鉛直面内におけるフラフープの運動*
(周期解とカオス)原田 晃^{*1}, 吉武 裕^{*1} 福島明寿^{*2}
坂口欣也^{*3}, 石橋 司^{*4}Dynamics of Hula-Hoop in Vertical Plane
(Periodic Solutions and Chaos)Akira HARADA^{*5}, Yutaka YOSHITAKE, Akizumi FUKUSHIMA,
Kinya SAKAGUCHI and Tsukasa ISHIBASHI^{**} Department of Structural Engineering, Faculty of Engineering, Nagasaki University,
1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki-shi, Nagasaki, 852-8521 Japan

The various motions of hula-hoop in vertical plane were analyzed using the shooting method and ordinary numerical integration. The results are summarized as follows: There exist many types of motion depending on the ratio of vibration amplitude of supporting point and the length between the center of gravity and supporting point of hula-hoop, namely, synchronized rotation, subharmonic rotation, subharmonic vibration, subharmonic reciprocal rotation which vibrates with amplitude larger than π , chaos and so on. The solutions such as the synchronized vibration or rotation bifurcate to chaos after period doubling bifurcations. There are two types of chaos, namely the chaos with dominant vibration and the one with dominant rotation. Because of gravity, the co-existing solutions in the same regions on the motions of the horizontal plane appear in different regions each other on the motions of the vertical plane. The 1/2-subharmonic rotational solution composed of two different rotational patterns was found, this type of solution was not confirmed in the motions of the horizontal plane.

Key Words: Hula-Hoop, Nonlinear Vibration, Chaos, Bifurcation, Shooting Method

1. 緒言

著者らはフラフープを利用した防振・発電装置⁽¹⁾⁻⁽⁹⁾について研究を行ってきたが、フラフープそのものの運動に関しては、Caughey⁽⁶⁾や Horikawa⁽⁷⁾の水平面内における周期解の研究、Yoshida⁽⁸⁾の鉛直面内におけるカオスの研究があるだけで、生ずる多くの運動の存在や分岐を系統的に扱った詳しい研究は今日まで行われていない。Caughey や Horikawa らの解析においてはフラフープの回転角速度を一定とした平均法が用いられており、解の種類と精度が検証されていない。一方、鉛直面内のフラフープに関する Yoshida らの研究は二種類のカオスの存在を確認したものであり周

期解は扱っていない。また、鉛直面内のフラフープの運動は支点を鉛直方向に振動させる振り子の係数励振ととらえることもでき、この系に関する研究⁽⁹⁾⁻⁽¹²⁾も数多くなされているが、係数励振振幅(振り子の支点の振幅)の大きい場合を取り扱った研究は行われていない。

そこで、本研究では制振発電装置への応用を考え、励振振幅の大きい場合や発電機の発電能力に対応する減衰力の広範な範囲についてフラフープの運動形態に関する詳細な系統的検証を行うことを目的とする。前報⁽¹³⁾において、Caughey の扱った水平面内のフラフープの運動について詳細な数値解析および実験による検証を行い、支持部の振幅や系の減衰等の値により、静止解、分数調波型振動解、調和型および分数調波型回転解など様々な種類の周期解やカオスが存在すること、および、それぞれの解の存在領域を明らかにした。本報では、Yoshida らの扱った鉛直面内のフラフープの運動についてカオスのみならず種々の周期解も対象に

* 原稿受付 2005 年 11 月 21 日。

^{*1} 正員、長崎大学工学部(〒852-8521 長崎市文教町 1-14)。^{*2} (株)名村造船所(〒848-0121 伊万里市黒川町塩屋 5-1)。^{*3} (株)マツダ(〒730-8670 広島県安芸郡府中町新地 3-1)。^{*4} 九州大学財務部(〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

E-mail: a_harada@st.nagasaki-u.ac.jp

Fig.1 Analytical model of the Hula-Hoop

詳細な数値解析を行う。すなわち、高精度の周期解を得ることが出来るシューティング法等を用いてフラフープの運動を詳しく調べ、解の種類、その存在領域、解の分岐現象およびそれらに対する重力の影響を明らかにする。

