速度飽和要素に起因するPIOの解析*

山田 克彦^{*1}, 軸屋 一郎^{*2}
坂本 登^{*2}, 後藤 文彦^{*2}

Pilot-Induced Oscillation Analysis with Rate Limiter

Katsuhiko YAMADA^{*3}, Ichiro JIKUYA,
Noboru SAKAMOTO and Fumihiko GOTO^{*3} Graduate School of Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

This paper proposes a describing function method for limit cycle analysis of a system with a rate limiter. First, the rate limiter is defined and its describing function is derived in a strict manner. Then, the stability analysis using the describing function of the rate limiter is executed. In many cases of limit cycles, the output of the rate limiter becomes triangular, and in order to deal with such cases by the describing function, a new method to modify an open-loop transfer function is introduced. This method can predict the limit cycle occurrence more exactly, which is applicable to a prediction of a rate-limiter based PIO (Pilot-Induced Oscillation) of an aircraft.

Key Words: Method of Vibration Analysis, Nonlinear Vibration, Aeronautical Engineering, Aircraft, Modeling, Rate Limiter, Describing Function, Pilot-Induced Oscillation, Flying Qualities

1. ま え が き

PIO (Pilot-Induced Oscillation) とは航空機を制御しようとするパイロットの行動により引き起こされる持続的かつ制御不可能な振動現象である。なかでもアクチュエータの速度飽和に起因する準線形的な振動現象はカテゴリ II の PIO として分類される⁽⁴⁾。T-2 CCV 機の飛行試験時に発生した大きな横揺れ⁽⁹⁾など、さまざまな航空機事故の原因であることが知られており、飛行制御系を設計する際に特に注意を払うことが求められている⁽¹²⁾。

本研究では速度飽和要素に起因する PIO を、パイロット・航空機・速度飽和要素からなる閉ループシステムにおけるリミットサイクルとしてとらえ、その発生予測を目的として、記述関数法によるリミットサイクルの発生予測方法を提案する。

PIO を予測するための速度飽和要素のモデルとしては、速度制限付アクチュエータ(図1参照)と呼ばれるモデルを用いたものが多い⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。このモデルでは出力は常に速度制限を満たし、入力に追従する。しかし入力に速度制限を満たす場合でも入力と出力は一致しない。また、ソフトウェアレートリミッタ(図2参照)と呼ばれるモデルも知られている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。このモ

デルでも常に出力は速度制限を満たし、入力に速度制限を満たす場合には入力と出力が一致する。しかし出力は入力に追従しない。またステップ入力や三角波など、不連続もしくは微分不可能な点が存在する場合には値が定義されない。

これに対し Duda は速度飽和要素を具体的に表現するかわりに、正弦波が入力されるという簡単な状況を考え、両者のメリットを兼ね備えるような速度飽和要素のモデル化を行った⁽²⁾。まず、出力は正弦波入力と同じ周期を持ち、以下の性質を満たすものとする：

- 1) 正弦波入力の周波数が低ければ、出力は速度制限を満たし、入力と出力は一致する
 - 2) 正弦波入力の周波数がある周波数より高くなると、入力と出力が一致する時間区間と、出力が飽和して入力を追従する時間区間を繰り返す
 - 3) さらに正弦波入力の周波数がある周波数より高くなると、出力は完全に飽和し、三角波が出力される
- そして 1) と 2) の境目となる周波数をオンセット周波数と呼び、速度制限値と入力振幅の商により定まることを示した。2) と 3) の境目となる周波数が、オンセット周波数の $\sqrt{\pi^2 + 4}/2$ 倍として表されることを示した。さらに 1) と 3) の場合に限定して記述関数を導出し、OLOP 基準の提案⁽³⁾、飛行制御系設計⁽⁴⁾やフライトシュミレータを用いた実験による検証⁽⁵⁾などを行った。しかし 2) の場合に対する記述関数の導出も望まれ

* 原稿受付 2006 年 6 月 21 日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。^{*2} 名古屋大学大学院工学研究科。

E-mail: kyamada@nuae.nagoya-u.ac.jp

るし、そもそも速度飽和要素のモデルを陽に与えることも望まれる。

そこで、本稿では上記の 1) から 3) の性質を満たすような速度飽和要素を定義し、その定義に基づき記述関数を導く。得られた記述関数を航空機システムの例題に適用し、速度飽和要素に起因するリミットサイクルの発生予測法を提案するとともに、その有効性を確認する。さらに記述関数で無視した高調波の影響を考慮して予測精度を向上させる方法についても考察する。

