回転型自励振動子群の自己同期現象*

(第1報, 振動子間の結合形態の影響について)

盆子原 康博^{*1}, 森 博輝^{*2}
近藤 孝広^{*3}, 綾部 隆^{*4}

Self-Synchronized Phenomena Generated in Rotor-Type Oscillators

(1st Report, On the Influence of Coupling Condition between Oscillators)

Yasuhiro BONKOBARA^{*5}, Hiroki MORI,
Takahiro KONDOU and Takashi AYABE

^{*5} Department of Intelligent Machinery and Systems, Kyushu University,
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 819-0395 Japan

Self-synchronized phenomena generated in rotor-type oscillators mounted on a straight-line spring-mass system are investigated experimentally and analytically. In the present study, we examine the occurrence region and pattern of self-synchronization in two types of coupled oscillators: rigidly coupled oscillators and elastically coupled oscillators. The experimental results for self-synchronization are qualitatively in good agreement with the numerical computational results obtained by applying the shooting method. It is clarified that the occurrence regions of stable solutions are governed mainly by the linear natural frequency of each spring-mass system. The results of numerical analysis confirm that the self-synchronized solutions of the elastically coupled oscillators correspond to those of the rigidly coupled oscillators. In addition, the results obtained in the present study are compared with the previously reported results for a metronome system and a moving apparatus and the differences between the rotor-type oscillators and the pendulum-type oscillators are shown in terms of the construction of branches of self-synchronized solution and the stability.

Key Words: Nonlinear Vibration, Self-Excited Vibration, Stability, Numerical Analysis, Self-Synchronized Phenomena, Unbalanced Rotor, Shooting Method

1. 結 言

機械系における自己同期現象⁽¹⁾は、古くから振動応用技術を担う現象として知られており、振動ふるい機^{(2),(3)}や振動搬送機⁽³⁾⁻⁽⁶⁾など多くの実用例がある。これらの研究では、主に機構の開発に重点を置いているため、個別のシステムを対象として自己同期現象の効率的な発生条件について検討しているものが多く、現象の発生メカニズムについては十分に解明されていない。そのような状況を踏まえて、著者らは、より高度な振動応用技術を開発するための基礎的研究として、多種多様な機械システムに共通する自己同期現象の本質的

なメカニズムの解明を目指している。

このような研究の一環として、著者らは佐藤ら⁽⁷⁾と同様にメトロノームを用いた振り子型自励振動子群の自己同期現象を取り扱い、自己同期現象の多様性の一端を明らかにしている⁽⁸⁾。メトロノーム系では、すべての振動子が振り子状の自由振動台の上に固定されており、ひとつの台を介してすべての振動子間で相互に影響を及ぼし合う。以下では、このような結合形態の系を剛結合振動子系と呼ぶ。著者らはさらに、DCモータを用いた回転型自励振動子群の自己同期現象を利用した推進装置を試作し、その推進メカニズムと推進性能について検討している⁽⁹⁾。推進装置では、振動子を搭載したブロックがコイルばねで直列に結合されており、隣接したブロック間でのみ影響を及ぼし合う。以下では、このような結合形態の系を弾性結合振動子系と呼ぶ。

これまでの研究結果によれば、メトロノーム系と推進装置で発生する自己同期現象には、いくつかの共通

* 原稿受付 2006年8月4日。

^{*1} 正員, 九州大学大学院工学研究院(〒819-0395 福岡市西区元岡744)。

^{*2} 正員, 日本学術振興会特別研究員PD, 九州大学大学院工学研究院。

^{*3} 正員, フェロー, 九州大学大学院工学研究院。

^{*4} 正員, 久留米工業高等専門学校(〒830-8555 久留米市小森野町1-1-1)。

E-mail: yasu@mech.kyushu-u.ac.jp

点や相違点が見られた。そのような特徴の差異を明確化することは、自己同期現象の発生メカニズムを解明する上で重要であると考えられる。しかしながら、メトロノーム系と推進装置とでは、搭載した振動子の非線形特性（振り子型と回転型）および振動子間の結合形態（剛結合型と弾性結合型）が異なる上、メトロノームに作用する衝撃トルクや推進装置と床との間に作用するクーロン摩擦力の影響によって自己同期解の構造が両者ともに非常に複雑になるので、両者の特徴の差異を明確に比較することが困難である。

そこで本研究では、振動子間の結合形態の違いが自己同期現象に及ぼす影響に着目し、これを検討するためのモデルを新たに考案した。このモデルは、滑らかに動くブロックを剛にあるいはコイルばねで直列に結合した質量ばね系に回転型自励振動子を搭載したものである。本報では、最も基本的な2個の振動子からなる系を対象として、自己同期解の存在領域や同期パターンの特徴について実験と数値計算の両面から調べる。さらに、メトロノーム系や推進装置の結果との比較を行い、それぞれの共通点や相違点について検討する。

