ころ軸受の対数クラウニングとその最適化手法*

藤原 宏 樹^{*1}, 川瀬 達 夫^{*1}

Logarithmic Profile of Rollers in Roller Bearing and Optimization of the Profile

Hiroki FUJIWARA^{*2} and Tatsuo KAWASE^{*2} NTN corporation,
3066 Higashikata, Kuwana-shi, Mie, 511-8678 Japan

When a bearing roller is in contact with raceways, excessive pressure peaks occur at the ends of the contact rectangles. They are called edge loading. Roller and/or raceway profiles are usually crowned to prevent edge loads. Lundberg developed a logarithmic function as a crowned profile. The profile gives an axially uniform pressure distribution. Johns-Gohar improved the function for convenience of manufacturing. However, the Johns-Gohar profile yields edge loading when the roller is tilted. Also, the profile allows no straight portion on the roller surface although it is desirable to have a flat region from the viewpoint of machining. In this study, we modified the Johns-Gohar logarithmic function to exclude edge loading even when the roller is tilted allowing a flat region. Three parameters, K_1 , K_2 and z_m , are introduced into the Johns-Gohar function. These have the following meanings: K_1 : coefficient of load, K_2 : ratio of crowning length to effective contact length, z_m : crown drop at edge of effective contact length zone. In addition, a mathematical optimization method is used to efficiently determine a set of the parameters. An optimization problem is considered to minimize the maximum contact pressure P_{max} , or to maximize the rolling fatigue life L_{10} . A Rosenbrock method is adopted as the optimization algorithm. The method requires no evaluation of gradients of the objective function. Pressure distribution is calculated by making use of a multilevel method. Some examples are demonstrated to verify the proposed method for both P_{max} and L_{10} .

Key Words: Rolling Bearing, Contact Problem, Numerical Analysis, Logarithmic Crowning, Optimization, Edge Loading

1. 結 論

円筒面や円すい面が接触するとき、接触の端部では応力集中が生じて接触面圧が過大となることが知られている。この端部の過大な接触面圧をエッジ応力と呼ぶ。通常、ころ軸受ではエッジ応力を避けるため、ころ転動面と軌道輪軌道面のいずれかあるいは両方にクラウニングが施されている。図 1 に、ころにクラウニングを施した円筒ころ軸受の概略図を示す。クラウニングによって生じた半径の減少量をドロップ量と呼ぶ。

クラウニングの形状には直線、単一の円弧あるいは複数の円弧の組合せなどがあるが、Lundberg は対数関数で表されるクラウニング (以下、対数クラウニング) を考案した⁽¹⁾。Lundberg の曲線を用いれば、面圧分布を軸方向に均一にできる。ただし、この曲線は、有効接触長さの端部でドロップ量が無限大になる。Lundberg は端部のドロップ量について、近似的に有限の値を与えているが、設計条件によっては形状が不連

続になるという欠点がある。Johns-Gohar はこれを改良した対数関数式を示した⁽²⁾。

ところで、転がり軸受のハウジングと軸は厳密には平行ではなく、ミスアライメントが存在する。また、ミスアライメントは、荷重の負荷による軸のたわみなどによって変化する。このとき、ころは図 1 の x 軸まわりに回転し、内輪あるいは外輪に対して傾斜する。

Fig. 1 Schematic drawing of a crowned roller in a cylindrical roller bearing

* 原稿受付 2005 年 12 月 1 日。

^{*1} 正員, NTN (株) (〒511-8678 桑名市東方 3066).
E-mail: hiroki_fujiwara@ntn.co.jp

これをチルトと呼ぶ。Johns-Gohar の曲線では、ころのチルトによりエッジ応力が発生する。

Reusner はクラウニングを対数形状とすることで、ミスアライメント下であっても、エッジ応力を発生させず、長寿命となると述べている⁹⁾が、その具体的形状については示していない。

