複数の非線形集中ばねで支持された 弾性ブロックの周波数応答の高速 FEM 解析*

山口 誉 夫^{*1}, 伊 沢 篤^{*2}
永 井 健 一^{*1}, 丸 山 真 一^{*1}

Fast Finite Element Analysis of Frequency Responses for Elastic Block Supported by Plural Nonlinear Springs

Takao YAMAGUCHI^{*3}, Atsushi IZAWA,
Ken-ichi NAGAI and Shinichi MARUYAMA

^{*3} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

A fast computational method is proposed to calculate nonlinear vibration characteristics for elastic blocks supported by plural nonlinear concentrated springs using finite element method. The restoring force of the springs is expressed as power series of displacement. Finite elements for the nonlinear springs are added to the nodal force of elastic blocks modeled by linear solid finite elements. Further, the discretized equations in physical coordinate are transformed into nonlinear ordinary coupled equations using normal coordinate corresponding to linear natural modes. First, the proposed method for the case having plural nonlinear springs is verified. Next, as a numerical example, influences of Young's modulus on nonlinear frequency responses for the elastic blocks with nonlinear springs are demonstrated.

Key Words: Finite Element Method, Nonlinear Vibration, Computer Aided Analysis, Flexible Structure, Vibration of Continuous System

1. 緒 言

各種の精密電子機器の匡体や衝撃に弱い物体を集中ばねで支持することで、外部からの振動を絶縁し保護することが行われる。このような集中ばねには荷重と変位の間に非線形性を持つものもある。一方、機器の匡体は一般に弾性体であり、弾性体を非線形集中ばねで支持した問題の解明は重要といえる。

集中質量と非線形集中ばねからなる系の非線形振動特性、カオス振動について、多くの研究がある。近年では、例えば Proper Orthogonal Modes の同定⁽¹⁾ などがある。一方、弾性構造物と非線形集中ばね系について、以下の研究がある。非線形集中ばねで支持されたほうが複数連結された系の振動応答の高速安定判別法の研究⁽²⁾、両端単純支持ほうが中央で非線形集中ばねで支持される系の Nonlinear Modal Analysis の研究⁽³⁾ などがある。著者らは、復元力が伸びのべき級数で表さ

れる非線形集中ばねで、ブロック状の弾性体が支持された系の非線形共振応答を有限要素法で解析してきた⁽⁴⁾⁽⁵⁾。その解析では、線形固有振動形に対応する基準座標を導入し、応答を高速演算する手法を提案した。ついで、このモデルで、非線形集中ばねに線形ヒステリシス減衰を与えた場合の応答の高速解析法を提案した⁽⁶⁾。さらに非線形集中ばねの復元力が、ばね両端の相対変

Fig.1 Simulation model

* 原稿受付 2006 年 5 月 8 日.

^{*1} 正員, 群馬大学工学部 (☎ 376-8515 桐生市天神町 1-5-1).

^{*2} 群馬大学大学院.

E-mail: yamagme4@me.gunma-u.ac.jp

位のべき級数となる場合の高速応答解析法を定式化した⁽⁷⁾。これらは非線形集中ばねが単一の場合の解析である。

本論では著者らにより提案された解析法を、弾性ブロックを複数の非線形集中ばねで支持する問題へ拡張する。この系に基準座標を導入して自由度を縮約した式を導出し、応答を高速計算する。弾性ブロックの下面のコーナー 4 点を複数の非線形集中ばねで支持し鉛直方向の周期加振力を与えた例を取りあげ、解析法の検証を行った。さらにブロックのヤング率による非線形共振応答の変化を調べた。

2. 解析モデル

図 1 に解析モデルを示す。15mm×16mm×18mm の直方体をなす弾性ブロックが複数の集中ばねで支持される。このモデルの鉛直方向に z 軸、水平方向に x 軸と y 軸を図のように定める。図中のブロックの下面の四隅の鉛直方向 (z 方向) を非線形集中ばねで支持した。さらに水平方向 (x および y 方向) にも同じ位置にそれぞれ線形集中ばねを設置した。ブロックの上面と側面はフリーとした。このような系に周期荷重が作用した場合の非線形振動特性を調べる。