2. 解析モデルおよび運動方程式

2.1 解析モデル ここでは、一般的に n 個の振動子が結合した場合について考える。図1に解析モデルを示す。振動子は、DCモータの回転軸の両側に不釣り合いおもりを取り付けた回転型自励振動子であり、不釣り合いおもりが同じ垂直面内で回転するようにDCモータが1個ずつブロックに搭載されている。ブロックは摩擦の小さなガイドレールによって、水平方向(x 軸方向)にのみ運動できるように拘束されているものとする。

図1(a)に示すように、剛結合振動子系ではブロック同士が直列に剛に結合し、両端のブロックと固定壁との間はコイルばね（結合要素）で結合されている。剛に結合したブロックはすべて一体となって運動するものとする。一方、図1(b)に示すように、弾性結合振動子系ではブロック同士およびブロックと固定壁の間をそれぞれコイルばねで結合している。

以下では、左から i 番目のブロックをブロック i ($i=1, \dots, n$)、およびブロック i に取り付けられた不釣り合いおもりをおもり i と呼び、ブロック i に関連する物理量であることを明示する必要がある場合には、対応する記号に下添字 i を付加する。各ブロックはDCモータの質量を含めて質量 m_b の剛体として取り扱い、軸の両側の不釣り合いおもりは質量 m 、不釣り合い長さ R の質点として取り扱う。結合要素のばね定数

(a) Rigidly coupled oscillators

(b) Elastically coupled oscillators

Fig.1 Analytical models

$k_0, \dots, k_n$ をそれぞれ図1のように設定する。また、ブロックとレール間には粘性摩擦力が作用するものと仮定して、剛結合振動子系および弾性結合振動子系の粘性減衰係数をそれぞれ c_r, c_e とする。

2.2 運動方程式 ブロック i の変位を x_i （ただし剛結合振動子系では $x_i = x$ ）、おもり i の角変位を θ_i とし、正方向をそれぞれ図1のように定義する。このとき、剛結合振動子系におけるブロックの運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} + c_r\dot{x} + 2k_0x &= \sum_{i=1}^n f_i \\ f_i &= mR(\ddot{\theta}_i^2 \cos\theta_i + \ddot{\theta}_i \sin\theta_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

おもり i の運動方程式は、

$$J\ddot{\theta}_i + B\dot{\theta}_i + mgR\cos\theta_i = Ae_i + mR\ddot{x}\sin\theta_i \quad \dots\dots\dots(2)$$

で与えられる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} M &= nm\hat{m}, \quad \hat{m} = m_b + m, \quad J = J_a + J_p + mR^2 \\ A &= \frac{K_t}{r_a}, \quad B = \frac{K_t K_E}{r_a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

であり、 J_a は電機子の慣性モーメント、 J_p は不釣り合いおもりを取り付ける円板の慣性モーメント、 K_t はトルク定数、 K_E は誘起電圧定数、 r_a は電機子の抵抗、 e_i はモータ印加電圧、 g は重力加速度を表す。なお、各モータの特性は印加電圧 e_i を除いて共通であるものとする。

一方、弾性結合振動子系におけるブロック i の運動方程式は、

$$\hat{m}\ddot{x}_i + c_e\dot{x}_i + (k_{i-1} + k_i)x_i - k_{i-1}x_{i-1} - k_i x_{i+1} = f_i \quad (4)$$

ここに,

$$x_0 = x_{n+1} = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

また, 不釣り合いおもり i の運動方程式は, 式(2)において $\ddot{x} = \ddot{x}_i$ と置いた式となる.

次に, 状態量の無次元化のために以下のようなパラメータを導入する.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{R}, \quad \zeta = \frac{c_r}{2\sqrt{2Mk_0}}, \quad \omega_r = \sqrt{\frac{2k_0}{M}}, \quad \alpha = \frac{m}{\hat{m}} \\ \xi_i &= \frac{x_i}{R}, \quad \zeta_i = \frac{c_e}{2\sqrt{\hat{m}k_i}}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{\hat{m}}} \\ \beta &= \frac{mR^2}{J}, \quad \gamma = \frac{B}{J}, \quad \omega_g = \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \Omega_i = \frac{c_i}{K_E} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

これらを用いて式(1)~(5)を整理すると, それぞれ運動方程式は次式ようになる.

