修正 Hill 方程式に基づく人工衛星の軌道計画*

島 岳 也^{*1}, 山 田 克 彦^{*2}
軸 屋 一 郎^{*3}, 吉 河 章 二^{*1}

Trajectory Planning of a Spacecraft based on the Modified Hill's Equation

Takeya SHIMA^{*4}, Katsuhiko YAMADA,
Ichiro JIKUYA and Shoji YOSHIKAWA^{*4} Advanced Technology R & D Center, Mitsubishi Electric Corporation,
8-1-1 Tsukaguchi-Honmachi, Amagasaki-shi, Hyogo, 661-8661 Japan

Trajectory planning of a spacecraft in formation flying is considered in this paper. Based on the equations of motion of the spacecraft that incorporate effects of J_2 geopotential disturbance, time-periodic realtive equations of motion are derived. Using the Floquet theorem to periodic terms due to J_2 disturbance, approximate solutions for eigenvalues and eigenvectors of the state transition matrix of the linearized equations are obtained by perturbation calculation and characteristics of relative motion are discussed. A correction term of an initial velocity of formation flying to suppress the effects of J_2 disturbance is obtained based on the approximate solutions. Numerical studies are conducted to verify the proposed trajectory planning.

Key Words: Space Engineering, Motion Control, Spacecraft, Trajectory Planning, J_2 Disturbance, Formation Flying, Hill's Equation

1. ま え が き

2機以上の宇宙機が、相対的な位置関係を保ちながら運動するフォーメーションフライトは、近年観測ミッションにおいてその重要性が注目されており、いくつかのプロジェクトが計画されている⁽¹⁾。

フォーメーションフライトにおける宇宙機の相対運動の研究は、通常、Hill 方程式とその解⁽²⁾を基礎としている。これは、基準軌道として円軌道を仮定し、地球を完全な球とみなしたうえで、重力加速度によるこの配の線形項を用いて方程式を導いたもので、相対運動を表すダイナミクスは、定係数の線形方程式によって記述される。しかし、低軌道のフォーメーションフライトを行う場合、地球偏平性や軌道離心率、相対運動ダイナミクスの非線形項など、相対運動に影響を与える他の外乱の寄与を考慮することが重要である。地球偏平性による重力ポテンシャルの付加項(J_2 項)は、Hill 方程式の解に影響を与える最も大きな摂動の一

つである。 J_2 項は軌道運動を行う宇宙機に作用し、その影響は、フォーメーションを行う宇宙機の相対運動に対する永年ドリフト項となって現れる。

Hill 方程式に J_2 項の影響を取り込む試みは、これまでにも多くの研究が行われている。Schweighart ら⁽³⁾は、 J_2 項の影響を取り込む形で Hill 方程式を拡張し、相対運動のダイナミクスを記述する定係数の線形方程式を導出した。同様に Ross⁽⁴⁾や Roberts ら⁽⁵⁾は J_2 項による重力加速度のこの配を求め、相対運動のダイナミクスを記述する時変係数の線形方程式を導出した。

本報では、Schweighart らにより提案された基準軌道を用いて、相対運動のダイナミクスを記述する、周期的に変動する係数を持つ線形方程式を導出する。この方程式は J_2 項の影響を取り込んだものとなっており、相対運動のダイナミクスは線形時間周期システムで記述される。周期システムに対する Floquet の定理より⁽⁶⁾、このシステムの安定性は、1 周期の状態遷移行列の固有値を用いて議論できる。導出した方程式において、 J_2 項に起因する時間周期項を摂動とみなし、固有値に対する解析解を導出し、相対運動の特性について述べる。また宇宙機間の相対運動の時間発展は、線形時間周期システムの状態遷移行列を用いて記

* 原稿受付 2006年4月27日。

^{*1} 正員、三菱電機(株)先端技術総合研究所(☎661-8661 尼崎市塚口本町8-1-1)。^{*2} 正員、名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋市千種区不老町)。^{*3} 名古屋大学大学院工学研究科。

E-mail: Shima.Takeya@cb.MitsubishiElectric.co.jp

述することができる。Floquet の定理より、この状態遷移行列は、定数行列と、軌道周期で変動する周期行列に分解することができる⁽⁷⁾。これらに対する解析解も、摂動法により導出する。この結果から、 J_2 項によるフォーメーションの変動分を抑えるような初期値の補正量を求めることができる。

2機の宇宙機が円軌道フォーメーションを形成する場合を例にとり、数値シミュレーションにより提案する手法の有効性を確認する。

2. 記号の定義

座標系として、慣性座標系と相対運動の基準とする軌道固定座標系(基準軌道に固定された座標系)を考え、軌道固定座標系は進行方向を x 軸、地心方向を z 軸にとる。さらに以下の記号を定義する。