3. 基礎式

図 1 のように弾性ブロックが、複数の非線形集中ばねで支持される場合を考える。この系の有限要素による離散化方程式を求める。

3.1 非線形集中ばねの離散化方程式 非線形集中ばねの復元力の鉛直方向 (z 方向) 成分 $R_{\alpha mz}$ は、ブロックとばねの接合点 α_m ($m=1,2,3,\dots$) の z 方向変位 $U_{\alpha mz}$ のべき級数で表現されると仮定する。この時、接合点 α_m における非線形集中ばねの復元力 $R_{\alpha mz}$ は、三次までを記述すると次式となる。

$$R_{\alpha mz} = \gamma_{1mz} U_{\alpha mz} + \gamma_{2mz} U_{\alpha mz}^2 + \gamma_{3mz} U_{\alpha mz}^3 \quad \dots (1)$$

ここで、 γ_{1mz} , γ_{2mz} , γ_{3mz} は、それぞれ、接合点 α_m における z 方向の線形のばね定数、二次および三次の非線形ばね定数である。さらに、その接合点 α_m ($m=1,2,3,\dots$) には図 1 のように水平方向 (x および y 方向) に線形集中ばねも設置されているとする。接合点 α_m における x および y 方向の線形集中ばねの復元力 $R_{\alpha mx}$, $R_{\alpha my}$ は、

$$R_{\alpha mx} = \gamma_{1mx} U_{\alpha mx}, \quad R_{\alpha my} = \gamma_{1my} U_{\alpha my} \quad \dots (2)$$

となる。ここで、 $U_{\alpha mx}$ と $U_{\alpha my}$ は、それぞれ接合点 α_m における x および y 方向変位である。

式 (1) と式 (2) を接合点 α_m ごとにとりまとめ、マトリックスで記述すると次式を得る。

$$\{r_m\} = [\bar{\gamma}_{1m}] \{U_{sm}\} + \{\bar{d}_m\} \quad \dots (3)$$

ただし、

$$[\bar{\gamma}_{1m}] = \begin{bmatrix} \gamma_{1mx} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{1my} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{1mz} \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{d}_m\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_{2mz} U_{\alpha mz}^2 + \gamma_{3mz} U_{\alpha mz}^3 \end{bmatrix},$$

$$\{r_m\} = \{R_{\alpha mx} \ R_{\alpha my} \ R_{\alpha mz}\}^T,$$

$$\{U_{sm}\} = \{U_{\alpha mx} \ U_{\alpha my} \ U_{\alpha mz}\}^T \text{ である。}$$

3.2 弾性ブロックの離散化方程式

弾性ブロック

を三次元有限要素で分割する。ブロックには微小変形を仮定し、通常の線形三次元有限要素⁽⁸⁾を用いる。要素内部の変位ベクトルを $\{U_b\}$ とする。 $\{U_b\} = \{U_x \ U_y \ U_z\}^T$ を節点変位ベクトル $\{U_e\}$ と形状関数 $[N]^T$ で次式のように近似する。

$$\{U_b\} = [N]^T \{U_e\} \quad \dots (4)$$

応力ベクトル $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T$ と歪みベクトル $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$ との関係は、次式となる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad \dots (5)$$

ここで、 $[D]$ はヤング率 E_e とポアソン比 ν_e で構成される。変位ベクトル $\{U_b\}$ と歪みベクトル $\{\varepsilon\}$ の関係は式 (4) より次式となる。

$$\{\varepsilon\} = A \{U_b\} = [A][N]^T \{U_e\} = B \{U_e\} \quad \dots (6)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad [B] = [A][N]^T \quad \dots (7)$$

式 (1) から式 (7) より、要素の歪みエネルギー $\tilde{U}$ 、運動エネルギー $\tilde{T}$ 、ポテンシャルエネルギー $\tilde{V}$ を求め、ラグランジェの方程式から弾性ブロックの離散化方程式を得る。

$$[M_e] \{\ddot{u}_e\} + [K_e] \{u_e\} = \{f_e\} \quad \dots (8)$$

$$[M_e] = \iiint_V \rho_e [N][N]^T dx dy dz \quad \dots (9)$$

$$[K_e] = \iiint_V [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad \dots (10)$$

ここで、 $\iiint_V dx dy dz$ は要素領域内での積分を表す。

$[M_e]$, $[K_e]$, $\{\ddot{u}_e\}$, $\{u_e\}$, $\{f_e\}$ は、それぞれ弾性ブロックの要素質量行列、要素剛性行列、節点加速度ベクトル、節点変位ベクトル、節点力ベクトルである。 ρ_e は要素 e の質量密度である。