(i) 剛結合振動子系の運動方程式

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\zeta\omega_r\dot{\xi} + \omega_r^2\xi &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i \\ \tilde{f}_i &= \alpha(\dot{\theta}_i^2 \cos\theta_i + \dot{\theta}_i \sin\theta_i) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\ddot{\theta}_i + \gamma\dot{\theta}_i + \beta\omega_g^2 \cos\theta_i = \gamma\Omega_i + \beta\ddot{\xi} \sin\theta_i \quad \dots\dots\dots(8)$$

(ii) 弾性結合振動子系の運動方程式

$$\ddot{\xi}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{\xi}_i + (\omega_{i-1}^2 + \omega_i^2)\xi_i - \omega_{i-1}^2\xi_{i-1} - \omega_i^2\xi_{i+1} = \tilde{f}_i \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\ddot{\theta}_i + \gamma\dot{\theta}_i + \beta\omega_g^2 \cos\theta_i = \gamma\Omega_i + \beta\ddot{\xi}_i \sin\theta_i \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\xi_0 = \xi_{n+1} = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

2.3 シューティング法⁽¹⁰⁾の適用

本研究では, 運動方程式(7), (8)および式(9), (10)の定常周期解, すなわち自己同期解 (以下, 同期解と呼ぶ) を求めるためにシューティング法を適用する. ここで同期解とは, DC モータが一回転 (角変位が 2π だけ変化) したときのその他の変数の変化量がすべて零である解を意味する. 本報の解析モデルでは, メトロノーム系⁽⁸⁾や推進装置⁽⁹⁾の場合のように運動方程式に不連続成分が存在しないので, これらに対する特別な処理を施す必要はない. 実際に適用するためには, 式(7), (8)および式(9), (10)を正規形の 1 階常微分方程式に変換し, さらにその変分方程式を求めておく必要があるが, 紙幅の関係で詳細は省略する.

3. 実験

解析モデルの妥当性を検証するために, 図 1 の解析モデルに対応する実験装置を製作して実験を行った. 図 2 に実験装置の写真を示す. 表 1 は, 実験装置から求めた系パラメータ値である. ここに, DC モータ (マクソン社製 DC モータ A-max22, 定格出力 3.5W) の特性はカタログ値であり, ブロックとガイドレール間の粘性減衰係数は実測値である. また, 弾性結合振動子

(a) Rigidly coupled oscillators

(b) Elastically coupled oscillators

Fig.2 Photographs of experimental apparatus

Table 1 System parameters

m_b (kg)	0.201	r_a (Ω)	8.82
m (kg)	0.02	K_t (N·m/A)	13.9×10^{-3}
R (m)	0.013	K_E (V·s/rad)	13.9×10^{-3}
J_a (kg·m ²)	4.03×10^{-7}	c_r (N·s/m)	5.5
J_p (kg·m ²)	1.94×10^{-6}	c_e (N·s/m)	2.0

Fig.3 Outline of experimental system

系では, すべて同じばね定数 $K (=k_0 = k_1 = k_2)$ のコイルばねを用いた.

図 3 に実験システムの構成を示す. 実験方法は, それぞれの DC モータに印加電圧を与えて駆動させて, ブロックの振動信号を測定する. そして, その周波数分析結果に基づいて同期の発生の有無を判定する. 同期の発生時には, 画像解析システム (ライブラリー社製リアルタイムトラッカー Radish) を利用して, ブロックや不釣り合いおもりの運動を計測する. このシステムでは, 高速度カメラ (Redlake 社製高速度カメラ ES310) で撮影した画像データを解析して, 測定対象に設けた観測点の位置データをリアルタイム計測することが出来る. 本実験では, ブロックおよび不釣り合いおもりにそれぞれ観測点を設けて, それらの位置データを 250fps の撮影速度で 10 秒間測定した.

4. 実験結果および数値計算結果

4・1 剛結合振動子系の場合 まず、剛結合振動子系（剛結合系）を対象として同期解の存在領域を調べた。実験では、ブロック 2 の印加電圧 e_2 を 2.0V に固定して、ブロック 1 の印加電圧 e_1 を変化させながら同期時の運動を測定した。ただし、実験では安全のために印加電圧の上限値を 3.0V までとしている。数値計算では、実験と同様に e_1 を変化させて、シューティング法により不安定解を含む全ての同期解を求めた。シューティング法の数値積分には RKG 法を利用し、1 周期あたりの分割数を 2048 として倍精度計算を行った。また、同期解の初期値および周期の相対誤差は 10^{-12} 以下とした。なお、本報では不釣り合いおもりの回転数が等しい同期解だけを考察の対象とする。