2. フラフープのモデルと運動方程式

図1に本研究で用いたフラフープの解析モデルを示す。ここでは、支点から重心までの距離 l_G 、重心回りの慣性モーメント I_G 、質量 m の振り子の回転中心 O_0 が、鉛直方向に振幅 x_0 、角振動数 ω なる強制変位を行う系を考えている。振り子は鉛直面内で運動すると仮定し、重力は x の正の方向に働いているとする。粘性減衰係数 c を導入すると、運動方程式は

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + (mgl_G + ml_G\omega^2 x_0 \cos \omega t) \sin \theta = 0 \quad (1)$$

となる。ここに、 $l = l_G + ml_G^2$ である。無次元時間を $\tau = \omega t$ とし、両辺を $l\omega^2$ で割ると

$$\theta'' + \gamma\theta' + (\beta^2 + \delta \cos \tau) \sin \theta = 0 \quad (2)$$

となる。ここに

$$\left(\begin{aligned} \gamma &= \frac{c}{l\omega}, \quad \delta = \frac{x_0/l_G}{1/ml_G^2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{mgl_G}{l}}/\omega \end{aligned} \right) \quad (3)$$

である。

3. 数値解析結果

本報では前報同様フラフープの様々な周期運動を高精度で求めるために、シューティング法を用いる。ここで用いるシューティング法は、フラフープの回転角に関する取り扱いを除けば、通常のシューティング法と変わらない⁽¹³⁾。

Yoshida らの研究では固有振動数と支点変位の振動数比である無次元パラメータ β が 0.5、支点の変位振幅に関する無次元パラメータ δ が 0.5225、減衰に関する無次元パラメータ γ が 0.101 および 0.1001055 の限られた場合のカオスのみを取り扱っている。そこで、本研究ではこれよりさらに広いパラメータ範囲を対象とす

Fig.2 Bifurcation diagrams ($\beta = 0.5, \gamma = 0.101$) Fig.3 Average of θ' ($\beta = 0.5, \gamma = 0.101$)

ることとし、 $0 < \delta < 2.5$ の範囲を扱うとともに、減衰に関する無次元パラメータ γ も変化させることによりどのような運動が発生するか調べる。周期解はシューティング法を用いて求め、非周期解は Runge-Kutta-Gill 法を用いて計算し、解の分岐も調べる。数種類の時間きざみ数で数値計算を行った結果、周期解の精度は有効数字はほぼ 7 桁であることを確認している。また、以下で述べる種々の分岐点についてもシューティング法を用いて効率よく高精度で求めることができています。

3-1 解の分岐 固有振動数と支点変位の振動数比である無次元パラメータ β と減衰に関する無次元パラメータ γ は Yoshida らの場合と同じく $\beta = 0.5, \gamma = 0.101$ として計算した。この $\beta = 0.5$ は、式(2)において $\sin \theta$ を θ と線形化した Mathieu 方程式の第 1 不安定領域を意味する。

図 2, 3 に δ を変化させたときの分岐線図と角速度の平均値を、図 4~9 に各分枝の代表的な位相平面と θ' の周波数分析結果を示す。位相平面には、フラフープの支点の変位が最大になる瞬間 ($\tau = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$) のフラフープの位置 (θ, θ') を $\circ$ 印で表している。分岐線図の横軸は無次元変位振幅 δ であり、縦軸は、この支点の変位が最大になる瞬間の θ' を採用している。これは、 $\theta' = 0$ でプロットが連続している場合は静止解を、それから分岐し $\theta' \neq 0$ 付近にプロットが存在している場合はその運動が振動運動であることを意味し、 $\theta' = 1$ 付近にプロットが存在している場合はその運動が回転運動であることを意味する、というように運動状態が

(a) Symmetrical 1/2-subharmonic vibration, $\delta = 0.3325$ (b) Unsymmetrical 1/2-subharmonic vibration, $\delta = 0.3525$ (c) 1/4-subharmonic vibration, $\delta = 0.3575$ (d) Chaos (vibration type), $\delta = 0.3592$ Fig.4 Phase planes and frequency analyses of route (A) ($\beta = 0.5$, $\gamma = 0.101$, center of vibration = 0)

