管下端をばね支持された弾性送水管の管内脈動流による空間運動*

山下 清隆^{*1}, 吉沢 正紹^{*2}, 阿形 淳^{*3}
網代 淳治^{*3}, 谷口 章^{*3}Non-planar Vibration of a Pipe due to a Pulsating Fluid Flow
with a Spring Supported EndKiyotaka YAMASHITA^{*4}, Masatsugu YOSHIKAWA, Jun AGATA,
Junji AJIRO and Akira TANIGUCHI^{*4} Faculty of Engineering, Fukui University of Technology,
3-6-1 Gakuen, Fukui-shi, Fukui, 910-8505 Japan

Spatial behavior of a pipe conveying fluid is examined theoretically and experimentally under the condition that the pipe has an asymmetric spring supported end. The planar motion, nonplanar motion and beating, chaotic phenomena of the pipe vibration exist depending on the frequency of the pulsating flow velocity and the perturbed parameter of the spring coefficient. Furthermore the experiments were conducted with the silicon rubber pipe conveying water. The spatial displacements of the pipe were measured by the image processing system, which was based on the images from two CCD cameras. The typical features of the pipe vibrations, as predicted by the theory, were confirmed qualitatively.

Key Words: Parametric Excitation, Self-Excited Vibration, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Flexible Pipe

1. は じ め に

内部流による片持ち弾性送水管の横振動は、管内定常流速がある臨界値に近づくとき特定のモードの減衰比が非常に小さくなり、流速の増加に伴いやがて負となる特徴がある⁽¹⁾。そのためこの臨界流速近傍において、管内流速の定常成分による自励的横振動および管内流速の脈動成分による係数励振について数多くの研究が報告されてきた⁽¹⁾⁽²⁾。

これらの研究の中で管内流速の定常成分が臨界流速を僅かに越えなおかつ管内流速が微小な脈動成分を有する場合、すなわち自励的横振動および係数励振現象の双方が発生する可能性がある場合について不安定振動発生後の管の挙動を調べたものがある⁽³⁾⁽⁴⁾。しかしながらこれらの研究は、管の運動を平面内に拘束した場合であり、管の空間的挙動については議論がなされていない。

著者らは一連の研究で、管下端に取り付けられた付

加質量やばねが管内定常流速による自励的横振動に与える影響を調べ、管が平面運動および空間円運動をすることを指摘してきた⁽⁵⁾⁽⁶⁾。また管下端のばね支持の僅かな非対称性により管はいくつかのパターンの空間運動をする事を報告してきた⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

前報と同様に⁽⁶⁾⁽⁷⁾、鉛直に吊り下げられ管上端を固定支持された弾性送水管の横振動を取り上げる。本報では、管内流速に微小な脈動成分が存在する場合を取り上げ、その振動数が管内定常流速により不安定化するモードの固有振動数の2倍近傍の場合を考える。すなわち管内定常流速による自励振動と管内流速の脈動成分による係数励振の相互的な影響を議論する。

そこで第一歩として管内流速の定常成分による管の自励的横振動が面内振動として現れる場合について、管の横振動に与える管内流速の脈動成分の影響を調べる。また空間的挙動を議論する上で、管下端のばね支持が管の横振動に与える影響も議論する。

次章以降では最初に、非自己随伴形偏微分方程式で記述される管横変位の支配方程式から求めた管の複素振幅方程式を用いて、管の空間運動に与えるばね支持の影響を理論的に調べる。

* 原稿受付 2006年8月4日。

^{*1} 正員、福井工業大学工学部(☎ 910-8505 福井市学園3-6-1)。^{*2} 正員、慶應義塾大学理工学部(☎ 223-8522 横浜市港北区日吉3-14-1)。^{*3} 慶應義塾大学理工学部。

E-mail: yamashita@fukui-ut.ac.jp

Fig. 1 Analytical model

次に前報⁽⁶⁾⁽⁷⁾と同様な計測系により、測定される水平面内二方向での管横変位の時刻歴とこれに対応する理論解析結果との比較・検討を行なう。

2. 解析モデルと運動方程式

2.1 解析モデル 前報⁽⁶⁾⁽⁷⁾と同様な図1に示される、上端を固定され、 $X-Y-Z$ 空間で運動する弾性送水管を考える。付加質量 M が取り付けられた管の下端($s=l$)は、管軸に対して対称に配置されたばねで三点支持され、三本のばねの自然長はすべて L 、そのばね定数は、それぞれ、 $k_1 = k + \Delta k, k_2 = k_3 = k$ である。