高田らは、Lundberg の対数曲線と円弧を組み合わせ、ミスアライメント下で長寿命となるクラウニングを提案している¹⁰⁾。この方法はミスアライメントに対応するクラウニング量を Lundberg の接触理論と別個の円弧の式を用いている点で計算が複雑化するという問題がある。

鎌本らは、内部応力に着目して、最適形状を与える関数式を示している⁹⁾。すなわち、ころと軌道輪の接触部近傍における Mises の相当応力あるいは Tresca の相当応力が軸方向に均一になる場合に、材料の受けるダメージが最小になり、長寿命となるとしている。しかし、鎌本らが与えたクラウニング曲線を表す関数式にはミスアライメントの影響が考慮されていない。

浦田は、ころの中央から端に移るにしたがって曲率半径が小さくなるような複数の円弧を組み合わせたクラウニングを提案している¹⁰⁾。このクラウニングはミスアライメント下でもエッジ応力を生じないことが示されているが、設計方法自体にはミスアライメントが考慮されておらず、許容ミスアライメントが不明確である。

また、上記のいずれの報告もそこで提案されたクラウニングの最適設計方法については詳述していない。本報の目的は、設計が容易な対数関数式を提案し、その最適化手法を示すことにある。具体的には、Johns-Gohar の式をさらに改良し、ミスアライメントによるエッジ応力の発生を防止できる設計手法を提案する。Johns-Gohar の式に 3 つの設計パラメータを導入して設計の自由度を向上させた関数式を導入する。本式を用いれば、接触部に任意のストレート部長さを設けることもできる。さらに、これらのパラメータは数理的最適化法を用いて最適化することが可能であり、その方法を示す。

2. Johns-Gohar の対数関数式とその改良

Johns-Gohar は Lundberg の式を改良し、次式を示した²⁾。

$$z(y) = \frac{2Q}{\pi l E'} \ln \frac{1}{1 - (1 - 0.3033b/a)(2y/l)^2} \quad (1)$$

ここで

a : 有効接触長さの 1/2

b : 接触半幅

E' : 等価ヤング率 $\left(= \frac{E}{1 - \nu^2} \right)$

E : ヤング率

ν : ポアソン比

l : 有効接触長さ

Q : 荷重

y : 軸方向位置

$z(y)$: 軸方向位置 y におけるドロップ量

ところがこの式を適用したとき、後述の手法によって計算するとエッジ応力を発生する場合があります、ミスアライメント下ではこの傾向は顕著となる。また、円筒ころや円すいころは加工上あるいは機能上、ストレート部を有することが望ましい場合もあるが、この式ではストレート部を設けることができない。

この問題を解決するため、式(1)に 3 つの設計パラメータ K_b , K_m , z_m を導入して、式(2)のように書き換える。

$$z(y) = \frac{2K_b Q}{\pi l E'} \times \ln \frac{1}{1 - \left(1 - 0.3033K_m \frac{b}{a} \right) \left\{ \frac{y - (a - y_m)}{l/2} \right\}^2} \quad (2)$$

ここで、 y_m はストレート部の長さを表し、

$$y_m = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{1 - \exp\left(-z_m \frac{\pi l E'}{2K_b Q}\right)}{1 - 0.3033K_m b/a}} \quad (3)$$

で与えられる。

上述したように、円筒ころ軸受用のころにはストレート部を設ける場合がある。式(3)を用いれば、クラウニング長さ y_m は K_b , K_m , z_m を与えることによって定めることができるが、設計パラメータとして y_m を直接与えたほうが便利である。そこで、式(3)から K_m を求め、式(2)に代入して整理すると、

$$z(y) = \frac{2K_b Q}{\pi l E'} \times \ln \frac{1}{1 - \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{z_m \pi l E'}{2K_b Q}\right) \right\} \left\{ \frac{y - (a - y_m)}{y_m} \right\}^2} \quad (4)$$

と書ける。さらに、 K_2 を

$$y_m = K_2 a$$

のように定義すると

$$z(y) = A \ln \frac{1}{1 - \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{z_m}{A}\right) \right\} \left(\frac{y-a}{K_2 a} + 1 \right)^2} \quad (5)$$