分かりやすいからである。また、周波数分析結果の横軸は無次元角振動数であり、縦軸は $\theta' = 1$ を0 dBとしている。

3-1-1 振動解 まず、図2の $\delta=0$ から始まる分枝(A)に着目すると、 $0 < \delta < 0.1012$ の範囲では $\theta=0$ の静止解、 $0.1012 < \delta < 0.3547$ の範囲では $\theta=0$ を振動中心とし、支点の変位の1周期毎に回転方向が切り換わり、その振幅が π より小さい1/2次分数調波振動解となっている。この解が減衰のあるMathieuの式の第1不安定領域と対応する。 $0.1012 < \delta < 0.3358$ の範囲では対称1/2次分数調波振動解、 $0.3358 < \delta < 0.3547$ の範囲では非対称1/2次分数調波振動解となっている。ここに、本論文では「対称解」、「非対称解」は以下のように定義している。まず、図4(a)の $\delta=0.3325$ の解は、周波数分析結果から基本となる角振動数である1/2の奇数倍の成分で構成されていることがわかる。これは、角速度 θ' の変動周期が 4π 、かつ $0 < r < 2\pi$ における角速度波形を θ'_{fh} 、 $2\pi < r < 4\pi$ における角速度波形を θ'_{sh} とすると、 $\theta'_{fh} = -\theta'_{sh}$ の関係があることを意味する。本論文では、

(a) Symmetrical 1/2-subharmonic vibration, $\delta = 0.8925$ (b) Unsymmetrical 1/2-subharmonic vibration, $\delta = 0.8990$ (c) 1/4-subharmonic vibration, $\delta = 0.89977$ (d) Chaos (vibration type), $\delta = 0.9001$ Fig.5 Phase planes and frequency analyses of route (B) ($\beta = 0.5$, $\gamma = 0.101$, center of vibration = π)

このタイプの解を対称解と呼ぶ。一方、図4(b)の $\delta=0.3525$ では、周波数分析結果は基本となる角振動数である1/2の整数倍で構成されているのがわかる。これは、 $\theta'_{fh} \neq -\theta'_{sh}$ であることを意味する。以後、このタイプの解を非対称解と呼ぶ。 δ を大きくしていくと、 $\delta=0.3547$ からの狭い領域で周期倍分岐を繰り返し、 $\delta>0.3583$ でカオスが発生している。図4(c)に $\delta=0.3575$ のときの1/4次分数調波振動解を示している。また、図4(d)の $\delta=0.3592$ の解の最大リアプノフ指数は0.034であり、カオスと判断される。また、周波数分析結果が振動解(図4(a)~(c))と非常に良く似た特徴を持っていることと角速度の平均値が振動解とほぼ同じであることから、振動のみからなるカオスであることがわかる。以後、このように振動のみからなるカオスを振動型カオスと呼ぶ。図4(d)がBishopら⁽¹⁾が求めた振動型カオス解に相当する。以上から、Mathieuの式に非線形性が導入されることにより、その第一不安定領域では周期解からカオスへ周期倍分岐することがわかった。

次に、 $\delta=0.7819$ から始まる分枝(B)に着目すると、

(a) Symmetrical 1/2-subharmonic reciprocal rotation,

$$\delta = 2.0275$$

(b) Unsymmetrical 1/2-subharmonic reciprocal rotation,

$$\delta = 2.1550$$

(c) 1/4-subharmonic reciprocal rotation, $\delta = 2.1750$ (d) Chaos (reciprocal rotation type), $\delta = 2.1825$ Fig.6 Phase planes and frequency analyses of route (C) ($\beta = 0.5$, $\gamma = 0.101$, center of vibration $= \pi$)

$0.7819 < \delta < 0.8586$ の範囲では $\theta = \pi$ の静止解 (これは倒立振子の支点を振動させることによる安定化に対応する), $0.8586 < \delta < 0.8991$ の範囲では $\theta = \pi$ を振動中心とする振動解となっている。対称解の例を図 5(a) に, 非対称解の例を図 5(b) に示す。これらの間の分岐点は $\delta = 0.8945$ である。この解は周期倍分岐を繰り返し, $\delta > 0.8999$ で振動型カオスとなる。図 5(c) に $\delta = 0.89977$ のときの 1/4 次分数調波振動解を, 図 5(d) に $\delta = 0.9001$ のときの振動型カオスを示す。

シューティング法から求められた対称解から非対称解への分岐および周期倍分岐は, それぞれ特性乗数の一つが 1 および -1 となることから確認している。また, 本論文では, カオスへのルートとして (A)~(F) の分枝について 1/64 次分数調波振動まで確認している。

