - \frac{i\varepsilon^2 \zeta_2^2}{2} \right) \omega_2 \xi_2 - i\varepsilon^2 \hat{\Lambda}_2 \xi_1 \xi_1^* \xi_2 \quad (63)$$

となる。

3-3-5 振幅と位相 導出された低液深、高液深のそれぞれの場合の標準形に対して、式 (22) と

$$\xi_n = a_n \exp(ib_n), \quad (n = 1, 2) \quad (64)$$

を用いて、振幅と位相の関係を調べる。

低液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(\varepsilon)$ の場合 低液深の時の標準形 (60), (61) に式 (22), (64) を代入し、実数部、虚数部をまとめると以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\varepsilon \zeta_1 \omega_1 a_1 + \varepsilon^2 \alpha_{34} a_1 a_2 \sin(b_2 - 2b_1) \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2 \alpha_5 \xi_{00}}{4\omega_1} \cos(\Omega t - b_1) \quad (65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 \dot{b}_1 &= \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \zeta_1^2}{2} \right) \omega_1 a_1 - \varepsilon^2 \alpha_{34} a_1 a_2 \cos(b_2 - 2b_1) \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2 \alpha_5 \xi_{00}}{4\omega_1} \sin(\Omega t - b_1) \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= -\varepsilon \zeta_2 \omega_2 a_2 + \beta_{12} a_1^2 \sin(2b_1 - b_2) \\ &\quad + \varepsilon^2 \alpha_5 \xi_{00} \hat{\Lambda}_2 a_1 \cos(b_1 - b_2 + \Omega t) \quad (67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 \dot{b}_2 &= \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \zeta_2^2}{2} \right) \omega_2 a_2 - \beta_{12} a_1^2 \cos(2b_1 - b_2) \\ &\quad - \varepsilon^2 \hat{\Lambda}_1 a_1^2 a_2 + \varepsilon^2 \alpha_5 \xi_{00} \hat{\Lambda}_2 a_1 \sin(b_1 - b_2 + \Omega t) \quad (68) \end{aligned}$$

ここで、 α_{34}, β_{12} は、以下の式で表される量である。

$$\alpha_{34} = \frac{\alpha_3 + \alpha_4 \omega_1 \omega_2}{2\omega_1}, \quad \beta_{12} = \frac{\beta_1 - \beta_2 \omega_1^2}{2\omega_2}$$

γ_1, γ_2 を以下のように定義すると、

$$\gamma_1 = 2b_1 - b_2, \quad \gamma_2 = \Omega t - b_1 \quad (69)$$

定常解では、

$$\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0 \quad (70)$$

となるので、

$$b_1 = \Omega, \quad b_2 = 2\Omega \quad (71)$$

となる。式 (70), (71) の $\dot{a}_1, \dot{a}_2, b_1, b_2$ を式 (65)–(68) に代入し整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} 16\varepsilon^4 \omega_1^2 \left\{ (\alpha_{34} \beta_{12} + \hat{\Lambda}_1 \Omega_1)^2 + \varepsilon^2 \zeta_1^2 \omega_1^2 \hat{\Lambda}_1^2 \right\} a_1^6 \\ - \varepsilon^2 \left\{ 32\omega_1^2 (\hat{\Lambda}_1 \Omega_2 \Omega_{11} - \alpha_{34} \beta_{12} \Omega_{12}) + \varepsilon^6 \alpha_5^2 \xi_{00}^2 \hat{\Lambda}_{12}^2 \right\} a_1^4 \\ + 2 \left(8\omega_1^2 \Omega_{11} \Omega_{22} + \varepsilon^6 \alpha_5^2 \xi_{00}^2 \Omega_2 \hat{\Lambda}_{12} \right) a_1^2 = \varepsilon^4 \alpha_5^2 \xi_{00}^2 \Omega_{22} \quad (72) \end{aligned}$$

$$a_2^2 = \frac{\{ 16\varepsilon^2 \zeta_1^2 \omega_1^4 \hat{\Lambda}_{22}^2 + \hat{\Lambda}_{22}^2 \} a_1^4}{\varepsilon^2 \zeta_2^2 \omega_2^2 + (\Omega_2 - \varepsilon^2 \hat{\Lambda}_{12} a_1^2)^2} \quad (73)$$

$$\tan \gamma_1 = \frac{\varepsilon \zeta_2 \omega_2 \hat{\Lambda}_{22} + 4\varepsilon \zeta_1 \omega_1^2 \hat{\Lambda}_2 (\Omega_2 - \varepsilon^2 \hat{\Lambda}_{12} a_1^2)}{\hat{\Lambda}_{22} (\Omega_2 - \varepsilon^2 \hat{\Lambda}_{12} a_1^2) - 4\varepsilon^2 \zeta_1 \zeta_2 \omega_1^2 \omega_2 \hat{\Lambda}_2} \quad (74)$$

$$\tan \gamma_2 = -\frac{\Omega_1 - \varepsilon^2 \alpha_{34} a_2 \cos \gamma_1}{\varepsilon \zeta_1 \omega_1 + \varepsilon^2 \alpha_{34} a_2 \sin \gamma_1} \quad (75)$$