図 4 は、固定壁との間のばね定数を $k_0 = 1321\text{N/m}$ としたときに得られた同期解の実験結果および数値計算結果である。図の横軸は印加電圧 e_1 であり、縦軸には上から系の同期振動数 f_{syn} 、ブロックの変位の最大絶対値 $\text{Max}|x|$ 、および $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ の平均値から求めた不釣り合いおもり間の位相差 $\text{Arg}(\theta_{12})$ をとっている。図中の◎印は実験結果、実線および破線はそれぞれ数値計算で求められた安定解および不安定解であり、解分枝上にある○印はサドルノード分岐点、△印はホップ分岐点を示す。また、一点鎖線は不釣り合いおもりを固定してブロックの変位だけを考慮した 1 自由度質量ばね系（以下、1 自由度支持系と呼ぶ）の固有振動数 f_0 （理論値 12.3Hz、実測値 12.2Hz）を表している。実験を行った 3.0V までの範囲内では、実験結果と数値計算結果は定量的によく一致している。このことから、解析モデルの妥当性が確認できたものと考えられる。

数値計算結果では、同期解分枝は一本の曲線となっており、その中に同期パターンが異なる 2 種類の安定領域が存在している。それぞれの安定領域を SR_1 および SR_2 と呼ぶ。参考として、 SR_1 および SR_2 の同期解における時刻暦波形（計算結果）の一例を図 5 に示す。 SR_1 の同期解では、不釣り合いおもりとブロックの各要素間の位相差が 90deg 以内で一定（以下、このような同期状態を同位相と呼ぶ）であり、 e_1 の増加とともにブロックの振幅が増大するが、DC モータの回転数（ f_{syn} に相当する）はあまり変化していない。これは、DC モータに加えられたエネルギーの増加分がブロックの振動のためのエネルギーに変換され、DC モータの回転数の上昇が抑えられたと考えられる。一方、 SR_2 の同期解では、不釣り合いおもり間の位相差が 90deg 以上で一定（以下、このような同期状態を逆位

Fig.4 Self-synchronized solution of rigidly coupled oscillators ($e_2 = 2.0\text{V}$, $k_0 = 1321\text{N/m}$)

(a) SR_1 ($e_1 = e_2 = 2.0\text{V}$)

(b) SR_2 ($e_1 = e_2 = 2.0\text{V}$)

Fig.5 Time histories of self-synchronized solution in SR_1 and SR_2 ($k_0 = 1321\text{N/m}$)

相と呼ぶ）であり、 e_1 の増加とともにブロックはほぼ静止したまま f_{syn} が増加している。これは、加えられたエネルギーの増加分のほとんどが DC モータの回転数の上昇のために利用されていると考えられる。このように、 SR_1 および SR_2 の同期解はそれぞれ異なる特徴を有していることがわかる。

Fig.6 Stable region of rigidly coupled oscillators ($e_2 = 2.0\text{V}$)

図6は、結合要素のばね定数 k_0 の値を変更して、同期解分枝の中で安定領域を含む部分だけを求めた結果である。図の横軸は印加電圧 e_1 であり、縦軸には系の同期振動数と1自由度支持系の固有振動数の比 $f_p = f_{\text{syn}}/f_n$ をとっている。いずれの k_0 に対する結果も、 $f_p = 1$ ($f_{\text{syn}} = f_n$)が2種類の安定な同期解の存在領域を分ける境界となっており、 SR_1 は $f_p < 1$ ($f_{\text{syn}} < f_n$)の領域、 SR_2 は $f_p > 1$ ($f_{\text{syn}} > f_n$)の領域に存在している。なお、 SR_1 は k_0 の値が小さいほど安定領域が狭くなっており、 $k_0 = 600\text{N/m}$ では存在しなかった。

4.2 弾性結合振動子系の場合 次に、弾性結合振動子系（弾性結合系）を対象として同期解の存在領域を調べた。実験方法および数値計算方法は4.1節と同様である。図7は、結合要素のばね定数を $K = 375\text{N/m}$ としたときに得られた同期解の実験結果および数値計算結果である。図の横軸は印加電圧 e_1 であり、縦軸には上から系の同期振動数 f_{syn} 、ブロック i ($i=1,2$)の変位の最大絶対値 $\text{Max}|x_i|$ 、ブロック間の位相差 $\text{Arg}(x_{12})$ 、および不釣り合いおもり間の位相差 $\text{Arg}(\theta_{12})$ をとっている。 $\text{Arg}(x_{12})$ の値は、各ブロックで並進変位が最大となる時刻を求め、それらの差から計算した。図中の一点鎖線および二点鎖線は不釣り合いおもりを固定してブロックの変位だけを考慮した2自由度質量ばね系（以下、2自由度支持系と呼ぶ）の1次の固有振動数 f_{n1} （理論値 6.6Hz 、実測値 6.8Hz ）および2次の固有振動数 f_{n2} （理論値 11.4Hz 、実測値 11.5Hz ）を表しており、その他の記号の意味は図4と同様である。