3-12 往復回転解 まず, 図 2 の $\delta = 1.6956$ から始まる分枝 (C) に着目すると, $1.6956 < \delta < 2.1568$ の範囲では支点の変位の 1 周期毎に回転方向が時計回りと

(a) Symmetrical 1/2-subharmonic reciprocal rotation,

$$\delta = 2.1725$$

(b) Unsymmetrical 1/2-subharmonic reciprocal rotation,

$$\delta = 2.2150$$

(c) 1/4-subharmonic reciprocal rotation, $\delta = 2.2200$ (d) Chaos (reciprocal rotation type), $\delta = 2.2255$ (e) Chaos (reciprocal rotation superior type), $\delta = 2.4975$ Fig.7 Phase planes and frequency analyses of route (D) ($\beta = 0.5$, $\gamma = 0.101$, center of vibration $= 0$)

反時計回りに切り換わり, $\theta = \pi$ を振動中心とし θ の振幅が π より大きい 1/2 次分数調波振動解 (回転方向を変えながら一回転と少しの回転を繰り返している) で, 以後, 往復回転解と呼ぶが発生している。対称解の例を図 6(a) に, 非対称解の例を図 6(b) に示す。これらの間の分岐点は $\delta = 2.0311$ である。この解は周期倍分岐を繰り返し, $\delta > 2.1807$ でカオスとなる。図 6(c) に $\delta = 2.1750$ のときの 1/4 次分数調波往復回転解を, 図 6(d) に $\delta = 2.1825$ のときのカオスを示している。このカオスの最大リアプノフ指数は 0.017 である。図 3 から, このカオスの角速度の平均値が図 6(a)~(c) の往復回転解と

Fig.8 Phase planes and frequency analyses of route (E) ($\beta = 0.5$, $\gamma = 0.101$)

ほぼ同じであることから、往復運動のみからなるカオスであることがわかる。以後、このように往復回転のみからなるカオスを往復回転型カオスと呼ぶ。また、その位相平面と周波数分析結果は図 6(c)の 1/4 次分数調波振動の往復回転解からわずかに複雑になったにすぎない。

次に、 $\delta = 2.0352$ から始まる分枝(D)に着目すると、 $2.0352 < \delta < 2.2161$ の範囲では $\theta = 0$ を振動中心とする往復回転解が発生している。対称解の例を図 7(a)に、非対称解の例を図 7(b)に示す。これらの間の分岐点は $\delta = 2.1748$ である。この解は周期倍分岐を繰り返し、 $\delta > 2.2240$ でカオスとなる。図 7(c)に $\delta = 2.2200$ のときの 1/4 次分数調波振動の往復回転解を示す。図 7(d)の $\delta = 2.2255$ のときの解は最大リアプノフ指数が 0.03 のカオスであるが、角速度の平均値が図 7(a)~(c)の往復回転解とほぼ同じであることから、このカオスは往復回転型カオスであることがわかる。図 7(e)の $\delta = 2.4975$ のときの最大リアプノフ指数は 0.19 である。図 7(e)の解は図 7(d)のカオスと異なり非常に多くの周波数成分を含

Fig.9 Phase planes and frequency analyses of route (F) ($\beta = 0.5$, $\gamma = 0.101$)

んでいるが、0 次成分が比較的小さく 0.5 次の成分が最も大きく 2.5 次のピークも見られるという往復回転解(図 7(a)~(c))に似た特徴を持っている。角速度の平均値が分枝(C)の往復回転型カオスよりもばらついてるものの、往復回転が優位なカオスであると言える。