ここで、 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{22}, \hat{\Lambda}_{12}, \hat{\Lambda}_{22}$ は、以下の式で表される量である。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_1 - \frac{\varepsilon^2 \zeta_1^2 \omega_1}{2} - \Omega, \quad \Omega_2 = \omega_2 - \frac{\varepsilon^2 \zeta_2^2 \omega_2}{2} - 2\Omega, \\ \Omega_{11} &= \varepsilon^2 \zeta_1^2 \omega_1^2 + \Omega_1^2, \quad \Omega_{22} = \varepsilon^2 \zeta_2^2 \omega_2^2 + \Omega_2^2, \\ \Omega_{12} &= \varepsilon^2 \zeta_1 \zeta_2 \omega_1 \omega_2 - \Omega_1 \Omega_2, \\ \hat{\Lambda}_{12} &= \hat{\Lambda}_1 + 4\omega_1 \alpha_{34} \hat{\Lambda}_2, \quad \hat{\Lambda}_{22} = \beta_{12} - 4\omega_1 \hat{\Lambda}_2 \Omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

式 (72) は、 a_1^2 に関する 3 次方程式の形となっているので、Cardano の公式を用いることにより、 ξ_1 の定常振幅 a_1 が求められ、得られた a_1 を式 (73), (74), (75) に順に代入することにより、 a_2, γ_1, γ_2 が求められる。式 (69) より、 b_1, b_2 は以下と解けるので、

$$b_1 = \Omega t - \gamma_2, \quad b_2 = 2\Omega t - 2\gamma_2 - \gamma_1 \quad (77)$$

式 (64) より、

$$\xi_1 = a_1 \exp\{i(\Omega t - \gamma_2)\} \quad (78)$$

$$\xi_2 = a_2 \exp\{i(2\Omega t - 2\gamma_2 - \gamma_1)\} \quad (79)$$

(a) Amplitude of asymmetric mode C_1 (b) Amplitude of symmetric mode C_2 (c) Offset value of symmetric mode C_2

Fig. 3 Frequency response (shallow liquid: $h = 0.3$, $\varepsilon^2 \xi_{00} = 0.125^\circ$) —: analysis (stable), --: analysis (unstable), $\bigcirc$: direct numerical integration

となり、低液深時の ξ_1, ξ_2 の定常解が得られる。

また、得られた $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ に微小量 $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta \gamma_1, \Delta \gamma_2$ を付加して式 (65)–(68) に代入し、各微小量について線形化した方程式が、正の固有値を持つかどうかにより、不安定解と安定解の判別を行う。

高液深 $2\omega_1 - \omega_2 = O(1)$ の場合 高液深の時の標準形 (62), (63) に式 (22), (64) を代入する。

$$\dot{a}_1 = -\varepsilon \zeta_1 \omega_1 a_1 - \frac{\varepsilon^2 \alpha_5 \xi_{00}}{4\omega_1} \cos(\Omega t - b_1) \quad (80)$$

$$a_1 \dot{b}_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \zeta_1^2}{2}\right) \omega_1 a_1 - \varepsilon^2 \hat{\Lambda}_1 a_1^3 - \frac{\varepsilon^2 \alpha_5 \xi_{00}}{4\omega_1} \sin(\Omega t - b_1) \quad (81)$$

$$\dot{a}_2 = -\varepsilon \zeta_2 \omega_2 a_2 \quad (82)$$

$$a_2 \dot{b}_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \zeta_2^2}{2}\right) \omega_2 a_2 - \varepsilon^2 \hat{\Lambda}_2 a_2^3 \quad (83)$$

(a) Amplitude of asymmetric mode C_1 (b) Amplitude of symmetric mode C_2 (c) Offset value of symmetric mode C_2

Fig. 4 Frequency responses (deep liquid: $h = 1.0$, $\varepsilon^2 \xi_{00} = 0.25^\circ$) —: analysis (stable), --: analysis (unstable), $\bigcirc$: direct numerical integration

式 (82) より、

$$a_2 = 0 \quad (84)$$

となるので、標準形の方法による簡単化の結果、内部共振の起こらない高液深の定常解は標準形における座標 ξ_1 のみで表されることが分かる。低液深の場合と同様に、

$$\gamma_1 = \Omega t - b_1 \quad (85)$$

とおいて、式 (80)–(81) を整理すると、次式を得る。

$$\varepsilon^4 \hat{\Lambda}_1^2 a_1^6 - 2\varepsilon^2 \hat{\Lambda}_1 \Omega_1 a_1^4 + (\Omega_1 + \varepsilon^2 \zeta_1^2 \omega_1^2) a_1^2 = \frac{\varepsilon^4 \alpha_5^2 \xi_{00}^2}{16\omega_1^2} \quad (86)$$

$$\tan \gamma_1 = -\frac{\Omega_1 - \varepsilon^2 \hat{\Lambda}_1 a_1^2}{\varepsilon \zeta_1 \omega_1} \quad (87)$$

