スライディングモード制御による入力むだ時間システムの安定化*

隅田 悟士^{*1}, 小口 俊樹^{*2}

Stabilization of Input Delay Systems by Using Sliding Mode Control

Satoshi SUMITA and Toshiki OGUCHI^{*3}^{*3} Graduate School of Engineering, Tokyo Metropolitan University,
1-1 Minami-osawa, Hachioji-shi, Tokyo, 192-0397 Japan

In this paper, we consider the stabilization problem of linear systems with time-delay at the input by using a sliding mode control. Sliding Mode Control (SMC) is a well-known robust control method for systems with model uncertainties and disturbances and a large number of the design methods for finite dimensional systems have been proposed. However there are a few design methods which are applicable for input-delay systems. To overcome the drawback, we analyze the stability of input-delay systems with switching inputs by transforming the systems into the equivalent systems with time-varying feedback gain. As a result, we show that input-delay systems cannot be asymptotically stabilized by the SMC with signal function. Then we derive a sufficient condition for asymptotic stability of the systems with SMC. Thereafter we propose a SMC design method for systems with uncertain delay at the input. The effectiveness of the proposed methods are illustrated by numerical simulations.

Key Words: Nonlinear Control, Robust Control, Computer Control, Input Delay Systems, Sliding Mode Control

結 言

スライディングモード制御 (SMC) は, モデル不確かさや外乱に対して優れたロバスト性能をもつ制御手法として知られている. しかしながら, 実システムに散見されるむだ時間システムへ直接適用することができないため, SMC のむだ時間系システムへの理論的拡張を試みる研究がなされている.

状態むだ時間システムに対する SMC の設計法として, Shyu ら⁽¹⁾は状態変数の過去の値を含む汎関数からなる切換面を構成する手法, Gouaisbaut ら⁽²⁾はむだ時間の大きさに依存した安定論に基づく LMI を用いた SMC の設計手法を提案しているが, いずれも状態むだ時間システムを対象としており, 入力むだ時間を扱うことはできない. 一方, Roh ら⁽³⁾⁽⁴⁾は状態予測器を用いる手法, 隅田ら⁽⁵⁾はモデル変換を用いる手法により, 入力むだ時間システムに対する SMC 設計法を提案している. しかしながら, 入力むだ時間システムの制御系設計問題を有限次元システムの制御系設計問題に帰着させた SMC 設計手法であり, 本質的に入力むだ時間が存在する場合の SMC の設計理論の検討がな

されていない. 従って, 入力むだ時間の影響がシステムに残る場合, 例えば, むだ時間にモデル化誤差が含まれ, 前述の手法を用いてもむだ時間が完全に相殺されない場合には, それらの設計手法を適用できない.

本論文では, 入力むだ時間システムに対して SMC を用いたシステムの安定性について検討する. はじめに, 切換システムの安定性を解析するために切換制御則をそれと等価な状態フィードバックとして扱う. その形式的に連続化された入力を用いて相対的に短い入力むだ時間がある場合の安定性を検討する. その結果, 単純な切換制御則から構成される SMC では, 僅かでもむだ時間がある場合には, 原点の漸近安定化が図れないことを明らかにする. また, 原点が漸近安定となるために制御則が満たすべき条件の導出を行う. 次に相対的に長い入力むだ時間が存在する場合の SMC を検討し, Arstein⁽⁶⁾のモデルリダクション法のモデル変換を併用した SMC の設計法について述べる. この場合, むだ時間にモデル化誤差が含まれるならば変換後のシステムは誤差分のむだ時間を入力にもつシステムに変換される. そこで, このような場合において, 原点が漸近安定となる条件の導出を行う. 最後に数値例を用いて提案手法の有効性を示す.

* 原稿受付 2006 年 3 月 3 日.

^{*1} 首都大学東京大学院工学研究科 (☎ 192-0397 八王子市南大沢 1-1).^{*2} 正員, 首都大学東京大学院工学研究科.