3-1-3 回転解

まず、図 2 の $\delta = 0.2105$ から始まる分枝(E)に着目すると、水平面内のフラフープの回転解と異なり鉛直面内では重力のため回転解に対称解は存在せず、 $0.2105 < \delta < 1.7449$ の範囲では非対称調和回転解となっている(図 8(b-1)および (b-2))。ただし、 $0.3965 < \delta < 0.7833$ では、解は不安定である。周波数分析結果から基本振動数の 0 倍を含む整数倍の振動数成分から構成されていることがわかる。この分枝(E)では、 δ を大きくしていくと局所的に θ' が非常に小さい部分が現れ、ついには図 8(b-2)のように $\theta' < 0$ となり、フラフープが逆回転する部分が出てきていることがわかる。さらに δ を大きくしていくと、 $\delta = 1.7449$ から周期倍分岐を繰り返し、 $\delta > 1.7874$ でカオスが発生している。図 8(c)に $\delta = 1.7775$ のときの 1/2 次分数調波回転解を示している。また、図 8(d)の $\delta = 1.7875$ のときの最大リアプノフ指数は 0.0027 である。また、周波数分析結果からわかるようにその主要な成分が回転解(図 8(b-1)~(c))と非常に良く似た特徴を持っていることと角速度の平均値が回転解とほぼ同じ 1 であることから、回転のみからなるカオスであることがわかる。以後、このように回

Fig. 10 Bifurcation diagram ($\beta = 0, \gamma = 0.101$) Fig. 11 Phase planes of route (A), (B) ($\beta = 0, \gamma = 0.101$), 1/2-subharmonic vibration

転のみからなるカオスを回転型カオスと呼ぶ。

次に、 $\delta = 1.6672$ から始まる分枝(F)に着目すると、 $1.6672 < \delta < 1.8699$ の範囲では非対称調和回転解となっている。 δ を大きくしていくと、周期倍分岐を繰り返して、 $\delta > 1.9057$ で回転型カオスとなる。図 9(b), (c), (d) に、それぞれ、 $\delta = 1.8675$ のときの非対称調和回転解、 $\delta = 1.8975$ のときの 1/2 次分数調波回転解、 $\delta = 1.9071$ のときの回転型カオスを示す。これら振動解、回転解、往復回転解の間の遷移は、倒立振子の状態に振り上げるといふ観点から以下のように説明できる。まず、支点の振幅が小さい場合は振子を十分に振り上げるまでは至らず $\theta = 0$ を中心に振幅の小さな振動を行う。これが分枝(A)の振動解に相当する。次に、支点の振幅を増大させると、振子の振幅は大きくなり $\theta = \pi$ の手前まで振り上がるようになる。しかし、倒立状態までは至らず落下し、再び振り上げ倒立の試行を行う。このとき、 $\theta = \pi$ を超えて落下をする場合が分枝(E), (F)の回転解に相当する。さらに支点の振幅を倒立振子の振り上げという観点からでは対象としないであろう大きな振幅まで増大させると、振子が振り上がりすぎて振幅が π を超えかつ運動方向を切り替えもう一度 $\theta = \pi$ を超えて落下するような試行が生じてくる。これ

Fig. 12 Phase planes of route (C), (D) ($\beta = 0, \gamma = 0.101$), 1/2-subharmonic reciprocal rotation Fig. 13 Phase planes of route (E), (E*), (F) ($\beta = 0, \gamma = 0.101$), Rotational solution

が、分枝(C), (D)の往復回転解に相当する。また、極めて限られた支点の振幅範囲においては倒立状態を保つことができる。これが、分枝(B)の振動解に相当する。

以上のように、図 3 の平均角速度を用いると、例えば図 7(e)のように位相平面だけではどのような運動が優位であるかの判断が付きにくいようなカオスにおいても、 $\theta'_{ave} \approx 0$ ならば振動が優位なカオス、 $\theta'_{ave} \approx 1$ ならば回転が優位なカオスと、振動と回転のいずれが優位な運動であるかを判定することができる。

3.2 重力の影響 図 10 に水平面内での運動 ($\beta = 0, \gamma = 0.101$) の場合の分岐線図を示す。ただし、静止解、ある解 (θ, θ') に対して $(-\theta, \theta')$ を満たす解、周期倍分岐以降の解は省略してある。 $\delta = 0.4641$ から始まる二つの分枝(A), (B)は振動解であり、 $\delta = 1.8539$ から始まる二つの分枝(C), (D)は往復回転解であり、 $\delta = 0.2022$ から始まる分枝(E)は回転解である。中空印と中実印はそれぞれの解が (θ, θ') と $(\theta + \pi, \theta')$ の関係にあることを示しており、そのため両者の解の存在領域は全く同じである。図 11, 12, 13 に、それぞれ、振動解、往復回転解、回転解の代表的な位相平面を示す。以下、図 4~9 に示した鉛直面内の運動と、図 11~13 に示した水平面内の運動との対応関係を見ていく。