2.2 弾性送水管の運動方程式と境界条件 管の流路断面積 S は一定で、管全長 l は管径に比べて十分長く、管下端から密度 ρ の非圧縮性流体が放出されている。管内の流れは管軸 s に沿った一次元定常流れとみなし、管に相対的な流速 v_f は脈動成分を有し以下のようにあらわされる。

$$v_f = v_s + \Delta v = v_s(1 + \varepsilon \cos Nt) \quad (1)$$

単位長さ当りの質量 m の弾性送水管を、長さの変化しない曲げ剛性 EI の弾性はりとみなし、管は中心軸に関してねじれないと仮定する。前報⁽⁷⁾と同様に管の Y 方向の運動を支配する方程式および境界条件は、横変位 v, w の三乗までを考慮して以下の無次元形式であらわされる。

$$\begin{aligned} & \ddot{v} + c\dot{v} + \delta\ddot{v}''' + 2\sqrt{\beta}V\dot{v}' + V^2v'' \\ & - \gamma[(\alpha + 1 - s)v']' + v'''' + (1 - s)\sqrt{\beta}Vv'' \\ & = -v'' \int_s^1 \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds + v'\ddot{v} \right. \\ & \quad \left. + w'\ddot{w} \right] ds - \frac{1}{2} v' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds + \frac{1}{2} v'^2 \ddot{v} \\ & \quad + \frac{1}{2} \ddot{w} \left[v'w' - \int_0^s (v'w'' - v''w') ds \right] \\ & \quad - \alpha v'' \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^1 (v'^2 + w'^2) ds + v'_1\ddot{v}_1 + w'_1\ddot{w}_1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \alpha \gamma \left[v'(v'v'' + w'w'') + w'' \int_0^s (v'w'' - v''w') ds \right. \\ & \quad \left. - v''(v_1'^2 + w_1'^2) \right] - \frac{1}{2} \gamma v'' \int_s^1 (v'^2 + w'^2) ds \\ & + \frac{1}{2} (1 - s) \gamma \left[v'(v'v'' + w'w'') \right. \\ & \quad \left. + w'' \int_0^s (v'w'' - v''w') ds \right] - \frac{1}{2} \gamma \left[w' \int_0^s (v'w'' \right. \\ & \quad \left. - v''w') ds \right] + v'' \int_s^1 (v'v''' + w'w''') ds \\ & - \frac{1}{2} \left[v'(v'v'' + w'w'') + w'' \int_0^s (v'w'' - v''w') ds \right]'' \\ & - \frac{1}{2} V_s^2 \left[v'(v'v'' + w'w'') + w'' \int_0^s (v'w'' - v''w') ds \right] \\ & - \sqrt{\beta} V_s \left[v'(v'v' + w'w') + w' \int_0^s (v'w'' - v''w') ds \right] \\ & - \frac{3}{2} \kappa v_1 v_1' v'' - \frac{3}{2} \kappa w_1 w_1' v'' \quad (2) \end{aligned}$$

$$s = 0: \quad v = v' = 0$$

$$s = 1: \quad v'' + \delta v'' = 0$$

$$\begin{aligned} & v''' - \alpha \gamma v' - \alpha \ddot{v} - c\dot{v} + \delta v''' + F_v = \\ & \frac{1}{2} \alpha \left[v' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds - \ddot{v} v'^2 \right. \\ & \quad \left. - \ddot{w} v' w' - \ddot{w} \int_0^s (v'w'' - v''w') ds \right] - \frac{3}{4} \kappa v v'^2 \\ & + \frac{3}{4} \kappa w \left[\int_0^s (v'w'' - v''w') ds - w' v' \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[v'(v'v'' + w'w'') + w'' \int_0^s (v'w'' - v''w') ds \right]' \quad (3) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} F_v = & \kappa \left[-(3/2 + \varepsilon \kappa) v - 9v^2/8l_1 + 9w^2/8l_1 \right. \\ & \left. + 3v^3/16l_1^2 + 3vw^2/16l_1^2 \right] \quad (4) \end{aligned}$$