Fig. 1 Block diagram of simplified rate limited actuator

Fig. 2 Block diagram of software rate limiter

2. 速度飽和要素の定義

本節では、前節の 1) から 3) の性質を満たすような速度飽和要素のモデルを陽に与える。速度飽和要素への入力を x 、出力を y とすると、 y は x によって一意に定まらず、 $y \neq x$ なら制限速度で追従するが、 $y = x$ なら $\dot{x}$ と制限速度の大小関係に応じて傾きが切り替わるよう構成する。しかし、それだけではステップ信号や三角波など、不連続もしくは微分不可能な場合には値が定義されない。

そこで x は区分的に連続微分可能かつ左半連続と仮定し、速度飽和要素は 3 つのモードをもち、モードに応じて y が定まるものとして速度飽和要素を構成する。

まず初期時刻 $t = 0$ において速度飽和要素の属するモードを以下のように定める。

$$\begin{cases} \text{Mode A: if } x(0-) < x(0+) \\ \quad \text{or } (x(0-) = x(0+) \ \& \ \dot{x}(0+) \geq v_L) \\ \text{Mode B: if } x(0-) = x(0+) \ \& \ |\dot{x}(0+)| < v_L \\ \text{Mode C: if } x(0-) > x(0+) \\ \quad \text{or } (x(0-) = x(0+) \ \& \ \dot{x}(0+) \leq -v_L) \end{cases}$$

ただし $v_L > 0$ は定数とし、速度制限値を表す。また x の右極限を $x(t+)$ 、左極限を $x(t-)$ とする。

$$x(t+) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} x(t+h), \quad x(t-) := \lim_{h \rightarrow 0, h < 0} x(t+h)$$

次に $t = 0$ の直後の出力を以下のように定める。

$$y(t) = \begin{cases} v_L t + x(0-) & \text{Mode A} \\ x(t) & \text{Mode B} \\ -v_L t + x(0-) & \text{Mode C} \end{cases}$$

モード A に属するならば $x \geq y$ を満たし、 y は制限速度 v_L で x を追従する。しかし、 x が正弦波の場合など、時間発展すると $x < y$ となる場合が起こりうる。またモード B に属するならば入出力は一致し速度制限を満たすが、時間発展すると入力が制限速度を超え、出力速度が飽和する場合も起こりうる。その他に x が不連続もしくは微分不可能となる場合も起こりうる。

そこで、モードの切り替え規則と切り替え時刻 $t_i > 0, i \in \mathbb{N}$ を次のようにして再帰的に定める。まず $t_0 = 0$ とおく。そして、時刻 $t = t_c > t_{i-1}$ に以下のいずれかがおこったならば、 $t_i = t_c$ とおき、モードを切り替える。

$$\begin{cases} \text{Mode A or C} \Rightarrow \text{B: if } x(t-) = x(t+), \forall t \in (t_{i-1}, t_c] \\ \quad \& \ y(t_c) = x(t_c) \ \& \ |\dot{x}(t_c+)| < v_L \\ \text{Mode A} \Rightarrow \text{C: if } x(t-) = x(t+), \forall t \in (t_{i-1}, t_c] \\ \quad \& \ y(t_c) = x(t_c) \ \& \ \dot{x}(t_c+) \leq -v_L \\ \text{Mode C} \Rightarrow \text{A: if } x(t-) = x(t+), \forall t \in (t_{i-1}, t_c] \\ \quad \& \ y(t_c) = x(t_c) \ \& \ \dot{x}(t_c+) \geq v_L \\ \text{Mode B} \Rightarrow \text{A: if } x(t-) = x(t+), \forall t \in (t_{i-1}, t_c] \\ \quad \& \ \dot{x}(t_c+) \geq v_L \\ \text{Mode B} \Rightarrow \text{C: if } x(t-) = x(t+), \forall t \in (t_{i-1}, t_c] \\ \quad \& \ \dot{x}(t_c+) \leq -v_L \\ \text{Mode A, B, C} \Rightarrow \text{A: if } x(t-) = x(t+), \forall t \in (t_{i-1}, t_c] \\ \quad \& \ x(t_c-) < x(t_c+) \\ \text{Mode A, B, C} \Rightarrow \text{C: if } x(t-) = x(t+), \forall t \in (t_{i-1}, t_c] \\ \quad \& \ x(t_c-) > x(t_c+) \end{cases}$$

そして $t_i \leq t < t_{i+1}$ での速度飽和要素の出力 y を以下のように定める。

$$y(t) := \begin{cases} v_L(t - t_i) + x(t_i-) & \text{Mode A} \\ x(t) & \text{Mode B} \\ -v_L(t - t_i) + x(t_i-) & \text{Mode C} \end{cases}$$