さらにブロックの全要素について式 (8) を重ね合わ

せると、次式を得る。

$$[M_b]\{\ddot{u}_b\} + [K_b]\{u_b\} = \{f_b\} \quad \cdots (11)$$

$[M_b]$, $[K_b]$, $\{\ddot{u}_b\}$, $\{u_b\}$, $\{f_b\}$ はブロックの質量行列、剛性行列、節点加速度ベクトル、節点変位ベクトル、節点力ベクトルである。

3.3 弾性ブロックと非線形集中ばね、線形集中ばねを接続した系の離散化方程式 集中ばねによる式(3)の節点力 $\{r_m\}$ を弾性ブロックとの接合節点 α_m の節点力に加え、全系の離散化方程式を得る。

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} + \{d\} &= \{f\}, \\ \{d\} &= \sum_m \{\hat{d}_m\} \end{aligned} \quad \cdots (12)$$

$[M]$, $[K]$, $\{\ddot{u}\}$, $\{u\}$, $\{f\}$, はそれぞれ全系の質量行列、剛性行列、節点加速度ベクトル、節点変位ベクトル、節点力ベクトルである。 $\{\hat{d}_m\}$ は式(3)中の非線形復元力 $\{\bar{d}_m\}$ のベクトルサイズを全系のサイズに直した量である。

3.4 非線形離散化方程式の基準座標への変換

式(12)は物理座標系xyzで記述された運動方程式である。外力を与えて、時間軸で直接積分すれば、変位応答ベクトル $\{u\}$ が得られる。このような自由度の大きい系に対して直接積分を物理座標で行うと膨大な計算時間が必要となる。そこで、式(12)の非線形離散化方程式を、線形固有振動形に対応する基準座標を導入することで、自由度の縮小を試みる。

式(12)で外力項 $\{f\}$ を $\{f\} = \{0\}$ 、非線形復元力項を $\{\hat{d}\} = \{0\}$ とし、時間を t として $\{u\} = \{\bar{u}\} \cos \omega t$ を仮定すると、つぎの固有値問題の式を得る。

$$([K] - \omega^2[M])\{\bar{u}\} = \{0\} \quad \cdots (13)$$

これを解き、得られる固有値を $\tilde{\omega}_1^2, \tilde{\omega}_2^2, \tilde{\omega}_3^2, \dots$ 、対応する固有ベクトルを $\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \{\phi\}_3, \dots$ とすると、 $\{u\}$ は基準座標 $\tilde{b}_j$ を導入すれば、 $\{\phi\}_j$ ($j=1, 2, 3, \dots$)を用いて次式で表せる。

$$\{u\} = \sum_j \tilde{b}_j (1/n_j) \{\tilde{\phi}\}_j \quad \cdots (14)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \{\phi\}_i &= (m_i)^{1/2} \{\tilde{\phi}\}_i = (1/n_i) \{\tilde{\phi}\}_i, \quad n_i = (m_i)^{-(1/2)}, \\ m_i &= \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i, \quad \{\tilde{\phi}\}_i^T [M] \{\tilde{\phi}\}_i = 1 \text{ である。} \end{aligned}$$

式(14)を式(12)へ代入し、 $\{\tilde{\phi}\}_i$ の直交性を利用して整理すると線形固有振動形に対応する基準座標系での全系の離散化運動方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} M(\tilde{b}_i) &= \tilde{b}_{i,i} + 2\varepsilon_i \tilde{\omega}_i \tilde{b}_{i,i} + \tilde{\omega}_i^2 \tilde{b}_i + \sum_j \tilde{D}_{ijk} \tilde{b}_j \tilde{b}_k \\ \sum_k \sum_l \tilde{E}_{ijkl} \tilde{b}_j \tilde{b}_k \tilde{b}_l - \tilde{P}_i &= 0 \end{aligned} \quad \cdots (15)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ijk} &= \sum_m \gamma_{2mz} \frac{n_i}{n_j n_k} \tilde{\phi}_{amzi} \tilde{\phi}_{amzj} \tilde{\phi}_{amzk}, \\ \tilde{E}_{ijkl} &= \sum_m \gamma_{3mz} \frac{n_i}{n_j n_k n_l} \tilde{\phi}_{amzi} \tilde{\phi}_{amzj} \tilde{\phi}_{amzk} \tilde{\phi}_{amzl}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i &= n_i \{\tilde{\phi}\}_i^T \{f\}, \\ \{\tilde{\phi}\}_i &= \{\tilde{\phi}_{1xi}, \tilde{\phi}_{1yi}, \tilde{\phi}_{1zi}, \tilde{\phi}_{2xi}, \tilde{\phi}_{2yi}, \dots\}^T \end{aligned}$$