E-mail: oguchi@ctrl.prec.metro-u.ac.jp

1. 準備

1.1 スライディングモード制御 はじめに SMC 設計の概要を示すため、次の可制御正準系を考える。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1)$$

$$= Ax(t) + Bu(t)$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$ は状態、 $u \in \mathbb{R}$ は操作入力である。 x -空間上において、適切な切換面 $\sigma(x(t)) = Rx(t) = 0$, $R = [r_1 \dots r_n] \in \mathbb{R}^n$ を定める。状態が切換面上にあるならば

$$x_n = -\frac{r_1}{r_n}x_1 - \frac{r_2}{r_n}x_2 - \dots - \frac{r_{n-1}}{r_n}x_{n-1} \quad (2)$$

が成り立つことから、システム (1) の挙動は次式の低次元システムで表現される。

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}(t) \quad (3)$$

$$= A_s \bar{x}(t)$$

ただし、 $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\bar{x}_i = x_i$ ($i = 1 \dots n-1$), $A_s \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ である。ここで $r_n = 1$ として、行列 A_s が安定な固有値 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ をもつように切換面 $Rx = 0$ の係数ベクトル $[r_1 \dots r_{n-1} \ 1]$ を定める。このとき、次式が成り立つ。

$$s^{n-1} + r_{n-1}s^{n-2} + \dots + sr_2 + r_1 = (s - \eta_{n-1})(s - \eta_{n-2}) \dots (s - \eta_1) = 0 \quad (4)$$

次に、切換面に状態を拘束させるための切換制御則を導出する。リアプノフ関数として

$$V(x(t)) = \frac{1}{2} \sigma^2(x(t)) \quad (5)$$

を選ぶことで、次の切換条件

$$\begin{cases} \sigma(x(t)) > 0 \text{ のとき } \dot{\sigma}(x(t)) < 0 \\ \sigma(x(t)) < 0 \text{ のとき } \dot{\sigma}(x(t)) > 0 \end{cases} \quad (6)$$

に基づき、次の切換制御則が導かれる。

$$u(t) = \begin{cases} -(RB)^{-1}(RAx(t) + \alpha), & \sigma(x(t)) > 0 \text{ のとき} \\ -(RB)^{-1}(RAx(t) - \alpha), & \sigma(x(t)) < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$= u_l + u_n$$

ただし、 $\alpha > 0$, $u_l = -(RB)^{-1}RAx(t)$, $u_n = -(RB)^{-1}\alpha \operatorname{sgn}(\sigma(x(t)))$ である。 sgn は符号関数であり、次のように与えられる。

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

1.2 入力の形式的な連続化 次節で入力むだ時間システムに切換制御則 (7) を適用したときの安定条件を導出するために、その準備として切換制御則 (7) を次式で書き換える。

$$u(t) = -(RB)^{-1}(RAx(t) + \frac{Rx(t)}{|Rx(t)|} \alpha) = -(RB)^{-1}R(A + kl)x(t) \quad (9)$$

ただし、

$$k = \frac{\alpha}{|\sigma(x(t))|} \quad (10)$$

である。置き換えられた制御則 (9) は切換関数 $\sigma(x(t))$ 、つまり切換面との距離に依存する変動ゲインをもつ状態フィードバックとみなすことができる。入力むだ時間システムにおいては、それが原因となり、漸近安定化できないことを次節で述べる。

2. 入力むだ時間システムの安定化

2.1 むだ時間が短い場合 本節では、システムに対して相対的に短い入力むだ時間が存在する場合を考える。

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t - \Delta h) \quad (11)$$

$$x(0) = x_0, \quad u(t) = \phi(t) \quad t \in [-\Delta h, 0]$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$ は状態、 $\Delta h \in \mathbb{R}$ は $0 \leq \Delta h \leq \bar{h}$ を満たすむだ時間、 $u \in \mathbb{R}$ は操作入力、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$ で表される (A, B) は可制御正準対、 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ はシステムの初期条件、 $\phi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は入力の初期条件を表す連続関数ベクトルである。また、 $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Delta B \in \mathbb{R}^n$ は不確かさを表し