以上の定義のもとで、 y は区分的に微分可能かつ連続であり、微分可能な時刻では $\dot{y}$ は次のように表される。

$$\dot{y} = \begin{cases} v_L & \text{Mode A} \\ \dot{x} & \text{Mode B} \\ -v_L & \text{Mode C} \end{cases}$$

速度飽和要素の入出力関係を図 3 のブロック線図をもちいて表すことができる。ただし図中の符号関数は履歴に応じて値が異なり、モード A(このとき $x \geq y$) に属するならば v_L を値とし、モード C(このとき $x \leq y$) に属するならば $-v_L$ を値とする。

モード A もしくはモード C は、図 1 において $e_L \rightarrow 0$ としたものに相当し、無限大の帯域をもつ速度制限付アクチュエータとみなすことができる。またモード B では $|\dot{x}(t+)| < v_L$ を満たすことに注意すると、図 2 に表されるソフトウェアレートリミッタに相当することがわかる。

本節にて提案された速度飽和要素は速度制限を満たすだけでなく、モードを切り替えることにより、 y は x を追従するという特性と、 $\dot{x}$ の大きさが v_L より小さければ y と x は等しくなるという特性の両方を達成する。

$$\begin{aligned} \text{A or C} \rightarrow \text{B:} \quad & y(t) = x(t-) = x(t+) \text{ and } |\dot{x}(t+)| < v_L \\ \text{B} \rightarrow \text{A or C:} \quad & x(t-) \neq x(t+) \text{ or } |\dot{x}(t+)| \geq v_L \end{aligned}$$

Fig. 3 Block diagram of rate limiter model

3. 速度飽和要素の記述関数の導出

記述関数を求めるためには、正弦波入力に対する出力の周期成分を抜き出し、その基本波成分の振幅と位相を求める必要がある。ところが、速度飽和要素に正弦波を入力しても一般的には出力が周期的となるとは限らない。

そこで正弦波入力の位相をうまく選ぶと出力が周期的となることに着目する。ここでは入力の位相を調整する代わりに、出力の初期値をうまく選ぶと出力が周期的となることを示す。そして出力の基本波成分を求め、記述関数を導出する。

3.1 オンセット周波数の導出 速度飽和要素に対する正弦波入力の振幅を a 、周波数を ω とする。

$$x(t) = a \sin(\omega t)$$

$\dot{x}$ の最大値が $a\omega$ であることに注意すると、 ω が

$$\omega < \frac{v_L}{a} =: \omega_{onset} \quad (1)$$

を満たすならば、初期時刻では速度飽和要素はモード B に属することがわかる。さらに速度飽和要素は常にモード B に属し、入出力が常に一致することもわかる。この ω_{onset} はオンセット周波数と呼ばれ Duda により導出されたものに等しい⁽²⁾。

以降では、 ω が ω_{onset} 以上であると仮定して、出力が正弦波入力に一致する区間を持つ場合と、三角波が出力される場合にわかれることを示し、記述関数を導出する。

3.2 一致区間と飽和区間を持つ場合の記述関数 ω が ω_{onset} 以上ならば、入出力が一致する区間と出力が飽和する区間の両方を持つ場合が存在する。このような例を図 4 に示す。ここでは $a = 15$ [deg]、 $\omega = 1$ [rad/s] とし、速度制限値を $v_L = 10$ [deg/s] としている。

記述関数を求めるためには出力 y の周期成分が必要である。そこで、速度飽和要素の定義に従って $y(0) = x(0)$ と設定する代わりに、出力は入力と同じ周期を持つと仮定する。そして、一周成分の出力が

$$y = \begin{cases} a \sin(\omega t) & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ -v_L(t - \tau_2) + a \sin(\omega \tau_2) & \tau_2 \leq t < \tau_1 + \frac{\pi}{\omega} \\ a \sin(\omega t) & \tau_1 + \frac{\pi}{\omega} \leq t < \tau_2 + \frac{\pi}{\omega} \\ v_L(t - \tau_2 - \frac{\pi}{\omega}) - a \sin(\omega \tau_2) & \tau_2 + \frac{\pi}{\omega} \leq t < \tau_1 + \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