である。ここで、線形減衰項 $2\varepsilon_i \tilde{\omega}_i \tilde{b}_{i,i}$ を新たに導入した。 $\tilde{\phi}_{amzi}$ は m 番目の非線形集中ばねとブロックの接合節点 α_m における $\{\tilde{\phi}\}_i$ の z 成分である。コンマの後の添字 i は時間 t についての偏微分を表わす。式(15)は線形固有振動形に対応した基準座標 $\tilde{b}_j$ についての非線形連立三次常微分方程式となっている。基準座標 $\tilde{b}_j$ についての式(15)を用いると、物理座標系での離散化方程式(12)に比べると、大幅に計算に必要な自由度を削減できる。後述する数値計算例では、物理座標系では約15000自由度であったのが、基準座標では20自由度の計算となっている。

3.5 非線形周期応答

対象とする系に周期外力 $\tilde{P}_i = P_{di} \cos \omega t$ (ω : 加振角周波数)を作用させる。加振振幅 $\{P_{di}\}$ は加振位置に対応する節点で加振方向の成分のみ非ゼロとなる。周期応答を求めるために、対応する解を次式で仮定する⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned} \tilde{b}_i &= C_{i1\mu o} + \sum_p [C_{i1\mu p} \cos(\mu p \omega t) + C_{i2\mu p} \sin(\mu p \omega t)] \\ (i=1, 2, 3, \dots, p=1, 2, 3, \dots, \mu=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \end{aligned} \quad \cdots (16)$$

なお、 $C_{i1\mu o}$, $C_{ij\mu p}$ ($i=1, 2, 3, \dots$) ($j=1, 2$)は未定係数である。主共振や高調波共振応答を求めるためには $\mu=1$ において、分数次調波共振応答では $\mu=\frac{1}{n}$ (n : 整数)を用いる。式(16)を式(15)に代入し、調和バランス法を適用すると次の条件式を得る。

$$\frac{\mu s \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu s} M(\tilde{b}_i) \cos(\mu s \omega t) dt = 0, (s=0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{\mu s \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu s} M(\tilde{b}_i) \sin(\mu s \omega t) dt = 0, (s=1, 2, 3, \dots) \quad \cdots (17)$$

上式中の $C_{i1\mu o}$, $C_{ij\mu p}$ ($i=1, 2, 3, \dots$) ($j=1, 2$)に関する連立三次方程式をニュートンラプソン法で解くと共振応答の周期解を得る。評価点 ξ の応答振幅の実効値 W_{rms} の z 方向成分 w_{ms} が求められる。

$$\begin{aligned} w_{rms} &= \left\{ (1/2) \left[\sum_p \left(\sum_j C_{j1\mu p} (1/n_j) \tilde{\phi}_{\xi jz} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\sum_j C_{j2\mu p} (1/n_j) \tilde{\phi}_{\xi jz} \right)^2 + \left(\sum_j C_{j1\mu o} (1/n_j) \tilde{\phi}_{\xi jz} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \\ (p=1, 2, \dots, j=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad \cdots (18)$$

ここで、 $\tilde{\phi}_{\xi jz}$ は観測位置 ξ における j 次振動形に対応する固有ベクトルの z 方向成分である。

4. 計算方法の検証

提案FEMでは、式(13)による共振周波数 $\tilde{\omega}/2\pi$ 、線形固有振動形 $\{\tilde{\phi}\}_i$ ($i=1, 2, 3, \dots$)を用い、式(18)の調和バランス法で応答を求める。この提案FEMの解析方法

と解析法に基づいて作成した計算コードを検証する。他の解析方法で、解が求められる次の2項目の条件での計算結果を比較した。

- ・微小振幅条件下での検証
- ・ブロックを剛体とした条件下での検証

なお、ブロックの質量密度は、 $7.8 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$ で、特に指定しない場合には減衰比 $\varepsilon_i = 0.005$, ($i=1, 2, 3 \dots$) を与えた。

