メカトロニクス系の非線形平衡実現とモデル低次元化*

藤 本 健 治^{*1}Nonlinear Balanced Realization and Model Order Reduction
of Electro-mechanical SystemsKenji FUJIMOTO^{*2}^{*2} Department of Mechanical Science and Engineering, Graduate School of Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

This paper proposes a model order reduction procedure based on nonlinear balanced truncation which preserves the port-Hamiltonian structure of the original model. This method allows us to preserve the energy variable which will be useful in controlling the reduced order model. Furthermore, a numerical simulation shows how the proposed method works.

Key Words: Nonlinear Systems, Model Order Reduction, Balanced Realization

1. 緒 言

実世界に存在する対象の多くが非線形のふるまいをする系であるのに対して、従来はこれを近似して線形のモデルを構成することにより、線形のシステム制御理論を適用していた。しかしより高精度な解析や制御を行なったり、より複雑な制御対象を扱いたいという要求から、近年非線形の対象は非線形のまま扱う非線形のシステム制御理論が注目を集めつつある。しかし非線形の制御手法を適用する際には、そのモデルおよび補償器はどんどん複雑になる。このような場合に重要になるのが平衡実現やモデル低次元化の技術である。

非線形システムを含むダイナミカルシステムの低次元化では、中心多様体理論や特異摂動法を用いるものが知られている。例えば⁽¹⁾などを参照いただきたい。これらの方法は入力を持たないダイナミクスの解析には有効であるが、入出力を持つ制御器の低次元化を行なうような設計問題には適さない。線形制御理論の分野では、このような入出力を持つ制御器の低次元化手法として、平衡実現と平衡化打ち切り法と呼ばれる方法が確立されており、様々な事例で実用化されている⁽²⁾⁽³⁾。これにともなって、非線形系に対する平衡実現と低次元化手法も研究されており、ほぼ線形と同様な性質を持つ手法が開発されつつある⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾。線形のシステムに対するモデル低次元化手法は、これ以外にも

様々なものが提案されている⁽⁷⁾が、本質的に非線形性を取り扱える形に一般化できるものはない。このように平衡実現は非線形系のモデル低次元化として、役に立つ手法であるのだが、実際の適用にあたってはハミルトンヤコビ方程式などの偏微分方程式を解かねばならず、とくに大規模システムに対してそのまま解を求めることは困難である⁽⁸⁾。

またモデル低次元化では、どんなモデルにも適用できる汎用性のある方法が求められる一方で、制御対象の特定の特徴を保存するような手法も必要となる。そのうちの一つにメカトロニクス系の特徴を保存する低次元化がある。このような方向性の研究は、線形のモデル低次元化の分野ではいくつか提案されており、とくに力学系の特徴を表すのに自然な形式であるハミルトン系の構造を保存する低次元化の研究⁽⁹⁾が重要である。

本論文は、非線形平衡実現に基づく低次元化法を基礎として、メカトロニクス系の特性を保存するような低次元化法を提案するものである。とくにメカトロニクス系のモデルとしてポート・ハミルトン系⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾を採用し、その構造を保存するモデル低次元化手法を提案する。系の持つ物理的エネルギーの総和であるハミルトン関数が、ある条件のもとで重み付きの可制御性関数や可観測性関数と見なせることから、(i) ポート・ハミルトン系に対しては、一部の偏微分方程式を解く必要がなくなり、(ii) さらに重み付きの関数を用いると、ハミルトン系の構造を保存した低次元化法が自然に導かれることを示す。さらに数値例を用いて提案法

* 原稿受付 2006年7月19日。

^{*1} 正員、名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋千種区不老町)。

E-mail: fujimoto@nagoya-u.jp

の有効性を示す。

本論文で扱う記号を定義しておく。 $\mathbb{R}^n$ は n 次元の実ベクトル空間、 $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ および $\mathbb{R}_+ := [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ は半直線を表す。また $L_2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ は、 L_2 ノルム $\|x\|_{L_2(\Omega; \mathbb{R}^n)} := (\int_{\Omega} \|x(t)\|^2 dt)^{1/2}$ が有界になるベクトル値関数 $x: \Omega(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ のなす空間をいう。本論文では、表記の簡単のため誤解の生じない範囲で $L_2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ を L_2^n あるいは単に L_2 と表記したり、 $L_2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^n)$ を L_2^- と表記したりする。

2. 非線形系の平衡実現とモデル低次元化

本節ではまず線形系および非線形系の平衡実現とそれに基づくモデル低次元化(平衡化打ち切り法)について簡単にまとめておく。ここで対象とするのは、次式で表されるような入力にアファインな非線形系である。

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1)$$

ここで $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ などとし、 $x=0$ が平衡点すなわち $f(0)=0$ であり、系の線形近似系は漸近安定、また系の入出力は L_2 安定であると仮定する。