である。

式(2)~(4)およびこれ以降は、簡単のため無次元量をあらわす記号*は省略する。添え字1が付加されている記号は、管下端($s=1$)での値を意味する。また $(\cdot), (\cdot)'$ はそれぞれ時間 t , 空間 s についての微分を意味する。なお式(2)の線形項に含まれる流体力はPaïdoussis, M.P.らの研究⁽¹⁾を参考に、流体のコリオリ力 $2\sqrt{\beta}V\dot{v}'$ 、遠心力 V^2v'' および非定常流体力 $(1-s)\sqrt{\beta}Vv''$ が考慮され、流体の乱流などの効果は考慮していない。

さらに w についての支配方程式および境界条件は、式(2),(3)において v と w を入れ替え、 F_v を

$$\begin{aligned} F_w = & \kappa \left[-3w/2 - 9vw/4l_1 + 3w^3/16l_1^2 \right. \\ & \left. + 3wv^2/16l_1^2 \right] \quad (5) \end{aligned}$$

と入れ替えたものとなる。

以上より管の空間運動は、式(2)~(4)と、同方程式系で未知数 v と w を入れ替えた方程式系とであらわされる。このとき未知数 v, w は、独立変数 s, t と 11 個の無次元パラメータ、つまり管に相対的な管軸方向の無次元管内流速 $V = v_f / \sqrt{EI / (\rho S l^2)}$ 、管および管内流体の全質量に対する付加質量の比 $\alpha = M / (m + \rho S) l$ 、管内流体の無次元質量 $\beta = \rho S / (m + \rho S)$ 、重力と弾性力の比 $\gamma = (m + \rho S) g l^3 / EI$ 、無次元外部減衰係数 $c = C l^2 / \sqrt{EI(m + \rho S)}$ 、管の無次元内部減衰係数 $\delta = E^* / [l^2 E \sqrt{EI / (m + \rho S)}]$ 、管下端を弾性支持するばねの無次元ばね定数 $\kappa = k l^3 / EI$ 、管下端のばね支持の非対称性 $\varepsilon_\kappa = \Delta k / k$ 、管全長に対する管下端の支持ばねの長さ $l_1 = L / l$ 、管内流速の脈動成分の大きさ $\varepsilon = |\Delta v| / v_s$ および脈動流成分の振動数 $\nu = N \sqrt{(m + \rho S) l^4 / EI}$ 、であらわされる。また便宜的に無次元定常流速を V_s と表記する。

2.3 運動方程式と境界条件のベクトル表記 式(2)~(4) および w に関する同方程式系を、ベクトル表記に書き改める。すなわち $v_v = {}^t(v \partial v / \partial t)$ 、 $v_w = {}^t(w \partial w / \partial t)$ とおくと、 v_j の支配方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = L v_j + N_j \quad (6)$$

式(6)およびこれ以降、添え字 j は、 $j = v, w$ を意味する。また $L_{21} = -(\cdot)''' - \gamma[(\alpha + 1 - s)(\cdot)'] - V_s^2(\cdot)''$ および $L_{22} = -2\sqrt{\beta}V_s(\cdot)' - \delta(\cdot)''' - c(\cdot)$ とし

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad N_j = \begin{pmatrix} 0 \\ n_j \end{pmatrix} \quad (7)$$

である。ここで n_j は、式(2)で示した非線形項とそれと同程度の大きさを持つと考えた管内脈動流に起因する励振項 $-(V^2 - V_s^2)v'' - 2\sqrt{\beta}(V - V_s)v' - (1 - s)\sqrt{\beta}\dot{V}v''$ が含まれている。

境界条件は

$$s = 0 : B_1 v_j = 0, \quad s = 1 : B_2 \dot{v}_j = B_3 v_j - N_b \quad (8)$$

である。ただし $L_b = (\cdot)''' - \alpha\gamma(\cdot)' - 3\kappa/2$ とし

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\cdot)' & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad N_b = \begin{pmatrix} 0 \\ b_j \end{pmatrix} \\ B_3 = \begin{pmatrix} (\cdot)'' & \delta(\cdot)'' \\ L_b - \kappa\varepsilon_\kappa\delta_{jv} & \delta(\cdot)''' - c(\cdot) \end{pmatrix} \quad (9)$$