また、式 (13) の固有値計算には逆サブスペース法を用いた。式 (4) 中の弾性ブロックの形状関数 $[N]^T$ には、8 節点アイソパラメトリック 6 面体要素を用い、ラグランジェの方程式で要素方程式を求めた。この要素方程式に、以下に示す非適合モード⁽¹⁰⁾ による項 $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2$, $\tilde{N}_3$ を追加して用いた。

$$\tilde{N}_1 = (1 - \tilde{\xi}^2), \quad \tilde{N}_2 = (1 - \tilde{\eta}^2), \quad \tilde{N}_3 = (1 - \tilde{\zeta}^2)$$

ただし、 $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ は正規化座標である。

4.1 微小振幅条件下での検証

この検証で

は図1のモデルを用い、図2に示すように z 方向の非線形集中ばねのばね定数は $\gamma_{1mz} = 980 = \gamma_{1z}$, $\gamma_{2mz} = 0.00 = \gamma_{2z}$, $\gamma_{3mz} = 9.80 = \gamma_{3z}$, ($m=1, 2, 3, 4$) とする。水平方向 (x および y 方向) の線形集中ばねのばね定数は $\gamma_{1mx} = \gamma_{1my} = k = 980 [\text{N/mm}]$, ($m=1, 2, 3, 4$) とした。加振力が $P_d = 0.098 [\text{N}]$ と小さく微小変形となる条件で、提案 FEM により求めた応答と、次式の線形 FEM とモードの重ね合わせによる応答 (汎用線形 FEM (NASTRAN) 使用) を、比較する。

$$w = \bar{w} \cos \omega t,$$

$$\bar{w} = \sum_i \frac{\tilde{\phi}_{\xi i} \tilde{\phi}_{\eta i} P_d}{(\omega^2 - \tilde{\omega}_i^2) + 2j\tilde{\varepsilon}_i \tilde{\omega}_i \omega} \quad \dots (19)$$

ここで、加振点 η と観測点 ξ は図1の位置とし、加振方向は z 方向とした。 w は観測点 ξ における z 方向の応答振幅、 j は虚数単位である。また、 $\tilde{\phi}_{\eta i}$ は i 次固有ベクトル $\{\tilde{\phi}\}_i$ の加振点 η に対応する z 方向成分である。単一の角周波数 ω により励振を受ける場合の線形応答の検証問題なので、 w の実効値 W_{rms} は次式から求められる。

$$W_{rms} = |\bar{w}| / \sqrt{2} \quad \dots (20)$$

結果を図3に示す。縦軸は変位の実効値 $W_{rms} [\text{mm}]$ 、横軸は加振周波数 $\omega / 2\pi [\text{Hz}]$ である。提案 FEM と線形 FEM のモード重ね合わせによる計算結果は一致し、微小振幅での提案 FEM と計算コードが検証できた。

4.2 剛体ブロックでの検証

ブロックが剛体

とみなせる条件のもとで、提案 FEM と計算コードの検証を行う。この検証には図4の $15\text{mm} \times 16\text{mm} \times 18\text{mm}$ の直方体モデルを用いた。 z 方向の非線形ばねのばね定数は $\gamma_{1mz} = 980/4 = \gamma_{1z}$, $\gamma_{2mz} = 0.00 = \gamma_{2z}$, $\gamma_{3mz} = 9.80/4 = \gamma_{3z}$ (m

$= 1, 2, 3, 4$) とし、三次の非線形復元力項を有する漸硬性のばねとした。提案 FEM において、ブロックのヤング率を ($E = 10^5 [\text{GPa}]$) と非常に大きくし剛体とみなせる条件で応答を計算した。ただし、図4のごとく、ブロックは z 方向のみに運動するように拘束条件を付加した。加振点と観測点はブロック下面中央とし、 z 方向加振で z 方向変位を評価した。式 (15) の外力項 $\tilde{P}_i = n_i \{\tilde{\phi}\}_i^T \{f\}$ 中の $\{f\}$ について、応答計算の際、加振節点 η に対応する z 方向のみに $P_d \cos(\omega t)$ とし、他の成分はゼロとした。

ついで弾性ブロックを集中質量に置き換え、集中質量-非線形集中ばね系 (1 自由度質量ばね系) として、主要な非線形共振応答を求めた。式 (21) の運動方程式を Runge-Kutta-Gill 法で時刻歴を求め実効値を計算し共振応答を求めた。

$$M \ddot{w}_{,tt} = -4(\gamma_{1z} w + \gamma_{2z} w^2 + \gamma_{3z} w^3) - 4C w_{,t} + P_d \cos \omega t \quad \dots (21)$$