この系に対して、可制御性関数 $L_c(x)$ および可観測性関数 $L_o(x)$ と呼ばれる2つのスカラー関数を定義する。

$$L_c(\xi) := \inf_{\substack{u \in L_2^- \\ x(-\infty)=0, x(0)=\xi}} \frac{1}{2} \|u\|_{L_2^m}^2 \quad (2)$$

$$L_o(\xi) := \frac{1}{2} \|y\|_{L_2^r}^2, \quad x(0)=\xi, \quad u(t) \equiv 0. \quad (3)$$

この $L_c(x)$, $L_o(x)$ の正定性がそれぞれ系 Σ の可到達性および可観測性を意味する。なめらかな可制御性関数 $L_c(x)$, 可観測性関数 $L_o(x)$ が存在するとき、次のハミルトンヤコビ方程式およびリアプノフ方程式を解くことでこれらの関数が得られることが知られている⁽⁴⁾。

$$\frac{\partial L_c(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} g(x) g(x)^T \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L_o(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} h(x)^T h(x) = 0 \quad (5)$$

ただし式(4)の $L_c(x)$ については、 $\dot{x} = -f(x) - g(x)g(x)^T(\partial L_c(x)/\partial x)^T$ の原点 $x=0$ が漸近安定になるような解(反安定化解)とする。

また制御系が線形系の場合を考えてみよう。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

この場合には、上記の方程式は次のようなリアプノフ方程式になる⁽²⁾。

$$AG_c + G_c A^T + BB^T = 0$$

$$A^T G_o + G_o A + C^T C = 0$$

ここで $G_c, G_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は、それぞれ可制御性グラム行列および可観測性グラム行列と呼ばれ、 $L_c(x)$, $L_o(x)$ とは次式のような関係にある。

$$L_c(x) = \frac{1}{2} x^T G_c^{-1} x, \quad L_o(x) = \frac{1}{2} x^T G_o x$$

線形系の場合には、 G_c, G_o はそれぞれ、入力から状態までの影響、および状態から出力までの影響を表している。座標系をうまく選ぶと、これらが等しくかつ対角になるように、すなわち

$$G_c = G_o = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (6)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

となるようにできる。この座標系での状態空間実現を平衡実現と呼び、 σ_i をハンケル特異値と呼ぶ。 $G_c = G_o$ であることから、入力状態間の挙動と状態出力間の挙動が平衡化されており、また G_c, G_o が対角化されていることから、各座標軸が入出力に与える影響も平衡化されており直ちに評価できる。すなわち対応するハンケル特異値 σ_i の大きな座標軸ほど入出力に大きな影響を持つため、この部分を切り取るにより低次元モデルを得ることができる。非線形のモデル低次元化では、この平衡実現は以下ようになる。

定理 1 ⁽⁶⁾⁽⁵⁾ 系(1)に対して可制御性関数および可観測性関数 $L_c(x)$, $L_o(x)$ が存在し、なめらかであるとする。さらに系の線形近似系が非零でかつ互いに異なるハンケル特異値を持つとする。このときある原点の近傍 X において原点を動かさない座標変換 $x \mapsto \Phi(x)$ が存在し¹、次のような座標系に変換される

$$L_c(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i(x_i)}$$

$$L_o(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i(x_i)$$

ただし、 $\min\{\sigma_i(s), \sigma_i(-s)\} > \max\{\sigma_{i+1}(s), \sigma_{i+1}(-s)\}$ 。

ここで、スカラー関数 $\sigma_i(x_i)$ は Σ のハンケル特異値関数と呼ばれる。この実現は式(6)における2つの性質: (i) $G_c = G_o$, (ii) G_c と G_o が対角行列、を同時に満たしているが、モデル低次元化のためには(ii)の性質のみが必要である。非線形の場合にこの(ii)の性質にあたるのが、次式である。定理の座標系では常に成立することが確認できるだろう。

$$x_i = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L_c(x)}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L_o(x)}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

$$\sigma_i(x_i)^2 = \frac{L_o(\Phi(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0))}{L_c(\Phi(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0))}$$

¹座標変換 $x \mapsto \Phi(x)$ とは、座標の取り替え $\bar{x} = \Phi(x)$ によっていったん新しい局所座標 $\bar{x}$ で系の挙動を表現したあとに、 $\bar{x}$ を x で置き換えて表現したものである。