数値計算結果では、同期解分枝は一本の閉曲線であり、その中に同期パターンが異なる2種類の安定領域が存在している。後述の議論に基づいて、その安定領域をそれぞれ SE_2 および SE_3 と呼ぶ。ただし SE_2 は、ホップ分岐点に基づく不安定領域を挟んで安定領域が

Fig.7 Self-synchronized solution of elastically coupled oscillators ($e_2 = 2.0\text{V}$, $K = 375\text{N/m}$)

2つに分離している。この不安定領域内では、概周期振動が発生することを数値シミュレーションで確認している。図7の実験結果と数値計算結果を比べると、図4よりも定量的な差異が大きくなっている。この原因のひとつとして、剛結合系に比べて弾性結合系は支持系の自由度が大きいことが挙げられる。ただし、定量的な差異は若干あるものの、得られた実験結果はすべて SE_2 および SE_3 の同期解に対応しており、数値計算結果と対応しない結果は得られていない。また、 SE_2 に対応する実験結果では、 $2.2\text{V} < e_1 < 2.7\text{V}$ の範囲で非同期となり、その領域内では概周期振動が発生することを確認している。存在領域はやや異なっているが、これが数値計算結果の SE_2 のホップ分岐点に基づく不安定領域に対応していると考えられる。したがって、図7の実験結果と数値計算結果についても同期解分枝全体の定性的な特徴は十分に対応が取れているといえる。

図8は、 SE_2 および SE_3 の同期解における時刻暦波形（計算結果）の一例である。 SE_2 の同期解では、不釣り合いおもり同士およびブロック同士がそれぞれ逆位相であり、同期振動数は全領域で $f_{n1} < f_{\text{syn}} < f_{n2}$ とな

Fig.8 Time histories of self-synchronized solution in SE₂ and SE₃ ($K = 375\text{N/m}$)

Fig.9 Time history of self-synchronized solution in SE₁ ($e_1 = e_2 = 0.8\text{V}$, $K = 375\text{N/m}$)

っている。また、ブロック同士が逆位相であり、質量ばね系の重心の変位は小さいことから、SE₂は剛結合系のSR₂に対応していると考えられる。一方、SE₃の同期解では、不釣り合いおもり同士およびブロック同士がそれぞれ同位相、ブロック*i*とおもり*i*とが逆位相であり、同期振動数は全領域で $f_{\text{syn}} > f_{n2}$ となっている。

さらに、ブロック2の印加電圧 e_2 の値を変更して上述と同様に同期解を求めたところ、 $e_2 = 0.8\text{V}$ のときには $f_{\text{syn}} < f_{n1}$ の領域に安定領域 (SE₁と呼ぶ) が存在していた。図9は、SE₁の同期解における時刻層波形 (計算結果) の一例であり、不釣り合いおもりとブロック

Fig.10 Stable region of elastically coupled oscillators ($e_2 = 2.0\text{V}$)

の各要素間がすべて同位相となっている。したがって、SE₁は剛結合系のSR₁に対応していると考えられる。

図10は、結合要素のばね定数 K の値を変更して、同期解分枝の中で安定領域を含む部分だけを求めた結果である。図の横軸は印加電圧 e_1 であり、縦軸にはそれぞれ同期振動数と2自由度支持系の固有振動数の比 $f_{p2} = f_{\text{syn}}/f_{n2}$ および $f_{p1} = f_{\text{syn}}/f_{n1}$ をとっている。いずれの結果も、 $f_{p1} = 1$ ($f_{\text{syn}} = f_{n1}$)および $f_{p2} = 1$ ($f_{\text{syn}} = f_{n2}$)が3種類の安定な同期解の存在領域を分ける境界となっており、それぞれSE₁は $f_{p1} < 1$ ($f_{\text{syn}} < f_{n1}$)の領域、SE₂は $f_{p1} > 1 \cap f_{p2} < 1$ ($f_{n1} < f_{\text{syn}} < f_{n2}$)の領域、SE₃は $f_{p2} > 1$ ($f_{\text{syn}} > f_{n2}$)の領域に存在している。