ω : 軌道固定座標系の慣性座標系に対する角速度

Ω : 昇交点赤経

i : 軌道傾斜角

θ : 緯度引数

μ_e : 地球の重力定数

R_e : 地球の赤道方向半径

J_2 : 地球の重力ポテンシャルにおける二次項の係数 ($J_2=1.0826 \times 10^{-3}$)

$\mathbf{p}$: 慣性座標系原点から衛星固定座標系原点までの距離ベクトル

$\mathbf{I}_m$: $m \times m$ 次元単位行列

$\mathbf{0}_m$: $m \times m$ 次元零行列

特に断らない限り、ベクトルは軌道固定座標系で表現されているものとし、ベクトルの上に $\cdot$ を付ける場合は、そのベクトルの各成分を時間微分したものを意味する。また三次元ベクトルの外積演算を表す 3×3 マトリックスは、ベクトルの上に $\wedge$ を付けて表す。すなわち

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

また基準軌道に関する諸量を添字 ref で記述する。

3. J_2 項を考慮した相対運動方程式 (修正 Hill 方程式)

3・1 基準軌道 相対運動を記述する方程式を導出する際には、まず相対運動の基準とする基準軌道を定め、この基準軌道のまわりで線形化を行う。相対運動を記述する方程式として広く用いられている Hill 方程式では、基準軌道として、以下に示すように中心力項のみを考慮した半径一定の円軌道を用いている。

$$\ddot{\mathbf{p}}_{ref} + 2\tilde{\omega}_H \dot{\mathbf{p}}_{ref} + \tilde{\omega}_H \tilde{\omega}_H \mathbf{p}_{ref} = \mathbf{g}(\mathbf{p}_{ref}) \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで $\mathbf{g}(\mathbf{p}_{ref})$ は、地球を完全な球と仮定した際の中心力項であり、 ω_H は中心力項のみを考慮したときの軌道固定座標系の角速度である。これらはこの座標系で次のように表される。

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}_{ref}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu_e/R_{ref}^2 \end{bmatrix}, \quad \omega_H = \begin{bmatrix} 0 \\ -n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (2)$$

ただし、 R_{ref} は基準軌道の半径(一定)であり、 n は基準軌道の角速度である。すなわち

$$\|\mathbf{p}_{ref}\| = R_{ref}, \quad n = \sqrt{\frac{\mu_e}{R_{ref}^3}}$$

さて地球偏平性による J_2 項の影響は、昇交点赤経や近地点引数の永年的なドリフトとなって現れることが知られている。 J_2 項を考慮すると、衛星の軌道運動を表す運動方程式は、次のように表される。

$$\ddot{\mathbf{p}} + 2\tilde{\omega} \dot{\mathbf{p}} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) + \mathbf{j}_2(\mathbf{p}) \quad \cdots \cdots (3)$$

ここで $\mathbf{j}_2(\mathbf{p})$ は J_2 項による加速度項(J_2 項)であり、慣性座標系で次のように表される⁽⁸⁾。

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{p}) = \frac{3}{2} \frac{J_2 \mu_e R_e^2}{p^7} \begin{bmatrix} (5p_z^2 - p^2)p_x \\ (5p_z^2 - p^2)p_y \\ (5p_z^2 - 3p^2)p_z \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (4)$$

ただし $p = \|\mathbf{p}\|$ であり、 $\mathbf{p}$ の慣性座標系での表現を次のようにおく。

$$\mathbf{p} = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$$

J_2 項の影響を考慮する場合に、式(1)のような基準軌道を仮定すると、衛星の相対位置は基準軌道に対してドリフトすることになり、運動方程式導出の際に前提とする線形化の仮定(軌道半径に対して相対距離が十分に小さい)が、破綻することになる。

このように J_2 項の影響を考慮する場合には、式(1)に代わる新たな基準軌道を定義する必要がある。Schweighart らは基準軌道として、中心力項に加えて、 J_2 項の軌道 1 周期にわたる平均成分および軌道面に垂直な成分を考慮した、以下の半径一定の円軌道を提案している⁽³⁾。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_{ref} + 2\tilde{\omega} \dot{\mathbf{p}}_{ref} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \mathbf{p}_{ref} + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \mathbf{p}_{ref} = \mathbf{g}(\mathbf{p}_{ref}) \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{j}_2(\mathbf{p}_{ref}) d\theta + [\mathbf{j}_2(\mathbf{p}_{ref}) \cdot \mathbf{e}_y] \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad \cdots \cdots (5)$$