である。 δ_{jv} は、ディラックのデルタ記号で、 $\delta_{vv} = 1$ および $\delta_{vw} = 0$ を意味する。ここで b_j は横変位 v, w の三乗で記述される非線形項である。

3. 管の自由振動に与える定常流速の影響

管横変位の自明な平衡状態の安定性に与える定常流速 V_s の影響を調べる。つまり q_j を $q_j(s) = {}^t(\Phi_{1j}(s) \quad \Phi_{2j}(s))$ としたのち、 $v_j = q_j e^{\lambda_j t}$ とし、式(6),(8)に代入して固有値問題に帰着させた。非自明な固有関数ベクトル q_j が存在する条件から、複素固有値 $\lambda_j = i(\omega_{jr} + i\omega_{ji})$ を求めた。ここで ω_{jr} および ω_{ji} は、各固有振動モードにおける固有振動数、減衰比に対応する。

前報⁽⁷⁾と同様に、管内定常流速の増加により管の横振動の二次モード成分のみが不安定化する場合を取り上げる。以降、二次の固有振動モードを単に二次モードと呼ぶことにし、 ω_{jr} と ω_{ji} は二次モードに関するものとする。

なお次章以降計算に用いる式(6),(8)に含まれる無次元パラメータの値が $V_s = 5.95$ 、 $\alpha = 0.21$ 、 $\beta = 0.24$ 、 $\gamma = 20.6$ 、 $c = 0.051$ 、 $\delta = 0.001$ 、 $\kappa = 5.0$ および $\varepsilon_\kappa = 0.24$ の場合、 $\omega_{jr} = 16.12$ 、 $\omega_{wr} = 16.05$ 、 $\omega_{vi} = -0.06$ および $\omega_{wi} = -0.14$ であった。 $\varepsilon_\kappa = 0.0$ の場合、 λ_v は λ_w と一致する。なお計算に用いた無次元パラメータの値は、第5章の実験値に対応している。

4. 管の横振動に与える管内脈動流の影響

本節では、管内脈動流成分の振動数 ν は、二次モードの固有振動数 ω_r の2倍近傍、つまり管の横振動の二次モードが係数励振(主共振)される場合を想定して、離調パラメータ σ を用いて

$$\nu = 2\omega_{wr}(1 + \varepsilon\sigma) \quad (10)$$

と表わす。ここで、 ε は1に比べて十分小さな量である。

本研究の対象としている管の横振動は、 $|\omega_{wi}|$ が ω_{wr} に比べて十分小さく、 $\varepsilon \ll 1$ であることより、二次の固有振動数成分のみを議論する。

4.1 振幅方程式の誘導 本節では、空間運動を含む管の横振動の複素振幅方程式を、励振される二次モードの成分について導出する。弾性送水管の運動方程式(6)と境界条件(8)は、非自己随伴形偏微分方程式系となっているため、固有関数がお互いに直交していない。そのため前報⁽⁷⁾と同様に、随伴関数ベクトル q_j^* を用いたリャプノフ・シュミットの方法により、複素振幅方程式を誘導した。

v_j を二次モードの張る固有空間とその補空間との成分に分けて考え、以下のように記述する。

$$v_v = A(t)q_v(s) + y_v + c.c.$$

$$v_w = B(t)q_w(s) + y_w + c.c. \quad (11)$$

ここで y_j は二次モードの補空間の要素である。また c.c. は、右辺第一項および第二項の共役複素数をあらわしている。

式 (6) に射影子 P_j を作用させ、二次モードの振る固有空間に射影した。なお射影子 P_j は $P_j x = \langle x, q_j^* \rangle q_j$ で与えられる。