により表されるものとして、切替時刻 τ_1 と τ_2 の存在条件を導出する。 τ_1 と τ_2 の存在が示されたならば、 $\tau_1 \leq t < \tau_2$ もしくは $\tau_1 + \pi/\omega \leq t < \tau_2 + \pi/\omega$ に初期時刻を取り直すことにより、速度飽和要素の定義に矛盾することなく周期的な出力を構成できる。ここでは一般性を失うことなく $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < 2\pi/\omega$ とする。

まず τ_2 が存在するための条件を導出する。時刻 $t = \tau_2$ ではモード B からモード C に切り替わるため

$$\dot{x}(\tau_2) = a\omega \cos(\omega \tau_2) = -v_L$$

が成り立ち、式の整理をすると

$$\cos(\omega \tau_2) = -\frac{v_L}{a\omega} = -\frac{\omega_{onset}}{\omega} \quad (2)$$

が得られる。時刻 $t = \tau_2$ にモード B からモード C に切り替わるため τ_2 は $\pi/2\omega < \tau_2 < 3\pi/2\omega$ を満たすが、 $\pi/\omega \leq t < 3\pi/2\omega$ では $|x|$ が単調減少することに注意すると、入出力が一致する時間区間 $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ が存在するためには

$$\frac{\pi}{2\omega} < \tau_2 < \frac{\pi}{\omega} \quad (3)$$

が成り立たなければならない。時刻 $t = \tau_2 + \pi/\omega$ は傾きが負の直線が折り返された後であるため、 $t = \tau_2 + \pi/\omega$ において $\tau_2 \leq t < \tau_1 + \pi/\omega$ から延長した直線と y を比較すると

$$-v_L \left(\tau_2 + \frac{\pi}{\omega} - \tau_2 \right) + a \sin(\omega \tau_2) < a \sin(\omega \tau_2 + \pi)$$

が得られる。式を整理して

$$\sin(\omega \tau_2) < \frac{v_L \pi}{2a\omega} = \frac{\omega_{onset} \pi}{2\omega} \quad (4)$$

が得られる。式(2)と式(4)から τ_2 を消去すると ω が

$$\omega_{onset} \leq \omega < \frac{\sqrt{4+\pi^2}}{2} \omega_{onset} =: \omega_g \quad (5)$$

を満たすならば、式(2)、(3)、(4)を満たす τ_2 が一意に存在することがわかる。

次に、 ω が式(5)を満たすならば、 τ_1 は必ず一意に存在することを示す。時刻 $t = \tau_1$ においてモードAからモードBに切り替わるので $|\dot{x}(\tau_1)| = |a\omega \cos(\omega\tau_1)| < v_L$ が成り立ち、式(2)より τ_1 は

$$\frac{\pi}{\omega} - \tau_2 < \tau_1 < \tau_2 \quad (6)$$

を満たさねばならない。一方、時刻 $t = \tau_1 + \pi/\omega$ で y を評価すると

$$-\omega_{onset} \left(\tau_1 + \frac{\pi}{\omega} - \tau_2 \right) + \sin(\omega\tau_2) = \sin(\omega\tau_1 + \pi) \quad (7)$$

が得られる。簡単のため $f(\tau) := -\omega_{onset}(\tau - \tau_2) + \sin(\omega\tau_2) - \sin(\omega\tau)$ とおいて式の整理をすると、式(7)は $f(\tau_1 + \pi/\omega) = 0$ へと変換される。 f の定義と式(2)より $f(\tau_2) = 0$ かつ $\frac{df}{d\tau}(\tau_2) = \frac{df}{d\tau}(2\pi/\omega - \tau_2) = 0$ 。 $\tau_2 < \tau < 2\pi/\omega - \tau_2$ では $\cos(\omega\tau) < -\omega_{onset}/\omega$ を満たすため $\frac{df}{d\tau} > 0$ が得られ、 $f(2\pi/\omega - \tau_2) > 0$ が成り立つ。 $2\pi/\omega - \tau_2 < \tau < \tau_2 + 2\pi/\omega$ では $\cos(\omega\tau) > -v_L/a\omega$ を満たすため $\frac{df}{d\tau} < 0$ が成り立つ。式(4)より $f(\tau_2 + \pi/\omega) < 0$ が成り立つ。よって、 $2\pi/\omega - \tau_2 < \tau < \tau_2 + \pi/\omega$ に $f(\tau) = 0$ の解は一意に存在する。この解を $\tau_1 + \pi/\omega$ とおくと、 τ_1 は式(6)を満たす。したがって、式(6)と式(7)を満たす τ_1 は一意に存在する。