ここで、 Ω_1 は低液深の場合と同様に式 (76) で定義される量である。

式 (86) は、 a_1^2 に関する 3 次方程式の形となっているので、低液深の場合と同様に Cardano の公式を用いる

ことにより ξ_1 の定常振幅 a_1 が得られ、それを式 (87) に代入することにより γ_1 が求められる。式 (85) より

$$b_1 = \Omega t - \gamma_1 \quad (88)$$

となるので、式 (64) より、

$$\xi_1 = a_1 \exp \{i(\Omega t - \gamma_1)\} \quad (89)$$

となり、高液深時の ξ_1 の定常解が得られる。また、低液深の場合と同様の手順により、解の安定判別を行う。

4. 計算例

解析の妥当性の検証のため、標準形の方法により得られた周波数応答曲線を式 (10), (11) の直接数値積分結果と比較する。計算におけるパラメータとして、文献⁽⁴⁾で用いられている下記の値を用い、 $\varepsilon = 0.1$ とした。

低液深: $h = 0.3$, $\varepsilon \xi_1 = \varepsilon \xi_2 = 0.0077$, $\varepsilon^2 \xi_{00} = 0.125^\circ$

高液深: $h = 1.0$, $\varepsilon \xi_1 = \varepsilon \xi_2 = 0.0077$, $\varepsilon^2 \xi_{00} = 0.25^\circ$

励振振動数と逆対称モードの固有振動数間の離調度 $(\Omega - \omega_1)/\varepsilon$ を横軸とした周波数応答を、低液深、高液深の場合について、図 3, 4 に示す。実線と破線はそれぞれ、解析により得られた安定解と不安定解であり、○は式 (10), (11) を直接数値積分した結果である。各図において、(a), (b) はそれぞれ逆対称モード C_1 と対称モード C_2 の振幅であり、(c) は対称モード C_2 の原点からのオフセット量である。物理的に起こり得ない逆対称モード C_1 のオフセットは、どちらの結果においても発生しなかった。また、図 3(b) の横軸の -1 付近で $2\omega_1 \approx \omega_2$ となり、内部共振が起こっている。

これらの周波数応答は定性的および定量的によく一致しており、本解析の有効性は明らかである。また、これらの結果より、従来の研究で指摘されてきた、

- 対称モードの時刻歴が負側へずれる現象
 - 液深 h が大きくなるにつれて、ハードスプリング特性からソフトスプリング特性へ変化する現象
- が、読み取れるのが分かる。

5. 結 論

水平軸まわりのピッチング励振を受ける剛体直方体容器内の液面揺動を支配する、液位 η の一般化座標 C_1, C_2 に関する非線形振動方程式系に対し、標準形の方法を適用して周波数応答解析を行い、以下の知見が得られた。

1. 内部共振の起こる場合と起こらない場合で、別々の標準形となり、内部共振の起こらない場合の定常状態では一つの状態変数のみで表される。

2. 従来の研究により指摘されてきた

- 対称モードの一般化座標の時刻歴が負側へずれる現象
 - 液深が増加するに従いハードスプリングからソフトスプリングに変化する現象
- が標準形の方法により説明できる。

文 献

- (1) Kimura, K. et al., Nonlinear Liquid Oscillation in a Rectangular Tank Subjected to Pitching Excitation, *Proceedings of the 68th Japan Society of Mechanical Engineers Fall Annual Meeting*, Vol. D, No. 900-59 (1990-9), pp. 29-31.
- (2) Kimura, K. et al., Three-Dimensional Sloshing Analysis in a Rectangular Tank Subjected to Pitching Excitation, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 62, No. 596 (1996), pp. 1285-1294.
- (3) Hayama, S. et al., Nonlinear Responses of the Sloshing in a Rectangular Tank (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 49, No. 437 (1983), pp. 22-30.
- (4) Takahara, H. and Kimura, K., Frequency Response of Sloshing in a Rectangular Tank Subjected to Pitching Excitation, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 68, No. 667 (2002), pp. 738-746.
- (5) Funakoshi, M., Chaos in Surface Waves (in Japanese), *Reports of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University*, Vol. 63, (1988), pp. 457-473.
- (6) Sudo, S. et al., Nonlinear Response of a Liquid Surface in Lateral Sloshing, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 54, No. 507 (1988), pp. 3145-3150.
- (7) Nayfeh, A. H., *Method of Normal Forms*, (1993), John Wiley & Sons, New York.
- (8) Tokoyoda, T. et al., Nonlinear Oscillation of a 3 DOF Elastically Mounted Rigid Body with Superharmonic Resonance, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 66, No. 650 (2000), pp. 18-25.