$$\Delta A = D_0 \Delta_0 E_0, \quad \Delta B = D_1 \Delta_1 E_1 \quad (12)$$

とする。ここで、 $D_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_1 \in \mathbb{R}^n$ は各々既知の定数行列、 $\Delta_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は

$$\Delta_0^T \Delta_0 \leq I, \quad \Delta_1^T \Delta_1 \leq I \quad (13)$$

を満たす未知の行列である。

切換制御則 (7) を適用したときの安定条件を導出するために入力 (9) をシステム (11) に代入すると

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) \\ &\quad - (B + \Delta B)(RB)^{-1}R(A + kI)x(t - \Delta h) \quad (14) \\ &= (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - \Delta h)\end{aligned}$$

ただし, $A_d = -B(RB)^{-1}R(A + kI)$, $\Delta A_d = -\Delta B(RB)^{-1}R(A + kI)$ である. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 1 任意の入力むだ時間 $h > 0$ に対して, $\Delta_0 = \Delta_1 = 0$ としたときのシステム (14) が $k > \bar{k}$ のときに複素右半平面に極をもつような $\bar{k}$ が必ず存在する. □

(証明) $\Delta_0 = \Delta_1 = 0$ の下でシステム (14) の極を s とすると特性方程式は

$$\det[sI - A - e^{-sh}A_d] = 0 \quad (15)$$

である. $r_n = 1$ とすると

$$\begin{aligned}A_d &= -B(RB)^{-1}R(A + kI) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_1 + kr_1 & a_2 + kr_2 + r_1 & \dots & a_n + k + r_{n-1} \end{bmatrix} \quad (16)\end{aligned}$$

これより, $\theta_i = a_i - e^{-sh}(a_i + kr_i + r_{i-1})$, $r_0 = 0$ とすると

$$A + e^{-sh}A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{n-1} & \theta_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

であるから, 特性方程式は

$$\begin{aligned}s^n &+ \{-a_n + e^{-sh}(a_n + k + r_{n-1})\}s^{n-1} \\ &+ \{-a_{n-1} + e^{-sh}(a_{n-1} + kr_{n-1} + r_{n-2})\}s^{n-2} \\ &+ \dots + \{-a_2 + e^{-sh}(a_2 + kr_2 + r_1)\}s \\ &+ \{-a_1 + e^{-sh}(a_1 + kr_1)\} \\ &= s^n - a_n s^{n-1} - \dots - a_1 \\ &\quad - e^{-sh}s^n + e^{-sh}(a_n s^{n-1} + \dots + a_1) \\ &\quad + e^{-sh}s^n + e^{-sh}\{(k + r_{n-1})s^{n-1} + \dots + kr_1\} \\ &= (1 - e^{-sh})(s^n - a_n s^{n-1} - \dots - a_1) \\ &\quad + e^{-sh}(s^n + (k + r_{n-1})s^{n-1} + \dots + kr_1) \\ &= (1 - e^{-sh})\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i) + e^{-sh}\prod_{i=1}^{n-1} (s - \eta_i)(s + k) \\ &= 0 \quad (18)\end{aligned}$$

ただし, α_i は A の固有値, η_i は式 (4) で定義された行列 A_s の固有値である. ここで, 特性方程式の根 $s = \mu + j\nu$ ($\mu, \nu \in \mathbb{R}$) を複素平面上のベクトル (u, v) とすると特性方程式 (18) は次式と等価である.

$$e^{\mu h}a = e^{-j\nu h}(a - b) \quad (19)$$

ただし, $a = \prod_{i=1}^n (\mu + j\nu - \alpha_i)$, $b = \prod_{i=1}^{n-1} (\mu + j\nu - \eta_i)(s + k)$ である. $|b| = \prod_{i=1}^{n-1} |\mu + j\nu - \eta_i| |\mu + j\nu + k|$ より, $k \rightarrow \infty$ のとき, $|b| \rightarrow \infty$ であるから, 固定された μ, ν に対して任意の $k > \bar{k}$ に対して