ここで $\mathbf{e}_y$ は、軌道固定座標系の y 軸方向を示す単位ベクトルである。右辺第 2 項が軌道周期に対する補正項、第 3 項が昇交点赤経のドリフトに対する補正項を表す。式(5)の近似解として、Schweighart らは以下の解析解を導いている。

$$i_{ref}(t) = i_0 - \frac{n\alpha}{2k} \cos i_0 \sin i_0 \left\{ \frac{1 - \cos[2k(t+t_0)]}{2} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\Omega_{ref}(t) = \Omega_0 - \frac{n\alpha}{2k} \cos i_0 \left\{ kt - \frac{\sin[2k(t+t_0)]}{2} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\theta_{ref}(t) = k(t+t_0) - \frac{n\alpha}{4k} \cos^2 i_0 \sin[2k(t+t_0)] \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで

$$\alpha = \frac{3J_2 R_e^2}{R_{ref}^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$k = nc + \frac{n\alpha}{2} \cos^2 i_0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$s = \frac{\alpha}{8} [1 + 3 \cos(2i_0)] \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$c = \sqrt{1+s} \quad \dots\dots\dots (12)$$

また t_0 は初期時刻を表す。式(6)～(8)の半径 R_{ref} の円軌道を、相対運動を記述する際の基準軌道とする。

なお式(6)～(8)の i_{ref} , Ω_{ref} , θ_{ref} を用いると、式(5)の ω は軌道固定座標系で次のように表される。

$$\omega = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_{ref} \cos \theta_{ref} \sin i_{ref} - \dot{i}_{ref} \sin \theta_{ref} \\ -\dot{\Omega}_{ref} \cos i_{ref} - \dot{\theta}_{ref} \\ -\dot{\Omega}_{ref} \sin \theta_{ref} \sin i_{ref} - \dot{i}_{ref} \cos \theta_{ref} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

3.2 基準軌道に対する衛星の相対運動 基準軌道に対する衛星の相対位置を次のように定義する。

$$\xi = p - p_{ref} \quad \dots\dots\dots (14)$$

相対運動の方程式は、式(14)の両辺を慣性空間で2階時間微分して、右辺に式(5)を代入すれば得られる。これを軌道固定座標系で表現すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\tilde{\omega}\dot{\xi} + \tilde{\omega}\dot{\xi} + \tilde{\omega}\tilde{\omega}\xi &= -n^2(K - 2\alpha H)\xi \\ &- \begin{bmatrix} n^2\alpha R_{ref} \sin^2 i_{ref} \sin \theta_{ref} \cos \theta_{ref} \\ 0 \\ n^2 R_{ref} \left(s + \frac{3}{2}\alpha \sin^2 i_{ref} \sin^2 \theta_{ref} - \frac{\alpha}{2} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし K は 1, 1, -2 を対角成分とする 3×3 対角行列, H は 3×3 対称行列であり, H の (i, j) 成分 H_{ij} は次のように表される。

$$H_{11} = -\frac{1}{4} - \sin^2 i_{ref} \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4} \sin^2 \theta_{ref} \right)$$

$$H_{12} = \frac{1}{2} \sin i_{ref} \cos i_{ref} \cos \theta_{ref}$$

$$H_{13} = -2 \sin^2 i_{ref} \sin \theta_{ref} \cos \theta_{ref}$$

$$H_{22} = -\frac{3}{4} + \sin^2 i_{ref} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \sin^2 \theta_{ref} \right)$$

$$H_{23} = 2 \sin i_{ref} \cos i_{ref} \sin \theta_{ref}$$

$$H_{33} = 1 - 3 \sin^2 i_{ref} \sin^2 \theta_{ref}$$

3.3 J_2 項の影響を受ける2機の衛星間の相対運動

J_2 項の影響を受ける2機の衛星間の相対運動は、式(15)を基に求めることができる。2機の衛星の位置をそれぞれ p_1 , p_2 , また基準軌道に対する相対位置を ξ_1 , ξ_2 で記述する。このとき、2機の衛星間の相対位置 Δp は次のように表される。

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \xi_2 - \xi_1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

したがって $\Delta \xi = \xi_2 - \xi_1$ とおくと、相対運動の方程式は、式(15)の ξ を $\Delta \xi$ に置換して非同次項を消去することにより、次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\xi} + 2\tilde{\omega}\Delta \dot{\xi} + \tilde{\omega}\Delta \dot{\xi} + \tilde{\omega}\tilde{\omega}\Delta \xi \\ + n^2(K - 2\alpha H)\Delta \xi = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(17)より、相対運動を記述する方程式は、係数行列が周期的に変動する線形システムとなる。 $J_2=0$ とおくと、式(17)は通常の Hill 方程式となる。本報では、 J_2 項の影響を受ける2機の衛星の相対運動を記述する式(17)を、修正 Hill 方程式と呼ぶ。

4. 修正 Hill 方程式における相対運動の特性

4.1 周期システムに対する Floquet の定理 周期的に変動する係数行列を持つ以下の線形システムを考える。

$$\dot{x} = A(t)x \quad \dots\dots\dots (18)$$

A は各要素が周期 T で変動する行列である。

$$A(t+T) = A(t) \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(18)の解は、状態遷移行列 $\Phi(t)$ を用いて次のように表される。

$$x(t) = \Phi(t)x(0) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで $\Phi(t)$ は、以下の方程式を満たす。

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\Phi(0) = I \quad (\text{Identity Matrix})$$