このように、剛結合系および弾性結合系に共通した特徴として、支持系の固有振動数が異なる種類の安定な同期解の存在領域を分ける境界となっていることがわかる。

4.3 振動子間の結合形態の影響 図11は、弾性結合系において $e_1 = 2.2\text{V}$, $e_2 = 2.0\text{V}$ に固定して、ブロック間の結合要素のばね定数 k_1 を変化させて同期解を求めた結果である。計算条件は、図4に示した剛結合系の結果と比較するために、 $k_0 = k_2 = 1321\text{N/m}$ 、および $c_r = 2.75\text{N} \cdot \text{s/m}$ ($= c_r/2$)とした。図の横軸はばね定数 k_1 であり、縦軸には上から系の同期振動数 f_{syn} 、ブロック*i* ($i=1,2$)の変位の最大絶対値 $\text{Max}|x_i|$ 、ブロック間の位相差 $\text{Arg}(x_{12})$ 、および不釣り合いおもり間の位相

Fig.11 Influence of k_1 on self-synchronized solution ($e_1 = 2.2\text{V}$, $e_2 = 2.0\text{V}$)

差 $\text{Arg}(\theta_2)$ をとっている。4・2 節と同様に、同期解分枝中の 3 種類の安定領域をそれぞれ SE_1 , SE_2 , SE_3 と呼び、さらに不安定領域の一つを UE_3 と呼ぶ。図中の□印は、剛結合系において $k_0 = 1321\text{N/m}$ および $e_1 = 2.2\text{V}$, $e_2 = 2.0\text{V}$ として得られた安定領域 SR_1 , SR_2 および不安定領域 UR_3 の同期解であり、図 4 の結果と対応している。

この結果から、弾性結合系と剛結合系の同期解の関係について次のことがわかる。まず、 SE_1 の同期解では、 k_1 の値が大きくなるとともにブロック同士が同位相のまま両ブロックの振幅の大きさが近づいており、次第に SR_1 の同期解に漸近している。また SE_2 の同期解は、 k_1 の値が大きくなるとともにブロック同士が逆位相のまま両ブロックの変位が小さくなっており、次第に SR_2 の同期解に漸近している。よって、弾性結合系における 2 つの安定な同期解 SE_1 , SE_2 が剛結合系の 2 つの安定な同期解 SR_1 , SR_2 に対応していることがわかる。

一方、 SE_3 の同期解は k_1 の値が小さい $f_{\text{syn}} > f_{n2}$ の領域にのみ存在している。これは、4・2 節で示したように、 e_1 や K を変化させたときに SE_3 の存在領域が

$f_{\text{syn}} > f_{n2}$ となっていることに一致している。また、 k_1 の値が大きい領域にある同期解領域 UE_3 は、全体的な位相関係が SE_3 と同じ特徴を有しているが、それらはすべて不安定解となっており、 $k_1 \rightarrow \infty$ では UR_3 に漸近している。その他の同期解についても $k_1 \rightarrow \infty$ としたとき、すべて剛結合系の同期解に漸近することを確認した。

以上の結果より、剛結合系の同期解は弾性結合系において $k_1 \rightarrow \infty$ としたときの同期解と等価であり、それぞれの同期解の対応関係が明らかになった。また、振動子間の結合形態に応じて、支持系の固有振動数の変化が安定な同期解の存在領域に強く影響していることがわかった。

4・4 既報^{(8),(9)}の結果との比較 前節までは、回転型自励振動子を搭載した剛結合系および弾性結合系で発生する自己同期現象について検討した。本節では、前節までの結果を踏まえて、本報の実験装置と既報^{(8),(9)}で取り扱ったメトロノーム系（剛結合系）と推進装置（弾性結合系）で発生する自己同期現象との比較を行うことにより、それらの共通点や相違点について検討する。なお、メトロノーム系や推進装置の詳しい説明は文献^{(8), (9)}を参照されたい。

4・4・1 メトロノーム系の場合 まず、本報の剛結合系と同じく剛結合系であるメトロノーム系との比較を行う。メトロノーム系では、2 台のメトロノームを振り子状の自由振動台の上に固定している。自由振動台は本報の実験装置におけるブロックとコイルばねからなる質量ばね系に相当しており、以下では 1 自由度支持系と呼ぶ。メトロノームは、内部の剛体振り子に衝撃トルクが作用することにより自由振動を持続する振り子型自励振動子である。振り子型自励振動子は、固定台上ではソフトスプリングタイプの非線形特性を持っており、系に加えられるエネルギーが減ると振り子の振幅が小さくなることよって振動数は増大する。一方、回転型自励振動子は系に加えられるエネルギーが減ると振動数（不釣り合いおりの回転数）は減少する。このように両者は異なった非線形特性を有している。