以上により、入力周波数 ω が式(5)を満たすならば、切替時刻 τ_1 と τ_2 が一意に存在して、 y は周期的となる。このとき y をフーリエ級数展開してその基本波成分を求め、入力 x に対する基本波成分の振幅の増加率と位相のずれを求めることにより、記述関数 N が得られる。

$$N(a, \omega) = \sqrt{s_1^2 + c_1^2} e^{j \arctan(\frac{c_1}{s_1})}$$

ただし s_1 と c_1 は次のように定義される。

$$\begin{aligned} s_1 &:= \frac{\omega}{a\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \frac{2\pi}{\omega}} y \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\pi\omega} (-(\tau_1 - \tau_2)\omega^2 + \omega_{onset}(2\sin(\tau_1\omega) \\ &\quad + \sin(2\tau_2\omega)) - \omega \sin(\omega\tau_1) \cos(\omega\tau_1)) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} c_1 &:= \frac{\omega}{a\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \frac{2\pi}{\omega}} y \cos(\omega t) dt \\ &= -\frac{1}{\pi\omega^2} (\omega_{onset} - \omega \cos(\tau_1\omega))^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Fig. 4 Input and output of rate limiter where output partially coincides with input (upper : angle, lower : rate)

3.3 飽和区間のみの場合の記述関数 ω が ω_g 以上ならば、速度飽和要素はモードAとモードCを繰り返し、出力は三角波となる。このような例を図5に示す。ここでは $a = 20$ [deg], $\omega = 1$ [rad/s]とし、速度制限値を $v_L = 10$ [deg/s]としている。

そこで前小節と同様の解析を行うと、

$$\sin(\omega\tau_3) = \frac{\omega_{onset}\pi}{2\omega}, \quad \frac{\pi}{2\omega} < \tau_3 < \frac{\pi}{\omega}$$

を満たす τ_3 は一意に存在し、一周分分の出力 y は

$$y = \begin{cases} -v_L(t - \tau_3) + a \sin(\omega\tau_3) & \tau_3 \leq t < \tau_3 + \frac{\pi}{\omega} \\ v_L(t - \tau_3 - \frac{\pi}{\omega}) - a \sin(\omega\tau_3) & \tau_3 + \frac{\pi}{\omega} \leq t < \tau_3 + \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

と表されることがわかる。また y のフーリエ級数の基本波成分を求めることにより、記述関数 N が得られる。

$$N(a, \omega) = \frac{4\omega_{onset}}{\pi\omega} e^{-j \arccos(\frac{\pi\omega_{onset}}{2a\omega})}$$

3.4 速度飽和要素の記述関数 以上をまとめると、速度飽和要素の記述関数 N は以下のように求まる。

$$N(a, \omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega < \omega_{onset} \\ \sqrt{s_1^2 + c_1^2} e^{j \arctan(\frac{c_1}{s_1})} & \omega_{onset} \leq \omega < \omega_g \\ \frac{4\omega_{onset}}{\pi\omega} e^{-j \arccos(\frac{\pi\omega_{onset}}{2a\omega})} & \omega_g \leq \omega \end{cases} \quad (10)$$

ただし、 a と ω は入力正弦波 $x(t) = a \sin(\omega t)$ の振幅と周波数を表し、 ω_{onset} は式(1)に定義され、 s_1 と c_1 は式(8)と式(9)に定義される。 s_1 と c_1 に含まれる τ_1 と τ_2 は、 τ_2 が式(2)と式(3)を満たし、 τ_1 は式(6)と式(7)を満たし、それぞれ一意に存在する。

$\omega \leq \omega_{onset}$ において、式(10)はDuda⁽²⁾の式(11)に一致する。一方、Duda⁽²⁾では $\omega_{onset} \leq \omega < \omega_g$ におい

て3.2節に相当する解析を行わず、 $0 \leq \omega < \omega_{onset}$ と $\omega_g \leq \omega$ における記述関数を補間していた。よって、Duda⁽²⁾における速度飽和要素の記述関数と比較すると、式(10)は完全な記述を与えるといえる。

図6に記述関数 N の周波数応答を示す。ここでは $a = 15$ [deg], $v_L = 15$ [deg/s] としている。このとき Duda⁽²⁾の図4と同様にゲインの低下と位相遅れがみられる。また $\omega_{onset} = 1$ [rad/s] と $\omega_g = \sqrt{4 + \pi^2}/2 \simeq 1.8261$ [rad/s] において周波数応答は連続的に変化し、 $\omega \rightarrow \infty$ とするとゲインは0に収束し位相遅れは 90° に収束する。