ここで、 M は集中質量の質量 (= ブロックの質量), w は集中質量の変位, C は減衰定数, P_d は周期外力の振幅である。この結果と先に述べた剛体条件下での提案 FEM による応答の計算結果を比較した。結果を図5に示す。横軸を加振周波数 $\omega / (2\pi) [\text{Hz}]$ 、縦軸を変位の実効値 $W_{rms} [\text{mm}]$ とした。以降、記号 (i, j) により共振応答を分類した。 i は誘起される i 次の振動モードを表す。 j は共振応答の分類で $j=1$ は主共振, $j=1/3$ は $1/3$ 分数次調波共振, $j=3/1$ は 3 倍高調波共振に対応した応答となる。加振力が $P_d = 0.098 [\text{N}]$ と小さい場合には、線形共振応答となり、主共振 $(1, 1/1)$ のみが現れている。加振力 $P_d = 9800 [\text{N}]$ と大きい場合には、漸硬型の応答となり、主共振 $(1, 1/1)$ だけでなく、固有振動数の3倍の加振周波数に $1/3$ 分数次調波共振 $(1, 1/3)$ 、固有振動数の $1/3$ 倍の加振周波数に 3 倍高調波共振 $(1, 3/1)$ が現れている。これらの共振曲線が全て提案 FEM と集中質量-非線形集中ばねモデルで一致した。これより、剛体ブロックの条件で、提案 FEM と計算コードが検証できた。

Fig.2 Restoring force of nonlinear concentrated springs

Fig.3 Verification of proposed method
(Response under infinitesimal displacement)

Fig.4 Simulation model using rigid block

なお, 提案 FEM で応答を計算する際の減衰係数 C は, 式 (21) 中の最低次共振に対応する減衰比 ε_i から, 次式を満足するように定めた.

$$\varepsilon_i = 4C / [2(M_4 \gamma_{1z})^{1/2}] \quad \dots (22)$$

この最低次共振はブロックを質量とし, 非線形ばねが主体に変形するモード, すなわち式 (21) の集中質量-非線形集中ばねモデル (1 自由度質量ばね系) で現れるモード に対応する.

4.1 と 4.2 から, 提案 FEM は微小振幅条件や剛体ブロックの条件で, 従来の解析方法の結果と一致した.

5. ブロック振動に及ぼすヤング率の影響

非線形集中ばねに支持された弾性ブロックの連成

Fig.5 Verification of proposed method
(Response using rigid block)

振動の数値解析を提案法で行い, ヤング率の異なる 2 種類の弾性ブロックについて共振応答を比較した. 弾性ブロックのヤング率はそれぞれ $E=1, E=210$ [GPa] である. 図 1 のモデルを用い, 非線形集中ばねのばね定数は図 2 に示すように $\gamma_{1mz}=9.80=\gamma_{1z}$, $\gamma_{2mz}=0.00=\gamma_{2z}$, $\gamma_{3mz}=9.80=\gamma_{3z}$ ($m=1, 2, 3, 4$) と三次の非線形復元力項を有する漸硬性のばねとした. 水平方向 (x および y 方向) の線形集中ばねのばね定数は $\gamma_{1mx}=\gamma_{1my}=k=980$ [N/mm], ($m=1, 2, 3, 4$) とした. 加振点と応答観測点は図中の点とした.

5.1 共振周波数・振動モード 式 (13) の固有値解析を用い, 2 種類のヤング率の弾性ブロックの共振周波数と振動モードを求めた. 結果を図 6 に示す. 低次モード (1 ~ 6 次) では弾性ブロックが集中質量のような挙動をし, ブロックの変形が小さく, 非線形集中ばね主体に変形するモードとなった. 7 次以上の高次モードではブロックの変形主体の弾性モードである. 低次モード (1 ~ 6 次) でもヤング率が小さい方が共振周波数が低くなっている. これはブロック下面の非線形集中ばねが接合されている部分が局所的に弾性変形したためである. 高次共振はブロックの弾性モードであるので, 当然, ヤング率が小さい方が共振周波数は低くなる. なお, 弾性ブロックにはヤング率に関わらず類似した振動モードが現れた.