図 12 は、メトロノーム系において 1 自由度支持系の固有振動数 f_n を変化させて同期解を求めた結果である。これは、文献⁽⁸⁾の図 5 を引用している。なお、両メトロノームの特性値はすべて同一である。また図 13 は、本報の剛結合系において e_1, e_2 を両方とも 2.0V に固定して、1 自由度支持系の固有振動数 f_n を変化させて求めた結果である。両図とも横軸は 1 自由度支持系の固有振動数 f_n であり、縦軸には系の同期振動数 f_{syn}

 Fig.12 Self-synchronized solution of metronome system⁽⁸⁾ (Pendulum-type)

 Fig.13 Self-synchronized solution of rigidly coupled oscillators (Rotor-type, $e_1 = e_2 = 2.0V$)

 Fig.14 Self-synchronized solution of moving apparatus⁽⁹⁾ (Rotor-type, $e_2 = 2.0V$)

をとっている。図中の◇印はピッチフォーク分岐点を示しており、一点鎖線は $f_{syn} = f_n$ を表す。また、4・1 節と同様に、同期解分枝中の 3 種類の安定領域をそれぞれ SR_1 , SR_2 , SR_3 と呼び、さらに一部の不安定領域を UR_1 , UR_3 と呼ぶ。

両者の結果を比較すると、どちらも $f_{syn} = f_n$ が異なる種類の安定な同期解の存在領域を分ける境界となっている点で共通している。しかし、メトロノーム系では $f_{syn} < f_n$ の領域に SR_2 , $f_{syn} > f_n$ の領域に SR_3 が存在し、全体的な位相関係が SR_1 と同じ特徴を有する同期解は $f_{syn} < f_n$ の領域で不安定解(UR_1)となっている。これに対して、本報の剛結合系では $f_{syn} < f_n$ の領域に SR_1 , $f_{syn} > f_n$ の領域に SR_2 が存在し、全体的な位相関係が SR_3 と同じ特徴を有する同期解は $f_{syn} > f_n$ の領域で不安定解(UR_3)となっている。またメトロノーム系では、 SR_3 は f_n に近づくにつれて f_{syn} が増大している。この

同期解では、1 自由度支持系の共振点に近づくほど 1 自由度支持系の振幅が大きくなるために、その分振動子に加えられるエネルギーが減る。このため、前述した振り子型自励振動子の非線形特性によって振動子の振動数が増大したものと理解することができる。同様に本報の剛結合系では、 SR_1 は f_n に近づくにつれて f_{syn} が減少しているが、これも 1 自由度支持系の振動のためにエネルギーが奪われた分、回転型自励振動子の非線形特性によって振動子の振動数が減少したものと理解することができる。なお、両者ともに存在する SR_2 は、1 自由度支持系が振動しない同期解であるため、振動子に加えられるエネルギーが変化しないので f_{syn} が一定となっている。このように両者の同期解分枝の構造には、図中の点 a を中心として 180 度回転したような特徴の違いがあることがわかる。

以上の結果から、振動子の非線形特性の違いによって同期解分枝の構造に関して異なった特徴が現れることが明らかになった。

4・4・2 推進装置の場合 次に、本報の弾性結合系と同じく弾性結合系である推進装置⁽⁹⁾との比較を行う。試作した推進装置では、本報と同じ回転型自励振動子を用いており、ブロックが直接床に設置されているためクーロン摩擦の影響を強く受けることや、ブロックが固定壁と結合されていないことを除けば、本報の弾性結合系とほぼ同様である。

図 14 に、推進装置における同期解を求めた結果を示す。これは、文献(9)の図 4 を引用している。図の横軸は印加電圧 e_1 であり、縦軸には系の同期振動数 f_{syn} をとっている。図中の二点鎖線は、推進装置における 2 自由度支持系の 2 次の固有振動数 f_{n2} である。なお、 $k_0 = k_2 = 0 \text{ N/m}$ なので 1 次の固有振動数 $f_{n1} = 0 \text{ Hz}$ である。図 14 の同期解分枝には安定領域が 1 箇所だけ存在しており、その同期解では不釣り合いおもり同士およびブロック同士がそれぞれ逆位相となり、存在領域も $f_{n1} < f_{syn} < f_{n2}$ であることから、図 7 の SE_2 の安定領域に対応しているといえる。

一方、 SE_1 はその存在領域が $f_{syn} < f_{n1}$ であるので、 $f_{n1} = 0 \text{ Hz}$ であるこの系では存在し得ないと考えられる。また、図中の×印はブロックが床から離れる跳びはね現象が発生して同期解が求められなくなった点である。本報の実験装置のようにブロックをガイドレール上に設置したとすれば、 $f_{syn} > f_{n2}$ の領域に SE_3 に対応する同期解が存在することを解析的に確認している。

このように、推進装置における同期解分枝の構造は本報の弾性結合系と特徴がよく一致していることがわかった。

4・5 まとめ 以上より, 得られた結果をまとめると次の通りである.