Floquet の定理より、状態遷移行列 $\Phi(t)$ は二つの行列 F と J を用いて、次のように表現することができる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

$$\Phi(t) = F(t) \exp(Jt) F^{-1}(0) \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで J は定数行列(一般に複素行列), F は周期 T で変動する行列である。状態遷移行列 $\Phi(t)$ に周期性はないが、 $\Phi(t)$ を式(22)のように、定数行列 J と周期行列 F を用いて表現できることが特徴である。

さて F は周期行列のため、式(22)は時刻 T において次式となる。

$$\Phi(T) = F(0) \exp(JT) F^{-1}(0) \quad \dots\dots\dots (23)$$

すなわち $F(0)$ は、その各列が $\Phi(T)$ の固有ベクトル

から構成される行列となる。式(23)の関係より、以下のような手順で J と $F(t)$ を求めることができる。

- (1) 式(21)を1周期積分して $\Phi(T)$ を得る。
- (2) $\Phi(T)$ の固有値と固有ベクトルを求める。
- (3) 固有値から行列 J , 固有ベクトルから行列 $F(0)$ が求まる。 $\Phi(t)$ と式(22)を用いれば、 $F(t)$ を求めることもできる。

4・2 J_2 項を摂動とする摂動計算

4・2・1 状態遷移行列の固有値 修正 Hill 方程式(17)より、 J_2 項の影響を受ける2機の衛星の相対運動は、以下に示す線形周期システムで記述される。

$$\dot{x} = A(t)x \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$x = [\Delta\xi^T \quad \Delta\dot{\xi}^T]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ -(\ddot{\omega} + \dot{\omega}\dot{\omega} + n^2(K - 2\alpha H)) - 2\ddot{\omega} & \end{bmatrix}$$

周期行列 $A(t)$ および角速度 $\omega(t)$, 角加速度 $\dot{\omega}(t)$ は、それぞれ次のように表すことができる。

$$A(t) = A_H + \delta A(t) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\omega(t) = \omega_H + \delta\omega(t) \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\dot{\omega}(t) = \delta\dot{\omega}(t) \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで下付添字の H は、 J_2 項を含まない通常の Hill 方程式における諸量を示し、 δ の付随する項はそれからの摂動を示している。この J_2 項による摂動の大きさはパラメータ α で表され、その大きさは0.003程度となる。 J_2 項を含まない A_H は次のように表される。

$$A_H = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3n^2 & -2n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

このシステムの状態遷移行列を $\Phi(t)$ とすると、 $\Phi(t)$ は次式を満たす。

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \quad \dots\dots\dots (28)$$

いま $\delta A(t)$ を微小摂動とみなして、状態遷移行列を近似的に求めることを考える。 $\Phi(t)$ を次のように展開する。

$$\Phi(t) = \Phi_0(t)[I_6 + \delta\Phi(t) + \delta^2\Phi(t) + \dots] \quad \dots\dots (29)$$

ただし

$$\Phi_0(t) = \exp(A_H t), \quad \dot{\Phi}_0(t) = A_H \Phi_0(t) \quad \dots\dots (30)$$

式(28)の右辺に式(29)を代入したものと、式(29)の右辺の時間微分を等置して δ の一次の項を両辺で比較すると

$$\begin{aligned} A_H \Phi_0(t) \delta\Phi(t) + \delta A(t) \Phi_0(t) \\ = A_H \Phi_0(t) \delta\Phi(t) + \Phi_0(t) \delta\dot{\Phi}(t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (31)$$

したがって

$$\delta\dot{\Phi}(t) = \Phi_0(-t) \delta A(t) \Phi_0(t) \quad \dots\dots\dots (32)$$

また δ の二次の項を両辺で比較して

$$\begin{aligned} A_H \Phi_0(t) \delta^2\Phi(t) + \delta A(t) \Phi_0(t) \delta\Phi(t) \\ = A_H \Phi_0(t) \delta^2\Phi(t) + \Phi_0(t) \delta^2\dot{\Phi}(t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (33)$$

したがって

$$\delta^2\dot{\Phi}(t) = \Phi_0(-t) \delta A(t) \Phi_0(t) \delta\Phi(t) \quad \dots\dots\dots (34)$$

このように、摂動項を順次積分して求めることができる。

いま求めたい量は、一周期 T における状態遷移行列 $\Phi(T)$ であり、これは式(29)から次のように表すことができる。

$$\Phi(T) = \Phi_0(T)[I_6 + \delta\Phi(T) + \delta^2\Phi(T) + \dots] \quad \dots\dots\dots (35)$$