ただし $A = \frac{2K_1 Q}{\pi l E'}$

が得られる。このとき、各設計パラメータは次のような意味を持つ。

K_1 : Q の倍率

K_2 : a に対するクラウニング長さの割合

z_m : 有効接触長さで端部でのドロップ量

K_1 は幾何学的にはクラウニング部の曲率に対応している。図2に各パラメータの指示部と形状の対応を示す。

これらの設計パラメータを最適に選択すれば、ころがチルトしてもエッジ応力を生じない対数クラウニングを設計することができる。

Fig. 2 Logarithmic profile parameters

Fig. 3 Contact deformation and pressure distribution

3. 接触面圧の計算方法

接触部断面の模式図を図3に示す。2つの面の接触部では圧力が発生し、非接触部では圧力は発生しない。すなわち、二面間の距離を $h(x, y)$ とすると、

$$\begin{aligned} h(x, y) > 0, p(x, y) &= 0 && \text{非接触部} \\ h(x, y) = 0, p(x, y) &> 0 && \text{接触部} \end{aligned} \quad (6)$$

なる関係にある。

二面間の距離 $h(x, y)$ は二物体の弾性接近量を $h_0 (< 0)$ 、半無限弾性体の表面形状を $g(x, y)$ 、半無限弾性体表面の変位量を $u(x, y)$ とおくと、

$$h(x, y) = h_0 + g(x, y) + u(x, y) \quad (7)$$

と書ける。このとき、面圧 $p(\eta, \xi)$ と変位量 $u(x, y)$ は式(8)の関係にある。

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\eta, \xi) d\eta d\xi}{\sqrt{(x-\eta)^2 + (y-\xi)^2}} \quad (8)$$

ここで、 (η, ξ) は xy 平面上の座標点である。すなわち、式(8)は、 (x, y) での変位量は、すべての点における面圧 p の影響を受け、その影響の大きさは (x, y) と (η, ξ) の距離に逆比例することを意味している。

また、面圧の面積分は法線荷重 Q に等しいから

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy \quad (9)$$

のように表せる。

以上の連立方程式を、反復法を用いて数値的に解いた。一般的な反復法では、計算対象空間に設けた格子間隔に対して長波長の誤差成分が収束しにくいという欠点がある。また、通常の計算方法では、格子点数を n とすると、式(8)の計算に $O(n^2)$ のオーダーの計算

Fig. 4 Schematic drawing of a roller and an inner ring used in contact pressure calculation

時間が必要となる。そこで、マルチレベル法⁷⁾を用いて高速化して数値計算を行った。マルチレベル法とは、反復法による連立方程式の収束計算を高速化するマルチグリッド法と、式(8)の二重積分を $O(n \log n)$ の速度で実行するマルチレベル マルチインテグレーション (MLMI) を組み合わせた高速演算アルゴリズムである。

4. 対数クラウニングを与えたころの接触面圧分布

図 4 に示す円筒ころと内輪の接触について考える。クラウニングはころのみに与えることにする。材料は、ころ、内輪とも軸受鋼とする。計算格子は接触領域を軸方向 256 分割、周方向 32 分割とする。

チルト角を 0 rad としたときのクラウニング形状と面圧分布の関係を図 5 に示す。クラウニングを設けないとき、ころ有効接触長さ端部で 10.7 GPa と極めて大きなエッジ応力を生じている。Johns-Gohar 曲線でもエッジ応力が生じており、最大値は 3.7 GPa である。クラウニングがない場合に対し Johns-Gohar 曲線の場合、エッジ応力の値は約 1/3 となっているが、エッジ応力の値は計算格子のサイズに依存するので、単純に数値の比較はできない。しかし、ここでは同じサイズの計算格子を用いているので、大小関係の議論には問題はない。