まず振動解と往復回転解に関して着目すると、水平面内の運動においては同じ δ の領域に存在し同等の解と扱えられた (θ, θ') と $(\theta+\pi, \theta')$ の関係にある解(図 11(A-a)と図 11(B-a), 図 11(A-b)と図 11(B-b), 図 12(C-a)と図 12(D-a)および図 12(C-b)と図 12(D-b))は、重力の影響を受けると (θ, θ') と $(\theta+\pi, \theta')$ の関係が崩れ、解が存在する δ の領域も変化し、図 4(a)と図 5(a), 図 4(b)と図 5(b), 図 6(a)と図 7(a)および図 6(b)と図 7(b)のように別の解となる。しかしながら、図 2 の分枝(A), (B), (C), (D)を図 10 の分枝(A), (B), (C), (D)に各々対応させて、それらの分岐を比較すると、重力の作用下においても対称解が存在し、それが非対称解に分岐すること、分岐によって新しく生じる解は (θ, θ') と $-(\theta, \theta')$ の関係を満たす対の解であること、周期倍分岐を繰り返すカオスに至ることなど、解の分岐の過程に関しては重力にかかわらず同様と言える。

次に、回転解に着目すると、振動解や往復回転解と同じく、水平面内の運動においては同じ δ の領域に存在していた (θ, θ') と $(\theta+\pi, \theta')$ の関係にある解(図 13(E-b)と図 13(F-b))が、重力の影響を受け (θ, θ') と $(\theta+\pi, \theta')$ の関係が崩れ、解が存在する δ の領域も変化し、図 8(b-2)と図 9(b)のように別の解となることがわかる。また、水平面内の運動では対称だった解(図 13(E-a))が重力の影響により対称性が崩れ非対称解(図 8(b-1))に変化したことがわかる。このように、回転解は、解の分岐の過程そのものが重力の影響を受け、水平面内の運動においては図 10 の分枝(E)から(E^{*}), あるいは(F)に連続した分枝が、鉛直面の運動においては、図 2 の分枝(E), (F)のように二つの分枝に分離していると言える。

また、水平面内の運動においては同じ δ の領域に存在していた (θ, θ') と $(\theta+\pi, \theta')$ の関係にある解が、重力の影響により解が存在する δ の領域がどのように変化したかを見てみると、図 10 の分枝(A), (C), (E)は図 2 の分枝(A), (C), (E)のように、鉛直面内の運動では、解が存在する範囲が δ の小さい方へ移動している。一方、図 10 の分枝(B), (D), (F)は図 2 の分枝(B), (D), (F)のように、鉛直面内の運動では、解が存在する範囲が δ の大きい方へ移動していることがわかる。これは、図 10 の分枝(A), (C), (E)の解は、 θ' が正から負に切り替わりフラフープの回転方向が逆転する瞬間の θ が静的安定平衡点 $\theta=0$ に近い解であるのに対し、分枝(B), (D), (F)の解は、 θ' が正から負に切り替わりフラフープの回転方向が逆転する瞬間の θ が静的不安定平衡点 $\theta=\pi$ に近い解であることから、後者では重力に逆らって回転方向を変えるにはより大きな δ (支点の変位振幅の無次元値)が必要なためと考えられる。

Fig. 14 Bifurcation diagram ($\beta = 0.5$, $\gamma = 0.101$) (b) Unsymmetrical 1/2-subharmonic rotation, $\delta = 0.4955$ (c) Unsymmetrical 1/4-subharmonic rotation, $\delta = 0.5138$ (d) Chaos (rotation type), $\delta = 0.5225$ (e) Chaos (rotation superior type), $\delta = 0.7825$ Fig. 15 Phase planes and frequency analyses of route (E) ($\beta = 0.5$, $\gamma = 0.101$)

さらに、重力の影響によって 1 倍周期回転解が不安定化した $0.3965 < \delta < 0.7833$ に存在する回転解について詳しく調べてみる。図 14 に分岐線図を、図 15 に代表的な解の位相平面と θ' の周波数分析結果を示す。 $0.3965 < \delta < 0.4963$ の範囲では 1/2 次分数調波回転解となっている。図 15(b)に $\delta = 0.4955$ のときの 1/2 次分数調波回転解を示す。この解は位相平面からわかるように、図 8(c)や図 9(c)に示す 1/2 次分数調波回転解と異なり 1 回転目と 2 回転目の角速度の変化の状況が大きく異なっている。この解は、前報の水平面内の運動では存在