以上より次の複素振幅方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{A} = & \lambda_v A + \xi_1 (A^2 + B^2 + 2|A|^2 + 2|B|^2) \\ & + (\xi_2 A^2 + \xi_3 B^2 + \xi_4 |A|^2 + \xi_5 |B|^2) A + \xi_6 B^2 \bar{A} \\ & + \varepsilon \xi_7 \bar{A} e^{i\nu t} + \varepsilon \xi_7 A e^{i\nu t} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{B} = & \lambda_w B + 2\xi_1 (AB + \bar{A}B + A\bar{B}) \\ & + (\xi_2 B^2 + \xi_3 A^2 + \xi_4 |B|^2 + \xi_5 |A|^2) B + \xi_6 A^2 \bar{B} \\ & + \varepsilon \xi_7 \bar{B} e^{i\nu t} + \varepsilon \xi_7 B e^{i\nu t} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで右辺各項の係数 $\xi_j = \xi_{jr} + i\xi_{ji}$, ($j = 1, 2, \dots, 6$) は、2.2 節で定義された無次元パラメータ $V_s, \alpha, \beta, \gamma, c, \delta, \kappa, l_1$ によって決まる複素定数であり、 $\xi_4 = \xi_5 + \xi_6$ の関係がある。なお ξ_1 は、境界条件式 (4) および式 (5) に由来する 2 乗の非線形項の係数である。

式 (12) において、 ξ_4 が係数である項は形式的に書けば式 (2) および式 (3) の v^3 の非線形項に由来する。同様に ξ_5, ξ_6 および ξ_7 が係数となっている項はそれぞれ、 νw^2 の非線形項および管内脈動流に起因する励振項に由来する。

複素振幅 A, B を $Ce^{i\nu t/2}, De^{i\nu t/2}$ としたのち、式 (12) および式 (13) に代入して実部、虚部に分離した。そして時間と共に解が緩やかに変化する様子を調べるため、 $4\pi/\nu$ で平均化を行なった。その結果、式 (12) および式 (13) において、以下の振幅 a, b と位相 ϕ および ψ の方程式が誘導された。ここで $C = ae^{i\phi/2}$, $D = be^{i\psi/2}$ の関係がある。

$$\begin{aligned} \dot{a} = & (-\omega_{vi} + \frac{1}{4}\xi_{4r}a^2 + \frac{1}{4}\xi_{5r}b^2 \\ & + \varepsilon\xi_{7r}\cos 2\phi + \varepsilon\xi_{7i}\sin 2\phi)a \\ & + \frac{b^2}{4}[\xi_{6r}\cos 2(\psi - \phi) - \xi_{6i}\sin 2(\psi - \phi)]a \\ a\dot{\phi} = & (-\omega_{vr}\varepsilon\sigma + \frac{1}{4}\xi_{4i}a^2 + \frac{1}{4}\xi_{5i}b^2 \\ & + \varepsilon\xi_{7i}\cos 2\phi - \varepsilon\xi_{7r}\sin 2\phi)a \\ & + \frac{b^2}{4}[\xi_{6r}\sin 2(\psi - \phi) + \xi_{6i}\cos 2(\psi - \phi)]a \\ \dot{b} = & (-\omega_{wi} + \frac{1}{4}\xi_{4r}b^2 + \frac{1}{4}\xi_{5r}a^2 \\ & + \varepsilon\xi_{7r}\cos 2\psi + \varepsilon\xi_{7i}\sin 2\psi)b \\ & + \frac{a^2}{4}[\xi_{6r}\cos 2(\phi - \psi) - \xi_{6i}\sin 2(\phi - \psi)]b \\ b\dot{\psi} = & (-\omega_{wr}\varepsilon\sigma + \frac{1}{4}\xi_{4i}b^2 + \frac{1}{4}\xi_{5i}a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \varepsilon\xi_{7i}\cos 2\psi - \varepsilon\xi_{7r}\sin 2\psi)b \\ & + \frac{a^2}{4}[\xi_{6r}\sin 2(\phi - \psi) + \xi_{6i}\cos 2(\phi - \psi)]b \end{aligned} \quad (14)$$

弾性送水管の横変位 v, w は、 a, b, ϕ, ψ を用いて以下のようになる。

$$\begin{aligned} v = & a\sqrt{\Phi_{vr}^2 + \Phi_{vi}^2}\cos\left[\frac{\nu}{2}t + \phi + \theta_v(s)\right] \\ w = & b\sqrt{\Phi_{wr}^2 + \Phi_{wi}^2}\cos\left[\frac{\nu}{2}t + \psi + \theta_w(s)\right] \end{aligned} \quad (15)$$