$$e^{\mu h}|a| < |a - b| \quad (20)$$

を満たす十分に大きい $\bar{k}$ が存在する. 次に $\nu \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned}\arg(a) &= \sum_{i=1}^n \arg(\mu + \operatorname{Re}[\alpha_i] + j(\nu + \operatorname{Im}[\alpha_i])) \rightarrow \frac{\pi}{2}n \\ \arg(b) &= \sum_{i=1}^{n-1} \arg(\mu + \operatorname{Re}[\eta_i] + j(\nu + \operatorname{Im}[\eta_i])) \\ &\quad + \arg(\mu + k + j\nu) \rightarrow \frac{\pi}{2}n \\ \frac{|a|^2}{|b|^2} &= \frac{(\mu + \operatorname{Re}[\alpha_n])^2 + (\nu + \operatorname{Im}[\alpha_n])^2}{(\mu + k)^2 + \nu^2} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu + \operatorname{Re}[\alpha_i])^2 + (\nu + \operatorname{Im}[\alpha_i])^2}{(\mu + \operatorname{Re}[\eta_i])^2 + (\nu + \operatorname{Im}[\eta_i])^2} \\ &\rightarrow 1 \quad (21)\end{aligned}$$

となる. これより, $\nu \rightarrow \infty$ のとき, $|a - b| \rightarrow 0$ となる. $\nu \rightarrow \infty$ のとき, 式 (20) の右辺は 0 に収束し, 一方, 左辺は ∞ に発散するので

$$e^{\mu h}|a| = |a - b| \quad (22)$$

を満たす ν_0 が必ず存在する. 式 (22) は式 (19) の両辺のベクトルの長さが等しいことを表している. このとき, ベクトル a , $(a - b)$ のなす角度が θ であるならば, 入力むだ時間 h が

$$h = h_n = \frac{\theta + 2\pi q}{\nu_0} \quad (q \in \mathbb{Z}) \quad (23)$$

のとき, 式 (19) が成り立つ. 以上の議論は μ の符号を問わないから, システム (11) が右半平面に極をもつ場合にも成り立つ. さて, k を大きくすれば, 式 (20) の右辺を大きくすることができる. よって, 式 (22) を満たす ν_0 を任意に大きくすることができ, その結果, 式 (23) より $h_0 = \theta/\nu_0$ を任意に小さくすることができる. すなわち, 任意の入力むだ時間に対して, 複素右半平面に極をもつような $\bar{k}$ が必ず存在する. □

α を定数とした切換制御則 (7) では、切換面近傍において切換制御則 (7) と等価な入力 (9) の $k = \alpha/|\sigma(x(t))|$ が無限大となる。ゆえに僅かでも入力むだ時間が存在するならば、入力むだ時間システム (11) を切換制御則 (7) によって漸近安定化できないことを定理 1 は示している。

さて、システム (11) の漸近安定化について、次のことがいえる。

定理 2 システム (14) が $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ において、漸近安定であるならば、

$$k_{\min}|\sigma(x(t))| \leq \alpha \leq k_{\max}|\sigma(x(t))| \quad (24)$$

を区間 $[0, \sigma_{\max}]$ で満たす連続な関数 $\alpha(|\sigma(x(t))|)$ を用いた制御則 (7) によりシステム (11) の状態 $x \in V$

$$V = \{x \mid |\sigma(x(t))| \leq \sigma_{\max}\} \quad (25)$$

は原点へ漸近的に収束する。□

(証明) 状態 x が V に属するならば、条件 (24) より $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ が成り立つことから明らかである。□

定理 2 において、条件 (24) をある有限な空間で満たす関数 α の候補として、例えば、次の関数が挙げられる。

$$\alpha(|\sigma|) = \begin{cases} k_{\max}|\sigma| & |\sigma| < \phi \text{ のとき} \\ \alpha_{\max} = k_{\max}\phi & |\sigma| \geq \phi \text{ のとき} \end{cases} \quad (26)$$

ただし、 $\alpha > 0$, $k_{\max} > 0$, $\phi > 0$ は定数とする。関数 (26) はチャタリングを防ぐ方法の 1 つとして知られている飽和関数である。 α として関数 (26) を用いた場合、これは条件 (24) を区間 $[0, \alpha_{\max}/k_{\min}]$ で満たす。条件 (24) は $\sigma = 0$ のときに $\alpha = 0$ を意味し、これは式 (7) における u_n を連続化することを意味する。