実際、振幅 a を固定して、 $\omega \rightarrow \omega_{onset} +$ とすると $\tau_1 \rightarrow 0$, $\tau_2 \rightarrow \pi/\omega_{onset}$, $s_1 \rightarrow 1$, $c_1 \rightarrow 0$ を満たし、 $\omega = \omega_{onset}$ で N は連続であることがわかる。

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{onset}^-} N(a, \omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_{onset}^+} N(a, \omega) = 1$$

また

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_g^-} \tau_1 = \lim_{\omega \rightarrow \omega_g^-} \tau_2 = \lim_{\omega \rightarrow \omega_g^+} \tau_3$$

より、 $\omega = \omega_g$ でも N は連続であることがわかる。

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_g^-} N(a, \omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_g^+} N(a, \omega) = \frac{8}{\pi\sqrt{4+\pi^2}} e^{-j\arctan(\frac{\pi}{2})}$$

さらに $\omega \rightarrow \infty$ とするとゲインは0に収束し位相遅れは $\pi/2$ [rad] に収束することがわかる。

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} N(a, \omega) = 0 e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

また、このことは、図4と図5において a を固定して ω を大きくすると、出力の最大値が a から連続的に小さくなり0に収束することと、位相遅れが0 [rad] から連続的に増加して $\pi/2$ [rad] に収束することとして解釈される。

4. 記述関数法によるリミットサイクルの発生予測

記述関数法によるリミットサイクルの発生予測法を航空機システムの場合に対して示す。簡単のためパイロットの伝達関数を定数ゲイン k_p とし、プラントの伝達関数をつぎのようにおく。これはT33航空機の機体の伝達関数において定数ゲインの部分を除いたものである⁽¹³⁾。

$$G_p(s) = \frac{0.8s + 1}{s \left(\frac{1}{4.92}s^2 + \frac{1}{4.9}s + 1 \right)}$$

さらに表記の簡単のため $H(s) := k_p G_p(s)$ とおく。速度制限値は $v_L = 10$ [deg/s] とする。

以降では記述関数法による安定性判別を行い、リミットサイクルの発生を予測する。そしてステップ入力を入力したシュミレーション結果との比較により、提案手法の有効性を確認する。さらに高調波の影響を考慮して予測精度を向上させる手法についても考察する。

Fig. 5 Input and output of rate limiter where output does not coincide with input (upper : angle, lower : rate)

Fig. 6 Sinusoidal describing function response of $N(a, \omega)$ for $a = 15$ [deg] and $v_L = 15$ [deg/s] (upper: gain, lower: phase)

Fig. 7 Closed loop system

4.1 速度飽和要素の記述関数を用いた安定判別法

図7に示す系に対して、各 k_p に対して

$$1 + H(j\omega)N(a, \omega) = 0 \quad (11)$$

を満たす a と ω を求める。 $k_p \geq 5.554$ の場合に式(11)の解は二個存在し、図8の実線部と破線部に示す。実線部では a を増加させると一巡伝達関数 $H(j\omega)N(a, \omega)$ の位相遅れが 180° より小さくなるためリミットサイクルは安定であり、破線部では a を増加させると一巡

伝達関数 $H(j\omega)N(a, \omega)$ の位相遅れが 180° より大きくなるためリミットサイクルは不安定と判定される⁽⁸⁾。

したがって、 $k_p \geq 5.554$ の場合にリミットサイクルが発生し、各 k_p に対して、速度飽和要素の入力は図8の実線部の振幅 a と周波数 ω をもつ正弦波として近似されると予測する。

つぎにこの系に対して 1° のステップ入力に対する時間応答を求める。 $k_p = 5.4, 5.6$ の二通りの場合に対する時間応答の結果を、図9に示す。さらに $k_p = 5.5 \sim 10$ において同様の時間応答を求め、その結果から系にリミットサイクルによる持続的な振動が発生するときの速度飽和要素入力の正弦波（基本波）の振幅と周波数を求めて、結果を図8に重ねて示す（○印）。

この図に示すように振動が持続する振幅と周波数は実線部の近くにみられ、若干のずれはあるものの、記述関数を用いた予測値はシミュレーション結果のよい近似を与えるといえる。

なお、図8の a と ω を求める時に、 $k_p = 5.554$ 付近では3.2節で導出した記述関数を用いられている。本小節での発生予測法は Duda⁽³⁾ と同様であるが、Duda⁽²⁾ では3.3節に相当する記述関数しか導出されていないことと比較すると、式(10)の導出により、より広い範囲でのパイロットゲインに対するリミットサイクル発生の予測が可能となったといえる。