ここで $\Phi_{jl}(s) = \Phi_{jr} + i\Phi_{ji}$, $\theta_j(s) = \tan^{-1}(\Phi_{ji}/\Phi_{jr})$, ($j = v, w$) である。

4.2 数値計算例 本研究で取り上げる管内脈動流の振動数領域を明確にするために図 2 に減衰係数 $\omega_{wi} = 0$ の場合について、管内脈動流による係数励振現象の線形安定性の結果を示す。 $\varepsilon = 0.09$ において、励振領域は $|\varepsilon\sigma| < 2.4 \times 10^{-2}$ である。

4.2.1 管下端のばね支持が対称な場合 式 (14) の左辺の時間変動項をゼロとして、管の横振動の定常振幅 a_s, b_s , 位相差 ϕ_s, ψ_s およびその安定性を求めた。

$a_s = b_s$ として求めた管の横振動の周波数応答は図 3 のようになる。同図において、実線および破線は、それぞれ安定および不安定な解を意味する。また図中の一点鎖線は管内流速に脈動成分が存在しない場合 ($\varepsilon = 0$) に発生する管の自励振動の振動振幅 $a_s = b_s = \sqrt{2\omega_{wr}/\xi_{4r}}$ を意味する。 $\varepsilon\sigma \sim 0.0$ すなわち管内脈動流の振動数 ν が二次の固有振動数 ω_{wr} の二倍近傍において、定常な横振動が発生している。その際の管の振動数は、 $\nu/2$ であり管の自励振動は管の横変位の係数励振現象に引き込まれており、その振動振幅は一点鎖線で示した定常流による自励振動の振動振幅よりも大きい。

図 4 に $\varepsilon\sigma = 0.0$ の場合の管の運動の様子 ($s = 0.75$) を示す。管が平面運動を行なう面は、初期条件に依存し決定される。

図 5 に図 3 で安定な定常解が存在しない領域の管の挙動について、式 (14) を数値積分して求めた管横変位の時刻歴とその周波数分析結果および管の挙動を示す。管の横振動は、うなりを伴いある平面内において発生している。先ほどと同様、管の振動する平面は初期条件に依存して決定される。また ν が $2\omega_r$ の近傍より遠ざかると、図 5 の横変位の時刻歴に示すような振動振幅のうなりは小さくなり、図 3 の一点鎖線で示す自励振動の振動振幅に近づいた。

管下端のばね支持が対称な場合には、管はある平面内で運動し空間運動は発生しなかった。また管内脈動流に起因した係数励振現象に引き込まれたり、うなりを伴う運動をする事などは、管の運動を平面内に拘束

Fig. 2 Neutral Curve of the Parametric Resonance of the Pipe Vibration($V_s = 5.77$, $\omega_{wi} = 0$, $\epsilon_K = 0$)

して議論した Bajaj, A.K. や Semler, C. らの結果⁽³⁾⁽⁴⁾と同様である。

4.2.2 管下端のばね支持が非対称な場合 本節では、管下端のばね支持が非対称な場合 ($\epsilon_K = 0.024$) について、管の空間的挙動について調べる。

(a) 振幅方程式の定常解 図 6 に $\epsilon_K = 0.024$ の場合について、 a_s, b_s, ψ_s の周波数応答を示す。図 6(a) に示した線は、線の重なりを防ぐため鉛直方向に平行移動させてあるが、いずれも $a_s = 0$ を意味する。前節の図 5 と同様に $\epsilon\sigma \sim 0$ において、管の自励的横振動は係数励振現象に引き込まれ安定な定常解が発生している。なおその際、管は下端支持剛性の小さい $X-Z$ 面で運動する。

(b) 振幅方程式の非定常解 図 6 において、安定な定常解が存在しない領域での管の挙動を調べるため式 (14) を数値積分した。図 7 に、そのうちの典型的なパターンとして $\epsilon\sigma = 0.025, 0.03, 0.032, 0.04$ の場合について、 b の時刻歴および $q_1 = b \cos \psi$, $q_2 = b \sin \psi$ で与えられる q_1-q_2 平面での軌跡を示す。ここで q_1, q_2 は、複素振幅 D のデカルト座標系による表現に相当する。同図 (a)~(d) より、 b は一定値に収束せず管の横振動の二次の固有周期 $2\pi/\omega_{wr}$ に比べ時間的に緩やかに変動している。同図 (a), (c) および (d) の q_1-q_2 平面で示した軌跡は、閉曲線を描いており、同時に示した時刻歴より b は周期的に変動している。一方、同図 (b) では軌跡は限られた領域内に雲状に分布する特徴を示している。