一方、式(2)によるクラウニングの場合、図 4 の条件では、

$$K_1 = 1, K_2 = 1, z_m = 12.7 \mu\text{m}$$

とすれば、Johns-Gohar 曲線と一致するが、例えば

$$K_1 = 1.4, K_2 = 1, z_m = 14 \mu\text{m}$$

とすれば、エッジ応力は発生しない。

Fig. 5 Contact pressure distributions when the tilting angle is 0 rad

$K_2 = 1$ とすると、有効接触長さの全領域にクラウニングを施すことになる。 $K_2 = 0.5$ として、クラウニング領域を a の 1/2 とすると、面圧分布は図 5 に示すように、接触部の中央部で減少し、両端付近でやや増大する。ただし、この面圧の増大は、クラウニング部と面取部の交点の接触によるスパイク状の面圧増加ではなく、すなわちエッジ応力とは異なる。

ころに 0.001 rad のチルトを与えたときの面圧分布を図 6 に示す。Johns-Gohar 曲線では、チルト角 0 rad の場合と同様、エッジ応力の発生が見られる。

“ $K_1 = 1.4, K_2 = 0.5, z_m = 14 \mu\text{m}$ ” はチルト角 0 rad ではエッジ応力は発生しなかったが、チルト角 0.001 rad ではエッジ応力が発生している。そこで、 z_m を $14 \mu\text{m}$ から $17 \mu\text{m}$ に大きくして

$$K_1 = 1.4, K_2 = 0.5, z_m = 17 \mu\text{m}$$

とすると、エッジ応力の発生を防止できる。

5. 設計パラメータの最適化

5.1 最適化アルゴリズム 上述のように設計パラメータを変更することによって、最大面圧を低減することが可能であるが、その最適値を解析的に与えることは困難である。そこで、計算機を用いて、設計パラメータを自動的に最適化する手法を考える。

最適化アルゴリズムには、共役勾配法、焼き鈍し法、遺伝的アルゴリズムなど種々のものが提案されている。本問題に関して、例えば、目的関数を最大面圧あるいは転動疲労寿命とした場合、それらの導関数の解析的な導出は不可能であり、数値微分も困難であるので、直接探索法の一つである Rosenbrock 法⁸⁾を採用する。概略は次のとおりである。

Fig. 6 Contact pressure distributions when the tilting angle is 0.001 rad

- ①変数空間に方向ベクトルを定め、変数値を方向ベクトルに沿って変化させる。
- ②変数値の変化により、目的関数が改善されればその変化を受容し、悪化すれば棄却する。
- ③①、②を所定回数繰り返したのち、収束していれば終了する。収束していなければ方向ベクトルを修正して①に戻る。

Rosenbrock 法に限らず、最適化手法は解の収束性に対して初期値依存性が強い。ここで言う解の収束性とは収束解自体と収束解が得られるまでの計算量を意味する。最適化問題において良好な初期値を定めることは重要な問題である。

本研究では、次のような方法で初期値を決定する。なお、目的関数には面圧に限らず転動疲労寿命を採用することもできるが、下記の説明では最大面圧 P_{max} を目的関数とする。

- ①初期値を探索する設計パラメータの範囲と、その範囲内でのそれぞれのパラメータの値の個数を指定する。
- ② K_1, K_2, z_m の値の個数がそれぞれ l, m, n であるとき、 $(l \times m \times n)$ 個の設計パラメータの組合せが設定される。すべての組合せについて面圧計算を実行し、 P_{max} を求める。
- ③ P_{max} が最小となる組合せを最適化の初期値として採用する。

5.2 最適化の例 円筒ころ軸受のクラウニングの最適化計算例を示す。ころのみにクラウニングを設けた場合は、ころと外輪間の最大面圧よりもころと内輪間の最大面圧のほうが大きくなる。したがって、クラウニングの最適化を考える上では、ころと内輪の接触について検討すればよい。ころにクラウニングを設けると、ミスアライメント条件下では、ころは内輪に対して、ミスアライメントの1/2だけチルトすると考える。