ところで、式(8)から、元の Hill 方程式における軌道角速度 n に対して、 J_2 項を含む系では式(10)の k が軌道角速度とみなされる。 n による周期を T_0 , k による周期を T とおくと、 T は T_0 を用いて次のように展開することができる。

$$T = T_0 + \delta T + \delta^2 T + \dots \quad \dots\dots\dots (36)$$

式(36)を用いて式(35)の右辺の各項を展開すると、 $\Phi(T)$ における零次、一次、二次の摂動項を求めることができる。この結果を用いれば、 $\Phi(T)$ の固有値も摂動展開から求めることができる。まず $\Phi(T)$ の特性方程式を $f(s)$ とする。 $\Phi(T)$ の零次の摂動である $\Phi_0(T_0)$ の特性方程式は、1の6重根をもつので、 $f(s)$ を次のように1のまわりで展開する。

$$f(1+\delta s) = f(1) + \sum_{k=2}^6 \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f}{ds^k} \right|_{s=1} \delta s^k \quad \dots\dots\dots (37)$$

上式において $f(1+\delta s) = 0$ を解いて、 δs の六次式から解を求めると、 $\Phi(T)$ の固有値を一次の摂動の範囲で求めることができる[この計算を正確に行うためには、 $\Phi(T)$ は二次の摂動まで求める必要がある]。 $t=0$ における緯度引数を θ_0 とするとき、 $\Phi(T)$ の固有値は、軌道面内方向と軌道面外方向で次のように求められる。

In-Plane :

$$\lambda_{1p} = 1 + \Delta\lambda_1, \lambda_{1m} = 1 - \Delta\lambda_1 \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\lambda_{2p} = 1 + \Delta\lambda_2, \lambda_{2m} = 1 - \Delta\lambda_2 \quad \dots\dots\dots (39)$$

Out-of-Plane :

$$\lambda_{3p} = 1 + \Delta\lambda_3, \lambda_{3m} = 1 - \Delta\lambda_3 \quad \dots\dots\dots (40)$$

ただし

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\pi\alpha}{4\sqrt{2}} \sin i_0 \sqrt{151 + 281 \cos^2 i_0}$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{\pi\alpha}{2} \sqrt{(3 - 7 \cos^2 i_0)(1 + 3 \cos^2 i_0)}$$

$$\Delta\lambda_3 = \frac{3\pi\alpha}{8} \sin^2 i_0$$

この結果より、次のことが明らかである。

(1) J_2 項の影響は, y 方向(面外方向)においては状態遷移行列の実固有値となって現れるので, 面外は発散する成分を持つ。

(2) J_2 項の影響は, xz 方向(面内方向)においても状態遷移行列の少なくとも二つのモードの実固有値となって現れるので, 面内も発散する成分を持つ。しかも発散の時定数は, 面外成分よりもはるかに大きい。また軌道傾斜角 i_0 が $\cos^2 i_0 \leq 3/7$ であれば, さらにもう一つのモードも発散する。

(3) 状態遷移行列の固有値は, 初期の緯度指数 θ_0 の影響を受けない(状態遷移行列そのものは初期位相によって値が変化するが, 固有値は影響を受けない)。

4.2.2 状態遷移行列の固有ベクトル $\Phi(T)$ が得られれば, これを式(23)のように展開する。式(23)の J と $F(0)$ が得られれば, N 周期後の遷移行列 $\Phi(NT)$ は

$$\Phi(NT) = F(0) \exp(JNT) F(0)^{-1} \quad (41)$$

として求めることができ, フォーメーションの長期的な傾向を知ることができる。ここではこの $F(0)$ を, やはり摂動法で求めることにしよう。 $\Phi(T)$ の零次の摂動項である $\Phi_0(T_0)$ は, その6個の固有値のすべてが1であり, 独立な固有ベクトルは5個あるので, 次のように展開することができる。

$$\Phi_0(T_0) = F_0(0) E_0 F_0(0)^{-1} \quad (42)$$

E_0 は対角成分が1で, (1, 2)成分を1とし, 残りの成分は零とする行列である。 $F_0(0)$ は $\Phi_0(T_0)$ の固有ベクトルから構成できる。ただし, $F_0(0)$ を構成する4個の固有ベクトルについては, その任意の線形結合をとっても $F_0(0)$ を構成することができる。ここで摂動を考慮する場合の $F(0)$ を, 次式を満たすように選ぶ。

$$\Phi(T) = F(0) E F(0)^{-1} \quad (43)$$

いま対角成分を

$$\Delta_{11}, -\Delta_{11}, \Delta_{12}, -\Delta_{12}, \Delta_{13}, -\Delta_{13}$$

とする対角行列を δA とすると, E は行列 $(I_6 + \delta A)$ において, (1, 2)成分を1に変えたものである。式(23)に対応させるためには J の(1, 2)成分を $1/T$ とし, 対角成分をそれぞれ $\log \lambda_{1p}/T, \log \lambda_{1m}/T, \log \lambda_{2p}/T, \log \lambda_{2m}/T, \log \lambda_{3p}/T, \log \lambda_{3m}/T$ とおけばよい(J のそれ以外の成分は零)。