図 8 に $\epsilon\sigma = 0.025, 0.03, 0.032, 0.04$ の場合について、 v, w の時刻歴およびその周波数分析結果を示す。同図 (a), (c) の周波数分析の結果では主要な振動数成分は等間隔に並び、その周波数の中間に小さな成分が櫛状に派生している。なお同図 (c) の w の最も支配的な振動数成分は、管内脈動流の影響がない場合 ($\epsilon = 0$) に発生する管の自励振動の振動数に相当している。

図 8(b) では、周波数は管の二次の固有振動数付近

Fig. 3 Frequency Response Curves($\epsilon = 0.09$, $\epsilon_K = 0$)

Fig. 4 Pipe motion in Y-Z plane($\epsilon\sigma = 0.0$)

Fig. 5 Time histories of the pipe vibration and its motion in Y-Z plane($\epsilon\sigma = 0.05$)

Fig. 6 Frequency Response Curves($\varepsilon = 0.09, \varepsilon_k = 0.024$)

Fig. 7 Time histories of b and their trajectories in the $q_1 - q_2$ plane($\varepsilon_k = 0.024$)

Fig. 8 Time histories of v and w ($\varepsilon_k = 0.024$)

で、ある程度の幅を持って存在している。また時刻歴にも周期性は認められない。同図(d)では、管の横振動は下端支持剛性の小さな $X-Z$ 面内で発生する。下端ばね支持が対称な場合と同様に、 v が $2\omega_r$ から離れ

Fig. 9 Pipe motion in the $Y-Z$ plane ($\epsilon_K = 0.024$)

るにつれて、 $X-Z$ 面内の横振動のうなりは小さくなる。また卓越した二本の振動数成分の中で低い方は自励振動の振動数、高い方は管内脈動流の振動数の半分 $v/2$ に対応する。

図 9 に、図 8 の各時刻歴に対応する $Y-Z$ 面内での管の挙動を示す。同図 (a),(b),(c) より $\epsilon\sigma$ が安定な定常解が存在する境を僅かに超えた場合には、管は空間的に複雑な挙動を示すことが分かる。

5. 実験

前報⁽⁷⁾と同様に内径 7(mm)、外径 12(mm)、全長 518(mm) および単位長さ当りの質量 1.2(g/cm) のシリコンチューブを用いて実験を行なった。管内を流れる流体には水を用い、管下端を弾性支持するばねには直径 0.5(mm) のピアノ線を加工したコイルばねを用いた。

実験に用いた管の曲げ剛性は $EI = 1.0 \times 10^{-2} (\text{N} \cdot \text{m}^2)$ であり、管下端のばね定数は $k = 0.36 (\text{N/m})$ 、付加質量は $M = 18.0 (\text{g})$ である。これらの実験値は、4.2 節で用いた無次元パラメータの値に対応している。

管の横変位 v, w を、二台の CCD カメラによる画像処理システムを用いて、管上端から 390(mm) の位置に取り付けた反射テープからの反射光を利用して三次元非接触で測定した。また電磁流量計により管内流速 v_f を測定した。管内流速の脈動成分は、管上端に存在するタンクの支流に取り付けた電磁弁を開閉させることにより発生させた。

また v を増加させた場合と減少させた場合において、現象の定性的な違いは認められなかった。なおこれ以降に示す ϵ_K の実測値小数点 2 桁目の添字は参考

Fig. 10 Time histories of v, w and Δv ($v = 3.9 \text{ Hz}$)

値として示した。

図 11, 10 に、 $\epsilon_K = 0.24$ で v が 4.3, 3.9(Hz) の場合に観察された、空間運動、平面運動を v, w および Δv の時刻歴と管横変位のリサージュで示す。