システム (14) が $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ において、漸近安定である条件は、むだ時間システムの安定論⁽⁹⁾に基づいて、次のように与えられる。

系 1 $0 < k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ の範囲で次の LMI

$$\begin{bmatrix} M_{11} & H_1 & H_2 & H_3 \\ H_1^T & -J_1 & 0 & 0 \\ H_2^T & 0 & -J_2 & 0 \\ L_3^T & 0 & 0 & -J_3 \end{bmatrix} < 0$$

$$M_{11} \equiv (A + A_d(k))X + X(A + A_d(k))^T + \eta_0 D_0 D_0^T$$

$$+ (\eta_1 + \varepsilon_1 \bar{h}) \bar{D}_1(k) \bar{D}_1^T(k) + \bar{h} A_d(P_{10} + P_{11}) A_d^T$$

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv [X E_0^T X \bar{E}_1(k)^T] \\ H_2 &\equiv [\bar{h} A_d(P_{10} + P_{11}) \bar{E}_1^T(k)] \\ H_3 &\equiv [\bar{h} X A_0^T \bar{h} X E_0^T \bar{h} X A_1^T \bar{h} X \bar{E}_1^T(k)] \\ J_1 &\equiv \text{diag}[-\eta_0 I \quad \eta_1 I] \\ J_2 &\equiv \bar{h}(-\varepsilon_1 I + \bar{E}_1(k)(P_{10} + P_{11}) \bar{E}_1^T(k)) \\ J_3 &\equiv \text{diag}[J_{31} \quad J_{32} \quad J_{33} \quad J_{34}] \\ J_{31} &\equiv -\bar{h} P_{10} + \rho_{10} \bar{h} D_0 D_0^T, \quad J_{32} \equiv -\Delta I \rho_{10} \\ J_{33} &\equiv -\bar{h} P_{10} + \rho_{10} \bar{h} D_0 D_0^T, \quad J_{34} \equiv -\Delta I \rho_{10} \end{aligned} \quad (27)$$

を満たす正定対称行列 $X(k)$, $P_{10}(k)$, $P_{11}(k)$ および正の定数 $\eta_0, \eta_1, \varepsilon_1, \rho_{10}, \rho_{11}$ が存在するならば、システム (14) は $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ において、漸近安定である。ただし、 $\bar{E}_1(k) = E_1(RB)^{-1}R(A + kI)$ である。□

(証明) 次式のようにリアプノフ関数を選ぶことにより、安定条件が導かれる⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x + \int_{-\bar{h}}^0 \left(\int_{t+\theta}^t g_1(s) + \int_{t+\theta-\bar{h}}^t g_2(s) \right) d\theta \\ g_1(s) &= x^T(s) (A(P_{10} - \rho_{10} D_0 D_0^T)^{-1} A + \frac{E_0^T E_0}{\rho_{10}}) x(s) \\ g_2(s) &= x^T(s) (A(P_{11} - \rho_{11} D_1 D_1^T)^{-1} A + \frac{E_1^T E_1}{\rho_{11}}) x(s) \end{aligned} \quad (28)$$

□

まとめると系 1 によりシステム (14) の安定性が保証され、それと定理 2 から入力 (7) をシステム (11) に適用した場合の安定性が保証される。

2.2 むだ時間が長い場合 本小節では、比較的長い入力むだ時間を含む線形システムに対してモデル変換を含めたスライディングモード制御問題を考える。次の入力むだ時間システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - h - \Delta h) \\ x(t) &= \phi(t) \quad t \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 $h \in \mathbb{R}$ はむだ時間であり、それ以外の記号は式 (11) と同様である。また、 $\Delta h \in \mathbb{R}^n$ はむだ時間の不確かさを表し

$$|\Delta h| \leq \bar{h} \leq h \quad (30)$$

とする。ここで、変数変換

$$z(t) = x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-h-\theta)} Bu(\theta) d\theta \quad (31)$$