が確認されていないタイプの $1/2$ 次分数調波回転解であることがわかる。その後この解は周期倍分岐を繰り返し、 $\delta > 0.5183$ でカオスとなっている。図 15(c) に $\delta = 0.5138$ のときの $1/4$ 次分数調波回転解を示す。図 15(d) の $\delta = 0.5225$ のときの最大リアプノフ指数は 0.03 であり、このときの角速度の平均値は回転解とほぼ同じであることから、このカオスは回転型カオスであることがわかる。図 15(e) の $\delta = 0.7825$ のときの最大リアプノフ指数は 0.04 である。図 15(e) の解は図 15(d) のカオスと異なり非常に多くの周波数成分を含んでいるが、基本振動数の 0 倍を含む整数倍で構成されているなど回転解(図 8(b)~(c)、図 9(b)、(c))に似た特徴を持っている。しかし、角速度の平均値が回転解と異なることから、回転型というよりも回転が優位なカオスであることがわかる。図 15(d) が Yoshida⁽⁸⁾ らおよび Bishop⁽⁹⁾ らが解析を行った回転型カオスに相当し、図 15(e) が Bishop⁽⁹⁾ らが tumbling カオスと呼んでいるものに相当するが、Bishop⁽⁹⁾ らはリアプノフ指数を求めておらず、カオスの証明ができていない。

3.3 減衰の影響 図 16 に $0 < \gamma < 1.0$ 、 $0 < \delta < 2.5$ の減衰と支点の変位振幅の広い範囲における各解の存在領域を示す。図 16(a) が $\theta = 0$ を振動中心とする振動解と $\theta = \pi$ を振動中心とする振動解に対するものであり、図 16(b) が $\theta = \pi$ を振動中心とする往復回転解と $\theta = 0$ を振動中心とする往復回転解に対するものであり、図 16(c) が回転解の存在領域である。各線種は、実線が解の存在下限(LL)、一点鎖線が対称解と非対称解の境界(OE)、二点鎖線が周期倍分岐の始まり(PD)、点線がリアプノフ指数から求められた周期解の上限(PL)、破線が Runge-Kutta-Gill 法によって求められたカオスの上限(UL)である。また、図中の(A)~(F)の記号はその境界が図 2 の分枝(A)~(F)に対応していることを示す。すなわち、振動解においては、実線と一点鎖線で囲まれる範囲が対称な $1/2$ 次分数調和振動解、一点鎖線と二点鎖線で囲まれる範囲が非対称な $1/2$ 次分数調和振動解、二点鎖線と点線で囲まれる範囲が非対称振動解が周期倍分岐した振動解、点線と破線で囲まれる範囲が振動型および振動が優位なカオスの存在領域であり、往復回転解においては、実線と一点鎖線で囲まれる範囲が対称な $1/2$ 次分数調和往復回転解、一点鎖線と二点鎖線で囲まれる範囲が非対称な $1/2$ 次分数調和往復回転解、二点鎖線と点線で囲まれる範囲が非対称往復回転解が周期倍分岐した往復回転解、点線と破線で囲まれる範囲が往復回転型および往復回転が優位なカオスの存在領域である。また、回転解においては、実線と二点鎖線で囲まれる範囲が非対称な調和回転解、二

Fig. 16 Domains of the motions ($\beta = 0.5$)

点鎖線と点線で囲まれる範囲が非対称回転解が周期倍分岐した回転解、点線と破線で囲まれる範囲が回転型および回転が優位なカオスの存在領域であり、斜線で囲まれた範囲は非対称回転解が不安定な領域である。

これらの図から、減衰の増加とともに各解の存在領域は、各運動形態によって程度に差があるものの、 δ の大きい方へ移ることがわかる。次に、重力の影響を受け水平面内での運動に比べ解が存在する領域が δ の大きい方へ移動した解、図 2 の分枝(B)、(D)、(F)に着目してみる。図 16(a) から、 $\theta = \pi$ を振動中心とする振動解(図 2 の分枝(B))は、減衰の増加とともに存在する δ の領域が徐々に広くなり、 $\theta = 0$ を振動中心とする振動解(図 2 分枝(A))の存在領域に近づき、さらに δ を大きくすると重複している。倒立振り子の振動解は、減衰が大きくなるほど存在領域が広くなると言える。一方、図 16(b) と (c) から、 $\theta = 0$ を振動中心とする往復回転解(図 2 分枝(D))と重力の影響により分離した回転解(図 2 分枝(F))は減衰の増加とともに存在する δ の領域が徐々に狭くなっていることがわかる。