4.2 高調波の影響を考慮した安定判別法 図8

に示すように記述関数から予測される振動の振幅と周期はシミュレーション結果から得られるものと若干相違がある。この原因として考えられるのは、速度飽和要素出力に含まれる高調波成分の影響である。図9よりわかるように、振動の発生する際の速度飽和要素出力は三角波となっており、出力が正弦波入力に追従する区間をもたない。そこで速度飽和要素出力が三角波となることを仮定して、高調波の影響について検討してみよう。

図7に示す閉ループシステムにリミットサイクルが発生し、速度飽和要素の出力 w が、平均値0、周期 $2\pi/\omega$ 、傾き $\pm v_L$ の三角波により表され、時刻 $t = 0$ で三角波が0から増加するものとする。 w の振幅は $\pi v_L/2\omega$ であり、Fourier 級数展開は次式で表される。

$$w(t) := \frac{4v_L}{\pi\omega} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)^2} \sin((2i+1)\omega t)$$

ループを一巡した速度飽和要素に対する入力 u は次式で表される。

$$u(t) := -\frac{4v_L}{\pi\omega} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)^2} |H(j(2i+1)\omega)| \sin((2i+1)\omega t + \arg(H(j(2i+1)\omega)))$$

(a) Input Amplitude

(b) Input Frequency

Fig. 8 Relation between gain k_p and rate limiter input

ただし $\arg$ は複素数の偏角を表す。

w の定義より w は $t = \pi/2\omega$ にて最大値をとり、 $u(\pi/2\omega) = w(\pi/2\omega) = \pi v_L/2\omega$ が成り立つ。式の整理をすると

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} \Re(H(j(2i+1)\omega)) = -\frac{\pi^2}{8} \quad (12)$$

が得られる。ただし $\Re$ は複素数の実部を表す。

さて、式(11)は基本波成分に着目して得られたリミットサイクル発生の条件であるが、式(11)をゲインと位相に関する条件に分離し、

$$\frac{4\omega_{onset}}{\pi\omega} |H(j\omega)| = 1 \quad (13)$$

$$\arg(H(j\omega)) - \arccos\left(\frac{\pi\omega_{onset}}{2\omega_{onset}}\right) = -\pi \quad (14)$$

$\Re(H(j\omega))$ が満たす条件を導出する。式(14)より

$$\cos(\arg(H(j\omega))) = -\frac{\pi\omega_{onset}}{2\omega} \quad (15)$$

Fig. 9 Angle and rate of rate limiter output with $k_p = 5.4$ and $k_p = 5.6$

が得られる。式(13)と式(15)より

$$\Re(H(j\omega)) = |H(j\omega)| \cos(\arg(H(j\omega))) = -\frac{\pi^2}{8} \quad (16)$$

が得られ、これは式(12)における基本波成分($i=0$)のみを抜き出したものに相当する。

そこで、高調波の影響を考慮するために式(12)を式(16)の拡張とみなし、式(11)に含まれる $H(j\omega)$ を

$$\hat{H}(j\omega) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} H(j(2i+1)\omega) \quad (17)$$

でおきかえ、安定性判別を行うことにする。

また、速度飽和要素の出力が三角波となるためには $\dot{u}(\pi/2\omega) \leq -v_L$ を満たす必要があり、式の整理をするとき位相に関する条件

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \Im(H(j(2i+1)\omega)) \leq -\frac{\pi}{4} \quad (18)$$

が得られる。ただし $\Im$ は複素数の虚部を表す。

なお、基本波のみに着目したとき、三角波が発生するための条件 $\omega_g \leq \omega$ と式(13)を組み合わせると

$$|H(j\omega)| \geq \frac{\pi\sqrt{4+\pi^2}}{8}$$

が得られるが、これは式(18)の基本波成分($i=0$)だけを抜き出し、式(16)を適用することによっても得られる。よって式(18)は基本周波数成分だけに着目した位相条件を拡張したものと解釈できる。

そこで式(11)に含まれる $H(j\omega)$ を $\hat{H}(j\omega)$ でおきかえて安定判別を行い、不安定と判定されたならば、式(18)を満たすか確認することにする。

以上により、次のステップで速度飽和要素に起因する振動(リミットサイクル)の発生を検討することができる。

1. 速度飽和要素の出力に三角波の振動の発生を仮定して、式(11)の $H(j\omega)$ を $\hat{H}(j\omega)$ でおきかえ、リミットサイクルの発生を調べる。振動の発生するときには、基本波の周波数 ω を求める。
2. 周波数 ω が式(18)を満たすときには、速度飽和要素の出力に三角波の振動の発生が予測されるので、上記の解析結果をそのまま採用する。
3. 周波数 ω が式(18)を満たさないときには、速度飽和要素の出力として三角波は生じない。このときは式(11)を用いてリミットサイクルの発生を調べる。