Fig.6 Effect of Young's modulus on vibration modes

Fig.7 Effect of Young's modulus on resonance response

Fig.8 Zoomed resonance response

Fig.9 Effect of assumed vibration modes on nonlinear frequency response

5.2 共振応答

5.1 で得られた線形固有振動形に対応する基準座標を導入し、系の非線形運動方程式を求めた。さらに調和バランス法を用いてヤング率の異なる2種類の弾性ブロックの共振応答を求めた。

結果を図 7 に示す。縦軸は変位の実効値 W_{rms} [mm]、横軸は加振周波数 $\omega/2\pi$ [Hz] である。図から低次 (1~6 次) の共振応答曲線は漸硬型になっている。図 7 および図 8 (図 7 の $E=1$ [GPa] の条件の一部の周波数領域を拡大して表示した応答) から主共振 (1, 1/1) だけでなく、3 倍高調波共振 (1, 3/1) が現れている。また、図中、(1, 1)+(2, 1) あるいは (5, 1)+(6, 1) と記述した領域には、(1, 1) と (2, 1) あるいは (5, 1) と (6, 1) がそれぞれのモードの間で非線形連成した共振応答が現れている。これら低次 (1~6 次) の共振は、非線形集中ばねが主に変形するモードであるので、図のように応答曲線に非線形効果が顕著に現れる。その際に、ヤング率が小なる場合には、これらの非線形応答の振幅が増大する。これは先にも述べたように非線形集中ばねとブロックの接合部が弾性変形するためである。

ヤング率の大小に関わらず、高次モードでは、ブロックの弾性変形が主体で、非線形集中ばねが大きく変形しない。従って、今回計算した範囲では、高次での応答曲線に非線形効果は認められなかった。

次に近似モード数 I_c を変化させて、共振応答を求めた。非線形性が顕著である三次モードの主共振応答 (3, 1) の例を図 9 に示すが、近似モード数 I_c が 20 程度あれば応答は十分に収束する。他のモードに対応する応答も近似モード数 I_c は 20 以内で収束した。

6. 結 言

(1) 複数の非線形集中ばねを有する弾性構造物の共振応答の解析に、線形固有振動形に対応する基準座標への変換による非線形有限要素法が有効である。

(2) ブロックが剛体の場合の共振応答曲線と弾性体の場合の応答曲線とを比較すると、弾性体の場合のほうが、主共振、3 倍高調波共振、モード間非線形連成共振の共振周波数が下がり、振幅は増大した。これは集中ばねの変形に加え、ばねの接合部のブロックが弾性変形したためである。

文 献

- (1) Feeny, B. F. and Kappagantu, R., On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No. 4, (1998), pp. 607-616.
- (2) Kondo, T., Sasaki, T. and Ayabe, T., Forced vibration analysis of a straight-line beam structure with nonlinear support elements, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 67, No. 656C, (2001), pp. 914-921.
- (3) Pesheck, E., Boivin, N., Pierre, C. and Shaw, S. W., Non-linear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds, *Nonlinear Dyn.*, Vol. 25 (2001), pp. 183-205.
- (4) Yamaguchi, T., Nagai, K., Maruyama, S. and Aburada, T., Finite element analysis for coupled vibrations of an elastic block supported by a nonlinear spring, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 69, No. 688C, (2003), pp. 3167-3174.
- (5) Yamaguchi, T., Nakahara, N., Nagai, K., Maruyama, S. and Fujii, Y., Frequency response analysis of elastic blocks supported by a nonlinear spring using finite element method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 70, No. 696C, (2004), pp. 2219-2227.
- (6) Yamaguchi, T., Saito, T., Nagai, K., Maruyama, S., Kurosawa, Y. and Matsumura, S., Analysis of damped Vibration for a viscoelastic block supported by a nonlinear concentrated spring using FEM, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 71, No. 703C, (2005), pp. 829-836.
- (7) Yamaguchi, T., Nakahara, N., Nagai, K., Maruyama, S. and Fujii, Y., Vibration analysis for elastic blocks connected by a nonlinear spring using FEM described by normal coordinate, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 72, No. 714C, (2006), pp. 324-331.
- (8) Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., The finite element method in structural and continuum mechanics, (1967), MacGraw-Hill.
- (9) Yamaguchi, T. and Nagai, K., Chaotic vibration of a cylindrical shell-panel with an in-plane elastic support at boundary, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 13, (1997), pp. 259-277.
- (10) Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty, W. P. and Ghaboussi, J., Incompatible Displacement Methods, in *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, (1973), Academic Press.