図 11 に示すように、うなりを伴う空間運動が観察された。このうなりを伴う空間運動は、図 8(b) に示したものと同様に周期性が見受けられなかった。またその主要な振動数成分は、二次の固有振動数近傍に幅を持って存在しており、理論解析の図 8 と定性的に一致している。

v を減少させ管の固有振動数の 2 倍近傍に近づけると、図 10 より管は管内脈動流の振動数の $1/2$ 倍成分が支配的な定常横振動をする。すなわち管の横振動は管内脈動流による係数励振現象に引き込まれる。このとき、管は、下端支持剛性の小さい $X-Z$ 面内が支配的な平面運動をした。

その他の代表的な $Y-Z$ 平面内での管の挙動を図 12 に示す。同図 (a) では、図 8(a) および (c) のように管の横振動は二次モードの固有振動数近傍において複数の振動数成分を有し、その軌道は $Y-Z$ 面内で広がりを持つ。また同図 (b) より、 v が管の二次の固有振動数から離れると、管の運動は下端支持剛性の小さい $X-Z$

Fig. 11 Time histories of v and w ($v = 4.3\text{Hz}$, $\varepsilon\sigma = 0.048$)

(a) $v=4.2(\text{Hz})$, $\varepsilon\sigma=0.024$ (b) $v=4.5(\text{Hz})$, $\varepsilon\sigma=0.098$

Fig. 12 Pipe motion in $Y-Z$ plane

面内が支配的な平面運動をした。

6. お わ り に

本研究では管上端を固定され、管下端の付加質量をばね支持された弾性送水管の空間的挙動を調べた。

まず管内流の脈動成分および管下端のばねの支持方式が管内定常流速による管の自励的横振動に与える影響について理論的に調べ、以下の結論を得た。

- (1) 管下端のばね支持が対称な場合、管の運動は初期条件に依存して決定される平面内の定常横振動あるいはうなりを伴う横振動として現れる。とりわけ管内脈動流成分の振動数が管の固有振動数の二倍近傍である時、管の横振動は係数励振現象に引き込まれる。
- (2) 管下端のばね支持が非対称な場合、管内脈動流成分の振動数が管の固有振動数の二倍近傍から僅かに遠

ざかると、管は振動振幅のうなりを伴う複雑な空間運動をする。そして管内脈動成分の振動数を固有振動数の二倍に近づけると、下端ばね支持が対称な場合と同様に管の横振動は管内脈動流による係数励振現象に引き込まれ平面運動となる。

次にシリコンチューブを用いた実験を行なうことにより以下のことが確認された。

- (3) 管内脈動流成分の振動数が管の固有振動数の二倍近傍において、理論解析結果と定性的に一致する空間運動を確認すると共に、脈動流成分の半分の振動数が支配的な定常面内横振動すなわち係数励振現象への引き込みを明確に捉えた。

おわりに、本研究に惜しめない協力をいただいた慶應義塾大学大学院生の新谷智史氏および廣瀬裕己氏に感謝の意をあらわします。

文 献

- (1) Gregory, R.W. and Paidoussis, M.P., Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid I. Theory, *Proceedings of the Royal Society(London)*, Vol.293, No.1435, (1966), pp.512-527.
- (2) Paidoussis, M.P., *Fluid-Structure Interactions Slender Structures and Axial Flow Volume1*, (1998), 242-243, Academic press.
- (3) Bajaj, A.K., Nonlinear dynamics of tubes conveying a pulsatile flow, *Dynamics and Stability of systems*, Vol.2, No.1, (1987), 19-41.
- (4) Semler, C. and Paidoussis, M.P., Nonlinear Analysis of the Parametric Resonance of a Planar Fluid-Conveying Cantilevered Pipe, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.10, No.7, (1996), pp.787-825.
- (5) Yoshizawa, M. et al., Nonlinear Lateral Vibration of a Vertical Fluid-Conveying Pipe with End Mass, *JSME International Journal, Series C*, Vol.41, No.3, (1998), pp.652-661.
- (6) Yamashita, K. et al., Beating Phenomena of a Pipe Conveying Fluid with a Spring Supported End, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.70, No.694, (2004), pp.1573-1580.
- (7) Yamashita, K. et al., Nonplanar Vibration of a Pipe Conveying Fluid(In Case of an Asymmetrical Spring Supported End), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.69, No.688, (2003), pp.3141-3148.