最後に、航空機システムの例に対して、高調波の影響を考慮した安定性解析の適用例を示す。式(17)を用いて系の安定判別を行うと、 $k_p \geq 5.409$ でリミットサイクルの発生する結果が得られ、このときの式(18)の左辺を求めると -1.460 となって式(18)の条件を満たす。したがって $k_p \geq 5.409$ で速度飽和要素の出力を三角波とする振動の発生することが予測される。この k_p の下限値は、二次以上の高調波を考慮しないときの値(5.554)よりも3%程度小さくなっている。また k_p を大きくすると式(18)の左辺の絶対値も増加するので、三角波の振動が持続する。

図8と同様に、系に安定なりミットサイクルが生じると予測されるときに振幅と周波数を図10の実線部に示す。また 1° のステップ入力に対するシュミレーションから得られた振幅と周波数も○印として重ねて示す。よって二次以上の高調波を考慮することにより、予測値とシミュレーション結果の一致度が向上することがわかる。

Fig. 10 Relation between gain k_p and rate limiter input with consideration of higher harmonics

5. ま と め

本稿では速度飽和要素を有する系のリミットサイクルの解析に記述関数法を用いた結果を示した。速度飽和要素のモデルを明確に記述し、得られた記述関数を用いてリミットサイクルの発生予測方法を提案した。さらに速度飽和要素の出力として三角波の振動が発生する場合に、高調波の影響を含めた解析方法を示した。シミュレーション結果との比較から、提案手法によりリミットサイクルの発生を精度よく予測できることが明らかになり、今後、速度飽和要素の存在が原因とされる航空機のPIOの予測に役立つものと期待される。

文 献

- (1) Amato, F., Iervolino, R., Scala, S. and Verde, L., Category II Pilot in-the-Loop Oscillations Analysis from Robust Stability Methods, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 3 (2001), pp. 531-538.
- (2) Duda, H., Frequency Domain Analysis of Rate Limiting Elements in Flight Control Systems, DLR-FB 94-16, Aug., 1994 (in German)
- (3) Duda, H., Prediction of Pilot-in-the-Loop Oscillations due to Rate Saturation, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 3 (1997), pp. 581-587.
- (4) Duda, H., Flight control system design considering rate saturation, *Aerospace Science and Technology*, No. 4, (1998), 265-275
- (5) Duda, H., Duus G., Hovmark, G. and Forssell, L., New Flight Simulator Experiments on Pilot-Involved Oscillations due to Rate Saturation, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 2 (2000), pp. 312-318.
- (6) Hess, R. A. and Snell, S. A., Feedback Design for Unstable Plants with Saturating Nonlinearities: Single-Input, Single-Output, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 1 (1996), pp. 191-197.
- (7) Hess, R. A. and Snell, S. A., Flight Control System Design with Rate Saturating Actuators, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 1 (1997), pp. 90-96.
- (8) Hirai, K., *Nonlinear Control Systems*, (2003), Corona Publishing
- (9) Kanno, H. and Katayanagi R., Characteristics of the Pilot-Induced Oscillation (PIO) of the T-2 CCV and Its Improvement, *Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 43, No. 498 (1995), pp. 405-414
- (10) Klyde, D.H., McRuer, D.T. and Myers, T.T., Pilot-Induced Oscillation Analysis and Prediction with Actuator Rate Limiting, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 1 (1997), pp. 81-89.
- (11) Klyde, D.H. and Mitchell, D.G., Investigating the Role of Rate Limiting in Pilot-Induced Oscillations, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 5, (2004), pp. 804-813
- (12) McRuer, D. and Graham, D., Flight Control Century: Triumphs of the Systems Approach, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 2 (2004), pp. 161-173.
- (13) Neal, T.P. and Smith, R.E., A Flying Qualities Criterion for the Design of Fighter Flight-Control Systems, *Journal of Aircraft*, Vol. 8, No. 10 (1971), pp. 803-809.
- (14) Ryu, S. and Andrisani, D., Longitudinal Flying Qualities Prediction for Nonlinear Aircraft, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 3 (2003), pp. 474-482.
- (15) Wu, B. and Peng, J., Gain-Phase Margin Analysis of Pilot-Induced Oscillations for Limit-Cycle Prediction, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 27, No. 1 (2004), pp. 59-65.