$F(0)$ を $F_0(0)$ から摂動展開で求めよう。 $F(0)$ を

$$F(0) = F_0(0) + \delta F \quad (44)$$

とおくと, 一次の摂動の範囲で $F(0)^{-1}$ は次のように表すことができる。

$$F(0)^{-1} = F_0(0)^{-1} - F_0(0)^{-1} \delta F F_0(0)^{-1} \quad (45)$$

式(44)と式(45)を式(43)に代入し, さらに式(42)を用いることによって, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} E F_0(0)^{-1} \delta F - F_0(0)^{-1} \delta F E \\ = \delta A - F_0(0)^{-1} \delta F F_0(0) \end{aligned} \quad (46)$$

ただし

$$\delta F_T = \Phi(T) - \Phi_0(T_0)$$

式(46)が δF に対して可解となる条件から, $F_0(0)$ における固有ベクトルの組合せが定まり, その $F_0(0)$ を用いて式(46)から δF を求めれば, $F(0)$ が一次の摂動の範囲で解析的に求められる。

5. 修正 Hill 方程式を用いた軌道計画

5.1 フォーメーション形成のための初期値 J_2

項の影響を考慮しない通常の Hill 方程式から, フォーメーションを形成するための初期値を求める。いま式(24)において, 各成分を次のようにおく。

$$\Delta \xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \Delta \dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Hill 方程式において, 各座標の初期値を次のように選ぶ。

$$x(0) = -\frac{2\dot{z}(0)}{n}, \quad \dot{x}(0) = 2nz(0) \quad (47)$$

$$y(0) = \frac{1}{\tan \phi} z(0), \quad \dot{y}(0) = \frac{1}{\tan \phi} \dot{z}(0) \quad (48)$$

このとき Hill 方程式の解は, 次のようになる。

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \sin(nt) z(0) - \frac{2 \cos(nt)}{n} \dot{z}(0) \\ y(t) &= \frac{\cos(nt)}{\tan \phi} z(0) + \frac{\sin(nt)}{n \tan \phi} \dot{z}(0) \\ z(t) &= \cos(nt) z(0) + \frac{\sin(nt)}{n} \dot{z}(0) \end{aligned} \quad (49)$$

上式のように $y(t)$ と $z(t)$ が同位相で運動するので, yz 面内における軌跡は直線状になり, x 方向の運動と合わせて平面上のフォーメーションが構成できる。この直線と y 軸のなす角度が ϕ となる。

一方, この運動軌道を図1のように, y 軸とのなす角度が ϕ となるような平面(投影面)に投影することを考える。この投影面における座標を Y, x として Y

Fig. 1 Motion trajectory of spacecraft and its surface of projection

を次式で表す.

$$Y = y \cos \phi + z \sin \phi \quad \dots\dots\dots (50)$$

Y, x は次式を満たす.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\cos(\phi-\phi)/\sin \phi}\right)^2 = z(0)^2 + \left(\frac{\dot{z}(0)}{n}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (51)$$

いま

$$z(0) = \frac{r}{2} \cos \beta, \quad \dot{z}(0) = -\frac{nr}{2} \sin \beta \quad \dots\dots\dots (52)$$

とおくことにすると, x, y の初期値は次のようになる.

$$x(0) = r \sin \beta, \quad \dot{x}(0) = nr \cos \beta \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$y(0) = \frac{r \cos \beta}{2 \tan \phi}, \quad \dot{y}(0) = -\frac{nr \sin \beta}{2 \tan \phi} \quad \dots\dots\dots (54)$$

式(51)は次のように表すことができる.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\cos(\phi-\phi)/\sin \phi}\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (55)$$

ここで $\phi = \pi/6$ にとると, 半径 r の円フォーメーション⁽⁹⁾となり, $\phi = 0, \tan \phi = 1/2$ にとると, 衛星の地表面投影が円となるフォーメーションになる.

5.2 J_2 項の影響を考慮した初期値の設定 ある初期条件 $\mathbf{x}(0)$ から出発して, N 周期後の状態 $\mathbf{x}(NT)$ を求めよう. 式(43)から次式が成り立つ.

$$\mathbf{x}(NT) = \mathbf{F}(0) \mathbf{E}^N \mathbf{F}(0)^{-1} \mathbf{x}(0) \quad \dots\dots\dots (56)$$

ここで $\mathbf{E}^N$ は, 一次の摂動の範囲では行列 $(\mathbf{I}_6 + N\delta\mathbf{A})$ において, (1, 2)成分を N に変えたものである.