以下、本章の計算例では図4の幾何形状、荷重条件とし、材料はころ、内輪とも軸受鋼とした。

5.2.1 チルト角が0 rad の場合 表1の条件で最適化を行った。初期値探索によって得られる設計パラメータと最大面圧の関係を図7に3D等高線グラフで示す。図7(a)~(f)では、 K_2 を0~1の間で0.2ずつ変化させている。各グラフでは、各 K_2 における、 K_1, z_m, P_{max} の関係を示す。

最良な初期値は図7(e)に見られるように

$$K_{10} = 1.4$$

$$K_{20} = 0.8$$

$$z_{m0} = 12.5 \mu\text{m}$$

であった。Rosenbrock 法によって最適化した結果、設計パラメータの最適値

$$K_1 = 1.295$$

$$K_2 = 0.879$$

$$z_m = 12.684 \mu\text{m}$$

が得られた。最適設計パラメータによるクラウニングのとき、面圧分布は図8のように軸方向にほぼ均一となる。

5.2.2 チルト角が0.001 rad の場合 ころにチルトがあり、かつ、ストレート部を設けた場合について検討した。すなわち、 K_2 を0.5で固定し、最適化の対象から除外した。最適化の条件を表2に示す。

最良な初期値は

$$K_{10} = 2.8$$

$$z_{m0} = 16 \mu\text{m}$$

であった。最適化によって、設計パラメータの最適値

$$K_1 = 2.779$$

$$z_m = 16.253 \mu\text{m}$$

が得られた。このとき、面圧分布は図9ようになる。チルトがあるため、軸方向の負の位置で最大面圧が発生し、ストレート部を設けたため、中央部での面圧分布が凹型となっている。

本手法ではこのように、チルトがある場合や、ストレート部を設けた場合であっても最適な対数クラウニングを設計することが可能である。

Table 1 Optimizing condition No. 1

Objective function	Maximum pressure
Roller tilting angle	0 rad
Initial value searching area of K_1	1~3
Initial value searching area of K_2	0~1
Initial value searching area of z_m	5~20 μm

Table 2 Optimizing condition No. 2

Objective function	Maximum pressure
Roller tilting angle	0.001 rad
Initial value searching area of K_1	2~4
Initial value searching area of	10~30 μm

Table 3 Optimizing condition No. 3

Objective function	Rolling fatigue life
Roller tilting angle	0 rad
Initial value searching area of K_1	1~3
Initial value searching area of K_2	0~1
Initial value searching area of z_m	5~20 μm

Fig. 7 Design parameters and maximum pressure under the optimizing condition No.1

Fig. 8 Pressure distribution of the optimized profile under the condition No.1 ($K_1=1.295$, $K_2=0.879$, $z_m=12.684 \mu\text{m}$)

Fig. 9 Pressure distribution of the optimized profile under the condition No.2 ($K_1=2.779$, $K_2=0.5$, $z_m=16.253 \mu\text{m}$)

Fig. 10 Pressure distribution of the optimized profile under the condition No.3 ($K_1=1.065$, $K_2=0.982$, $z_m=10.799 \mu\text{m}$)

5・2・3 寿命を目的関数とした場合 最適化の目的関数としてころの転動疲労寿命を用いることもできる。寿命の計算は Harris の方法⁹⁾によった。最適化の条件は表3のとおりである。