を導入すると、システム (29) は次式に変換される。

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + e^{-Ah} Bu(t) \\ &\quad + Bu(t - h - \Delta h) - Bu(t - h) \end{aligned} \quad (32)$$

システム (32) に正則変換 $Tw = z$ を行い、むだ時間のない部分を可制御正準系に変換すると

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bu(t) + T^{-1}B\{u(t-h-\Delta h) - u(t-h)\} \quad (33)$$

$\Delta h = 0$ ならば、次式に示すようにむだ時間が陽に現れないシステムが得られる。

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bu(t) \quad (34)$$

これに1節で示した方法により適切な切換面 $\sigma = Rw = 0$ を設計する。設計された SMC と等価な入力、式 (7) の x を w に置き換えたものであり、それをシステム (33) に代入すると

$$\dot{w}(t) = A_{fb}w(t) + A_{fbd}\{w(t-h) - w(t-h-\Delta h)\} \quad (35)$$

ただし、 $A_{fb} = A - B(RB)^{-1}R(A + kI)$, $A_{fbd} = T^{-1}B(RB)^{-1}R(A + kI)$ である。

システム (35) が $k_{min} \leq k \leq k_{max}$ において、漸近安定である条件は、むだ時間システムの安定論⁽⁹⁾に基づいて、2.1 節と同様に次の系が与えられる。

系 2 次の LMI を $0 < k_{min} \leq k \leq k_{max}$ の範囲で満たす正定対称行列 $X(k)$, $P_{10}(k)$, $P_{11}(k)$ および正の定数 $\eta_0, \eta_1, \epsilon_1, \rho_{10}, \rho_{11}$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{fb}P + PA_{fb} + (2h + \bar{h})(Q_0 + Q_1 + Q_2) & M^T \\ M & \bar{Q} \end{bmatrix} < 0 \\ & M^T \equiv \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T \end{bmatrix} \\ & M_1^T \equiv h \begin{bmatrix} PA_{fb}A_{fbd} & PA_{fbd}^2 & -PA_{fbd}^2 \end{bmatrix} \\ & M_2^T \equiv -(h + \bar{h}) \begin{bmatrix} PA_{fb}A_{fbd} & -PA_{fbd}^2 & PA_{fbd}^2 \end{bmatrix} \\ & Q \equiv \text{diag} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \\ & Q_1 \equiv h \text{diag} \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \\ & Q_2 \equiv h(h + \bar{h}) \text{diag} \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

が存在するならば、システム (14) は $k_{min} \leq k \leq k_{max}$ において、漸近安定である。□

2.3 制御器の設計方法 システムに対して、入力むだ時間が相対的に短い場合は以下のように制御器を設計する。

step1 式 (4) より、切換面を設計する。

step2 k を微小な値から適当な値まで変化させながら、 k に対する系 1 に示した LMI (27) の可解性を繰り返し調べる。その結果、LMI (27) が可解となる範囲 $k_{min} \leq k \leq k_{max}$ を求める。

step3 式 (24) を満たすような関数 $\alpha(x)$ を設計する。

また、入力むだ時間が長い場合は以下の手順となる。

step1 変数変換 (31) および正則変換より、システム (33) を得る。

step2 むだ時間の不確かさ Δh が無い公称モデル (34) に対して切換面を設計する。

step3 系 2 に示した LMI (36) が可解となる範囲 $k_{min} \leq k \leq k_{max}$ を求める。

step4 式 (24) の変数 x を変数 w に置き換えた次式を満たす関数 $\alpha(w)$ を設計する。

$$k_{min}|\sigma(w(t))| \leq \alpha \leq k_{max}|\sigma(w(t))| \quad (37)$$

3. 数 値 例

次の入力むだ時間線形システムを考える。

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t - 0.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.7 & -0.8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \phi(t) \quad t \in [-0.1, 0] \quad (38)$$

$$\Delta A = D_0 \Delta_0 E_0, \quad \Delta B = D_1 \Delta_1 E_1$$

$$\Delta_0^T \Delta_0 \leq I, \quad \Delta_1^T \Delta_1 \leq I$$

$$D_0 = 0.2I, \quad D_1 = 0.1I$$

$$E_0 = -0.1I, \quad E_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}^T$$