いま状態 $\mathbf{x}$ の初期値 $\mathbf{x}(0)$ を, 速度の初期値に α のオーダの微小修正項を加えて, 次のようにおく場合を考えよう.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} r \sin \beta \\ r \cos \beta / (2 \tan \phi) \\ r \cos \beta / 2 \\ nr \cos \beta + \delta \dot{x}_0 \\ -nr \sin \beta / (2 \tan \phi) + \delta \dot{y}_0 \\ -nr \sin \beta / 2 + \delta \dot{z}_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (57)$$

$\mathbf{x}(NT)$ の α の零次の項は, $\mathbf{x}(0)$ の零次項と等しくなる. ここでは $\mathbf{x}(NT)$ の α の一次の摂動項を, さきに求めた $\mathbf{E}$ および $\mathbf{F}(0)$ から求めた結果を示す. この摂動項の第 k 成分を δx_{Nk} とおくと, これらは次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \delta x_{N1} = & -\frac{6\pi N}{n} \delta \dot{x}_0 + \frac{\pi N r \alpha}{4 \sin \phi} \\ & \times [32 \sin i_0 \cos i_0 \sin \theta_0 \cos \beta \cos \phi \\ & + (1 - 3 \cos^2 i_0 - 4 \sin^2 i_0 \cos^2 \theta_0) \cos \beta \sin \phi \\ & - 8 \sin i_0 \cos i_0 \cos \theta_0 \sin \beta \cos \phi \\ & - 48 \sin^2 i_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \beta \sin \phi] \quad \dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

$$\delta x_{N2} =$$

$$-\frac{\pi N r \alpha \sin^2 i_0}{16 \tan \phi} [10 \cos \theta_0 \sin(\theta_0 - \beta) + \sin \beta] \quad \dots\dots\dots (59)$$

$$\begin{aligned} \delta x_{N3} = & \frac{\pi N r \alpha}{4} [4 \sin^2 i_0 \cos \theta_0 \sin(\theta_0 - \beta) \\ & + (1 + 3 \cos^2 i_0) \sin \beta] \quad \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x_{N4} = & \delta \dot{x}_0 + \frac{\pi n N r \alpha}{2} [4 \sin^2 i_0 \cos \theta_0 \sin(\theta_0 - \beta) \\ & + (1 + 3 \cos^2 i_0) \sin \beta] \quad \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x_{N5} = & \delta \dot{y}_0 - \frac{\pi n N r \alpha \sin^2 i_0}{16 \tan \phi} [10 \cos \theta_0 \cos(\theta_0 - \beta) \\ & - 9 \cos \beta] \quad \dots\dots\dots (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x_{N6} = & \delta \dot{z}_0 + \frac{\pi n N r \alpha}{4} [4 \sin^2 i_0 \cos \theta_0 \cos(\theta_0 - \beta) \\ & - (3 - 7 \cos^2 i_0) \cos \beta] \quad \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

この結果より次のことがわかる.

(1) J_2 項の影響で, 1 周期ごとの位置は徐々にずれていく. y 方向と z 方向については初期速度の微小摂動の影響を受けないので, 初期速度を変化させることで, このずれを抑えることはできない. ただしずれの大きくなるのは x 方向であり, x 方向については次のように $\delta \dot{x}_0$ を設定することで, 一次の摂動量を零とすることができる. これは N 周期後の x 方向のずれを抑えるものであるが, N の値には依存しない.

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_0 = & -\frac{n r \alpha}{24 \sin \phi} [32 \sin i_0 \cos i_0 \sin \theta_0 \cos \beta \cos \phi \\ & + (1 - 3 \cos^2 i_0 - 4 \sin^2 i_0 \cos^2 \theta_0) \cos \beta \sin \phi \\ & - 8 \sin i_0 \cos i_0 \cos \theta_0 \sin \beta \cos \phi \\ & - 48 \sin^2 i_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \beta \sin \phi] \quad \dots\dots\dots (64) \end{aligned}$$

(2) J_2 項の影響で 1 周期ごとの速度も単調に変化する. この速度のずれは, 初期速度に対して α 倍のオーダである. z 方向の位置ずれには, x 方向の速度ずれがそのまま反映される.

6. 数値計算例

相対運動の基準とする基準軌道として, 以下の軌道を考える.

$$R_{ref} = 7000 \text{ km}, \quad i_0 = 35 \text{ deg}, \quad \Omega_0 = 0 \text{ deg}$$

J_2 項の影響を考慮した軌道ダイナミクス(真のモデル)として, 式(3), (4)で表されるダイナミクスを用いる. このモデルに対して図2は, 状態遷移行列 $\Phi(T)$ を数値的に求めてその固有値を求めたものと, 式(38)~(40)を用いて解析的に求めたものを, 実部と虚部と比較したものである. 図2に示すように, 数値的に求めた固有値と解析解はよい一致を示す.