4. 結 言

シューティング法等を用いた高精度の数値計算による、フラフープの各種運動形態に関する研究をまとめると次のようになる。

1. 減衰や励振振幅の広い範囲にわたり静止解、分数調波型振動解、調和型および分数調波型回転解、励振振幅が非常に大きい領域における分数調波型往復回転解、およびそれらの運動が優位なカオスなど、様々な運動形態の存在領域を明らかにした。
2. 支点の振動に同期した回転解や振動解は、本研究で取り扱ったパラメータの範囲内では全て周期倍分岐の後にカオスに至ることが判明した。
3. 振動解および往復回転解では、水平面内の運動において対をなしていた $\theta=0, \pi$ を振動中心とする解が、静的安定平衡点まわりの解と静的不安定平衡点まわりの解に分離し、回転解では、水平面内の運動において存在していた対称解がなくなるなど、フラフープの運動に対する重力の影響が支配的であることを明らかにした。
4. 減衰を大きくすると、水平面内の運動と同じように、各運動形態によって程度に差があるもののその存在領域が支点の変位振幅が大きい方へ移ることが明らかになった。

参考文献

- (1) Yoshitake, Y. *et al.*, Quenching of Self-Excited Vibrations and Generation of Electricity by using Hula-Hoop, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol.66, No.646, C(2000), pp.1785-1792.
- (2) Yoshitake, Y. *et al.*, Reserch on Vibration Control and Electricity Generating Device, *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol.66, No.650, C(2000), pp.3233-3241.
- (3) Yoshitake, Y. *et al.*, Quenching of Vortex-Induced Vibrations of Towering Structure and Generation of Electricity using Hula-Hoops, *J. Sound Vib.*, Vol.272, No.1-2, (2004), pp.21-38.
- (4) Yoshitake, Y. *et al.*, Vibration Control and Electricity Generating Device using a Number of Hula-Hoops and Generators, *J. Sound Vib.*, Vol.275, No.1-2, (2004), pp.77-88.
- (5) Yoshitake, Y. *et al.*, Design of Vibration Control and Electricity Generating, *REPORTS OF THE FACULTY OF ENGINEERING NAGASAKI UNIVERSITY*, (in Japanese), Volo.35, No.64, (2005), pp.41-48.
- (6) Caughey, T. K., Hula-Hoop : An example of hetero-parametric excitation, *Amer. J. Phys.* Vol.28, No.2, (1960), pp.104-109.
- (7) Horikawa, T. and Tsujioka, Y., Motion of Hula-Hoop and its stability, *Keio Science and Technology Reports*, Vol.40, No.3, (1987), pp.27-39.
- (8) Yoshida, K. and Sato, K., Characterization of reverse rotation in chaotic response of mechanical pendulum, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol.33, No.5, (1998), pp.819-828.
- (9) Leven, R. W., Pompe, B., Wilke, C. and Koch, B. P., Experiments on Periodic and Chaotic Motions of a Parametrically Forced Pendulum, *Physica D*, Vol.16, No.3, (1985), pp.371-384.
- (10) Capecchi, D., Geometric Aspects of the Parametrically Driven Pendulum, *Nonlinear Dynamics*, Vol.7, No.2, (1995), pp.231-247.
- (11) Bishop, S. R. and Clifford, M. J., Zones of Chaotic Behaviour in the Parametrically Excited Pendulum, *J. Sound Vib.*, Vol.189, No.1, (1996), pp.142-147.
- (12) Garira, W. and Bishop, S. R., Rotating Solutions of the Parametrically Excited Pendulum, *J. Sound Vib.*, Vol.263, No.1, (2003), pp.233-239.
- (13) Yoshitake, Y. *et al.*, Dynamics of Hula-Hoop in Horizontal Plane(Periodic Solutions and Chaos), *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, (in Japanese), Vol.71, No.707, C(2005), pp.2172-2179.