A の固有値は $0.47, -0.63 \pm 0.94j$ であり、不安定な固有値をもつ行列である。これを式 (26) の α を用いた制御則 (7) により漸近安定化を図る。切換面上でのシステム (3) の固有値 η_1, η_2 および定理 2 における k_{min}, k_{max} を、それぞれ、 $\eta_1 = -0.8, \eta_2 = -1.0, k_{max} = 5, k_{min} = 0.5$ とする。系 1 に従い、 k に対して許容できる入力むだ時間の最大値 $\bar{h}(k)$ を計算した結果を図 1 に示す。図 1 より $0 \leq h \leq 0.1$ なるむだ時間に対して漸近安定化できることが分かる。式 (26) の α_{max} を $\alpha_{max} = 10$ とすれば、式 (25) は $V = \{x \mid |\sigma(x(t))| \leq 20\}$ となる。

式 (7) の α を定数とした従来の切換制御則、本提案手法を用いたシミュレーション結果をそれぞれ図 2, 図 3 に示す。ただし、システムの初期条件および不確かさを

$$x(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad t \in [-h, 0], \quad \Delta_0 = \Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

とした。図 2 より、従来の手法では入力むだ時間システムの漸近安定化がなされていないことが分かり、そ

Fig. 1 The maximum allowable delay time

Fig. 2 SMC

Fig. 3 SMC with continuous function

の根拠は定理 1 による。一方、図 3 より、提案手法では漸近安定化が達成されていることが分かる。

結 論

本論文では、入力むだ時間システムに対するスライディングモード制御系の安定性について検討を行った。はじめに入力むだ時間システムに SMC を適用した場合の安定性を検討するために切換制御入力を状態依存の変動ゲインをもつ状態フィードバックに帰着させることで、単純な切換制御を用いた SMC では、入力むだ時間システムを漸近安定化できないことを示した。さらにシステムを漸近安定化させる条件を検討し、得られた条件を満足するような連続関数を用いることにより、入力むだ時間システムの漸近安定化が可能となることを示した。また、入力むだ時間が厳密に既知である場合にのみ安定性が保証されていたモデル変換による手法を拡張し、入力むだ時間にモデル化誤差が含まれる場合の安定条件を導出した。最後に、導出した条件に基づく SMC の設計手法を示した。

文 献

- (1) K. K. Shyu and J. J. Yan, *Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structure control*, International Journal of Control, Vol.57, No.1, (1993), pp.237-246
- (2) F. Gouaisbaut and M. Dambrine and J. P. Richard, *Robust control of delay systems: a sliding mode control design via LMI*, Systems & Control Letters, Vol.46, No.4, (2002), pp.219-230
- (3) Y. H. Roh and J. H. Oh, *Robust stabilization of uncertain input-delay systems by sliding mode control with delay compensation*, Automatica, Vol.35, (1999), pp.1861-1865
- (4) Y. H. Roh and J. H. Oh, *Sliding Mode Control for Robust Stabilization of Uncertain Input-Delay Systems*, The Institute of Control, Automation and systems Engineers, KOREA, Vol.2, No.2, (2000), pp.98-103
- (5) S. Sumita and T. Oguchi, *Sliding Mode Control of Systems with Uncertain Input Delay*, Proceedings of the Kanto Branch Regular Meeting of the Japan Society of Mechanical Engineers, (2005), pp.245-246
- (6) Z. Artstein, *Linear Systems with Delayed Controls, A Reduction*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.27, No.4, (1982), pp.869-879
- (7) C. M. Kwan *Sliding Mode Control of Linear Systems with Mismatched Uncertains*, Automatica, Vol.31, No.2, (1995), pp.303-307
- (8) K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, (1992), pp.219-239
- (9) E. K. Boukas and Z. K. Liu, *Deterministic and Stochastic Time Delay Systems*, Birkhauser, (2002), pp.39-43, 79-84