最良な初期値は

$$K_{10} = 1.2$$

$$K_{20} = 0.9$$

$$z_{m0} = 11 \mu\text{m}$$

であった。最適化によって、設計パラメータの最適値

$$K_1 = 1.065$$

$$K_2 = 0.982$$

$$z_m = 10.799 \mu\text{m}$$

が得られた。ここで採用した最適化の条件ではエッジ応力の発生を許容しているため、このときの面圧分布は図10のようになり、両端でエッジ応力が発生している。

5・2・4 対数クラウニングの形状 以上の条件で最適化された対数クラウニングの形状を図11に示す。“最適化条件1(目的関数 最大面圧, チルト角 0 rad)”と“最適化条件3(目的関数 寿命, チルト角 0 rad)”を比較すると、形状の差異はほとんどないことがわかる。ところが、寿命を目的関数とすると、図10のようにエッジ応力が生じる。図7を見ると、 K_2 を固定して考えたとき、最大面圧を目的関数としたときの最適点より K_1 あるいは z_m がわずかに小となった場合に、最大面圧が急激に増加することがわかる。この最大面圧の増加はエッジ応力が発生したために生じている。定性的には、面圧が大きければ寿命は短くなるが、エッジ応力のような局所的な面圧の増加は、Harris の寿命の計算方法ではその影響が小さい。したがって、最適化の目的関数にいずれを採用するかによって、ころの形状はほぼ同じであるにも関わらず、エッジ応力の発生の有無が異なる。

6. 結 論

ころ軸受の対数クラウニングの設計において、対数クラウニングの式に設計パラメータを導入し、数値的最適化法を用いて、そのパラメータを決定する方法を提案した。

具体的には、Johns-Gohar の関数式を改良し、設計の自由度を向上させた対数クラウニング式を示した。導入した設計パラメータは次の3つである。

K_1 : 設計荷重の倍率, 幾何学的にはクラウニング部の曲率に影響

K_2 : 原点から面取部までの長さに対するクラウニング長さの割合

Fig. 11 Optimized roller profiles under the conditions No. 1 to 3

z_m : 有効接触長さ端部でのドロップ量

K_2 は基本形状の設計時に定めることもあるので、この場合には K_1 と z_m のみを最適化すればよい。最適の条件は最大面圧最低または寿命最長とした。最適化アルゴリズムには Rosenbrock 法を用いた。これらの設計パラメータを数値的に最適化することでミスアライメント条件下においても、ころ軸受の最適な対数クラウニングが得られる。

下記に本手法の特徴をまとめる。

- (1) 対数クラウニングを設計する場合、ミスアライメントを考慮するに際して、従来、その影響を対数関数と分離して扱っていたものを本手法では設計パラメータの形で扱うことによって対数式の中に取り入れた。
- (2) 3つの設計パラメータがクラウニング形状と対応していることによって、パラメータの値のみでクラウニング形状の特徴を表現できる。
- (3) ストレート部を設計パラメータとすることによって、ストレート部と対数クラウニングの組合せを容易に且つ大きい自由で可能にした。
- (4) 対数クラウニング設計に数値最適化手法を取り入れるという新たな設計手法を提案した。

文 献

- (1) Lundberg, G., Elastic Contact Between Two Semi-Infinite Bodies, *Forschung auf den Gebiete des Ingenieurwesen*, 5(1939), pp.201-211. (in German)
- (2) Johns, P. M. and Gohar, R., Roller bearings under radial and eccentric loads, *Tribology International*, 14(1981), pp.131-136.
- (3) Reusner, H., The logarithmic roller profile—the key to superior performance of cylindrical and taper roller bearings, *Ball Bearing Journal*, 230(1987), pp.2-10.
- (4) Takata, H. et al., Experimental Study of Fatigue Life of Profiled Roller Bearings, *NSK Technical Journal* 653(1992), pp.1-7. (in Japanese)
- (5) Kamamoto, S. et al., Research on Crowning Profile to Obtain The Maximum Load Carrying Capacity for Roller Bearings, *KOYO Engineering Journal*, 159(2001), pp.44-51.
- (6) Urata, S., Investigation of Optimum Crowning Profile of Cylindrical Roller Bearings Part 2, *FUJIKOSHI Engineering Review*, 56(2000), pp.14-23. (in Japanese)
- (7) Venner, C. H. and Lubrecht, A. A., *Tribology Series*, 37 *Multilevel Methods in Lubrication*, (2000), Elsevier Science B. V.
- (8) Bazarrá, M. S. et al., *Nonlinear Programming*, (1993), p.291, John Wiley & Sons.
- (9) Harris, T. A., *Rolling Bearing Analysis* Forth Edition, (2000), pp.728-729, John Wiley & Sons.