- (1) 剛結合系および弾性結合系ともに, 支持系の固有振動数が異なる種類の安定な自己同期解の存在領域を分ける境界となっている. これは, メトロノーム系や推進装置の場合にも共通する特徴である.
- (2) 剛結合系は, 弾性結合系においてブロック間のばね定数を $k_1 \rightarrow \infty$ とした場合と等価であり, それぞれに存在する自己同期解には対応関係が成立する.
- (3) 回転型自励振動子を搭載した本報の剛結合系と振り子型自励振動子を搭載したメトロノーム系とでは, 振動子の非線形特性の違いによって同期解分枝の構造に関して異なった特徴がある.
- (4) 同じ回転型自励振動子を搭載した本報の弾性結合系と推進装置とでは, 同期解分枝の構造の特徴は一致している.

上記(2)~(4)の結果から総合的に判断すると, メトロノーム系と推進装置との間で同期解分枝の構造に異なる特徴が現れたのは, 振動子間の結合形態の違い(剛結合型と弾性結合型)よりも, 振動子の非線形特性の違い(振り子型と回転型)によるところが大きいといえる.

5. 結 言

2 個の回転型自励振動子を搭載した剛結合振動子系および弾性結合振動子系を対象として, 発生する自己同期現象を実験と数値計算の両面から調べた. さらに, メトロノーム系と推進装置で発生する自己同期現象との比較を行うことにより, それらの共通点や相違点について調べた. その結果, 共通点としては, 振動子を搭載する系の固有振動数が安定な自己同期解の存在領域を分ける境界となっていることがわかった. また, 相違点としては, 振動子の非線形特性の違いによって自己同期解分枝の構造に関して異なる特徴があることが明らかになった.

なお, 3 個の振動子を搭載した結合振動子系においても, 発生する自己同期現象には上記と同様の特徴があることを実験的に確認している. 振動子の非線形特性の違いが自己同期現象に及ぼす影響についての詳細な検討は今後の課題としたい.

最後に, 本研究は科学研究費補助金若手研究 B (課題番号 15760155), および一部は日本学術振興会科学研究費 (特別研究員奨励費) の援助のもとに実施したものである. また, 実験および数値計算では, 九州大学大学院 1 年生の伊藤美和さん, および同大学 4 年生の永富雅義君の協力を得た. ここに記して謝意を表す.

文 献

- (1) A. Pikovsky, M. Rosenblum & J. Kurths, *Synchronization (A Universal Concept in Nonlinear Sciences)*, (2001), Cambridge University Press.
- (2) Inoue, J. et al., On the Self-Synchronization of Vibrators (1st Report, Rotation of an Unbalanced Rotor Depending on Harmonic Oscillations of Its Axis), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.32, No.234 (1966), pp.184-193.
- (3) I. I. Blekhman, *Synchronization in Science and Technology*, (1988), pp.116-123, ASME Press.
- (4) Kurita, Y. et al., Vibration Transportation by Cooperation of Decentralized Self-Excited Vibratory Machines, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.69, No.681 (2003), pp.1191-1196.
- (5) Muragishi, Y. et al., Synchronization Driving of Elliptical Vibration Machine, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.69, No.684 (2003), pp.2005-2010.
- (6) Muragishi, Y. et al., Driving at Resonance Point of Elliptical Vibratory Machine Using Frequency Entrainment, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.71, No.712 (2005), pp.3381-3387.
- (7) Sato, Y. et al., Synchronized Phenomena of Oscillators (Experimental and Analytical Investigation for Two Metronomes), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.66, No.642 (2000), pp.363-369.
- (8) Kondou, T. et al., Self-Synchronized Phenomena Generated in Pendulum-Type Oscillators (1st Report, Analysis for Self-Synchronized Phenomena between Two Metronomes by Using Improved Shooting Method), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.68, No.676 (2002), pp.3499-3506.
- (9) Kondou, T. et al., Moving Apparatus Utilizing a Self-Synchronized Phenomenon (1st Report, Analysis of Basic Performance by Applying Shooting Method and Experimental Verification), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.71, No.712 (2005), pp.3351-3358.
- (10) The Japan Society of Mechanical Engineers ed., *JSME Mechanical Engineers' Handbook, Fundamentals α2 (Dynamics of Machinery)*, (2004), pp.65-66, The Japan Society of Mechanical Engineers.