次に2機の衛星(チェイサとターゲット)間の相対軌道の地表面投影が円軌道となる, フォーメーション

(a) Real parts of eigenvalues

(b) Imaginary parts of eigenvalues

Fig. 2 Comparison of analytical (lines) and numerical (○) eigenvalues of $\Phi(T)$

(a) Without correction of an initial velocity

(b) With correction of an initial velocity

Fig. 3 Trajectories during 10 orbital periods of circular formation

($\phi=0, \tan \phi=1/2$) の形成を考える。チェイサはターゲットに対して、式(57)の相対初期速度により局所水平面内(xy 平面内)で、半径 $r=1$ km の円軌道を描くものとする。ただし、式(57)において $\delta\dot{y}_0=\delta\dot{z}_0=0$ とおき、 $\delta\dot{x}_0$ を零または式(64)によって与えるものとする。

図3(a)は、 $\beta=0, \theta_0=2\pi/5$ として、 $\delta\dot{x}_0=0$ のときの初期時刻から10周期間の相対軌道を示したものである。初期位置を○印で、目的とする形状を一点鎖線で示しており、時間が経過するにつれて、円フォーメーションの形状は次第に崩れていくことがわかる。一方、図3(b)は、式(64)の $\delta\dot{x}_0$ を用いた場合であり、形状の崩れを抑えていることがわかる。

また、この両者の円軌道半径の変化を図4に示す。

Fig. 4 Comparison of radii in circular formation

(a) Formation radius change

(b) $\delta\dot{x}_0$ correctionFig. 5 Formation radius drift and $\delta\dot{x}_0$ correction with respect to θ_0

図4は横軸に軌道周期をとり、チェイサのターゲットに対する局所水平面内の距離の変化を示している。状態遷移行列に対する解析解が得られているので、円フォーメーション形成から時刻($NT+t$)秒後の($0 \leq t \leq T$)状態は、次のように推定できる。

$$\mathbf{x}(t+NT) = \Phi(t)\Phi(NT)\mathbf{x}(0) \cdots \cdots \cdots (65)$$

図4には、補正の有無の各々に対してシミュレーション結果と、上式から求めた解析解を合わせて示す。この場合にも解析解は、良い精度でシミュレーション結果と一致している。

また、1周期における局所水平面内の距離の変動分の最大値を $\beta=0$ とし、 θ_0 を横軸にとって図5(a)に示す。ここでも δx_0 による補正の有無の各々に対して、シミュレーション結果(10周期の平均)と解析結果を合わせて示す。また図5(b)は、そのときの式(64)による補正量である。 θ_0 のほとんどのケースで、補正を行うことにより距離の変動を抑えられている。 θ_0 が π の整数倍の付近で、補正を行わないほうが変動の少ない結果が得られているが、この付近では一次の補正量(摂動)が小さく、式(64)が N 周期後の変動を抑えるもので、その間の変動の最大値を直接的に抑えるものではないことの影響と考えられる。

7. 終わりに

本報では、 J_2 項の影響を受ける2機の宇宙機が、フォーメーションを維持する際の相対運動に関する解析を行った。Schweighartらにより提案された基準軌道を用いて、 J_2 項による重力加速度のこう配をとることにより、 J_2 項の影響を取り込んだ修正 Hill 方程式を導出した。この方程式は、軌道周期で変動する係数を持つ線形方程式であり、2機の宇宙機間の相対運動は線形周期時変システムにより記述できる。この方程式において、 J_2 項に起因する時間周期項を摂動とみなし、摂動計算を行うことにより、状態遷移行列の固有

値や固有ベクトルを解析的に求めることができる。またこの解析解から、宇宙機の相対運動の特性を把握することができる。

導出した解析解を用いて、フォーメーションを維持するための軌道計画手法を導出した。 J_2 項を考慮した非線形軌道ダイナミクスに基づく数値シミュレーションを行い、導出した手法の有効性を確認した。ここで述べた解析手法および軌道計画手法は、2機の宇宙機がフォーメーションを維持する際の、基本方式を提供するものと考えられる。

文 献

- (1) Bauer, F. H. et al., Enabling Spacecraft Formation Flying through Spaceborne GPS and Enhanced Automation Technologies, *Proceedings of the 12th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation*, (1999-9), pp. 369-383.
- (2) Clohessy, W. H. and Wiltshire, R. S., Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous, *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 27, No. 9 (1960), pp. 653-658.
- (3) Schweighart, S. A. and Sedwick, R. J., High-Fidelity Linearized J_2 Model for Satellite Formation Flight, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 6 (2002), pp. 1073-1080.
- (4) Ross, I. M., Linearized Dynamic Equations for Spacecraft Subject to J_2 Perturbations, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 4 (2003), pp. 657-659.
- (5) Roberts, J. A. and Roberts, P. C. E., The Development of High Fidelity Linearized J_2 Models for Satellite Formation Flying Control, *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, Paper AAS 04-162, (2004).
- (6) Calico, R. A. and Wiesel, W. E., Control of Time-Periodic Systems, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 6 (1984), pp. 671-676.
- (7) Wiesel, W. E., Optimal Impulsive Control of Relative Satellite Motion, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 1 (2003), pp. 74-78.
- (8) Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control*, (1997), p. 37.
- (9) Nakasuka, S., Formation Flight of Spacecraft, *Systems, Control and Information*, Vol. 45, No. 10 (2001), pp. 574-579.