線形の場合と同様に、ハンケル特異値関数 $\sigma_i(x_i)$ は座標軸 x_i の重要度を表す。したがって $\sigma_i(x_i)$ の値が大きな座標 x_i のみを切り取ることで、式 (1) の非線形系に対しても、非線形の低次元モデルを得ることができる。いま式 (1) の制御対象がすでに式 (7) (もしくは定理 1) の意味で平衡化されているとし、ある k ($1 < k < n$) について $\min\{\sigma_k(s), \sigma_k(-s)\} \gg \max\{\sigma_{k+1}(s), \sigma_{k+1}(-s)\}$ が成り立っているとすると、重要な座標だけを取り出して $x^r := (x_1, \dots, x_k)$ と表記しよう。このとき式 (1) の系の x^r に対応する低次元モデル Σ^r は次のように得られる。

$$\Sigma^r: \begin{cases} \dot{x}^r = f^r(x^r, 0) + g^r(x^r, 0) u \\ y = h(x^r, 0) \end{cases} \quad (8)$$

ただし $f^r(x)$ および $g^r(x)$ は、それぞれ x から x^r を切り取ったのにあわせて、 $f(x)$ および $g(x)$ の上の k 要素だけを切り取ったものとする。このとき次の性質が低次元モデルに引き継がれる。

定理 2 ⁽⁶⁾ 式 (1) の系 Σ が式 (7) の意味で平衡化されているときに、式 (8) の低次元モデル Σ^r を得たとする。このとき Σ^r の可制御性関数 $L_c^r(x^r)$ および可観測性関数 $L_o^r(x^r)$ は、次式を満たす。

$$L_c^r(x^r) = L_c(x^r, 0)$$

$$L_o^r(x^r) = L_o(x^r, 0).$$

さらに系 Σ^r のハンケル特異値関数 $\sigma_i^r(x_i^r)$ は次式を満たす。

$$\sigma_i^r(x_i^r) = \sigma_i(x_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

この定理により、式 (8) の低次元モデル Σ^r は元の制御系 Σ の重要な性質である可到達性、可観測性、安定性およびハンケル作用素の意味での入出力のノルム構造などを保存していることがわかる。このように平衡実現に基づく非線形系のモデル低次元化手法は、線形系に対する手法の自然な一般化となっており、多くの重要な性質を保存する手法である。

3. ポート・ハミルトン系の平衡実現

前節で述べたように、非線形の平衡実現とモデル低次元化手法は非常に強力な手法である。しかし現実の低次元化問題では、ノルム構造ではなく、また違った制御対象の特性を保存したい場合がある。そのうちのひとつが、メカトロニクス系、特にメカニカル系の特性である。メカニカル系の特性を保存するモデル低次元化手法は、線形のモデルに対してはいくつか提案されている⁽⁹⁾が、非線形のものとは考察されてこなかった。ここではまず、メカトロニクス系を表すモデルとして、近年さかんに研究されているポート・ハミルトン系を

採用し、この系に対して前節の平衡実現の手法を適用しその性質を探る。次節ではここで得られた結果を用いて、メカトロニクス系の特性を保存したモデル低次元化手法を導く。

ここで扱うポート・ハミルトン系とは、次式で表される非線形系である⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。この制御系は、一般の非線形系 (1) の関数 $f(\cdot), g(\cdot)$ を特殊なクラスに限定したものになっている。

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x) u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (9)$$

ここでスカラー関数 $H(x)$ はハミルトン関数と呼ばれ、系の全物理エネルギーを表す。 $J(x) = -J(x)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は歪対称行列、 $R(x) = R(x)^T \geq 0$ は対称半正定行列であり、それぞれハミルトン系の保存系の性質、および摩擦などの散逸項を表している。またこの形式は、通常の機械系および LCR 回路などの電気系とそれらの結合系、さらにに非ホロノミック拘束なども含めて表現でき、エネルギー保存の性質を持つ幅広い物理系に適したモデルといえる。とくに、次式のようにハミルトン関数 $H(x)$ を蓄積関数として、入出力が受動的になっており、このハミルトン関数と受動性を保存する低次元化法が望まれている。

$$\int_0^{t^1} y_p(t)^T u(t) dt \geq H(x(t^1)) - H(x(t^0))$$

ここで y_p は受動出力と呼ばれ、次式で定義される量である。

$$y_p := g(x)^T \frac{\partial H(x)}{\partial x} \quad (10)$$

さて前節では可制御性関数 $L_c(x)$ は、式 (2) で定義されることを述べた。しかしこの可制御性関数 (あるいは可制御性グラム行列) は、制御目的に応じて重み付けされたものを用いることが多い⁽¹²⁾⁽³⁾⁽¹³⁾。ここでは、次のような重み行列 $D_c(x) > 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ による計量を導入した可制御性関数 L_c^w を考える。

$$L_c^w(\xi) := \inf_{\substack{u \in L_2^m \\ x(-\infty)=0, x(0)=\xi}} \int_{-\infty}^0 u(t)^T D_c(x) u(t) dt \quad (11)$$

このとき次の性質が成立する。

補題 1 定理 1 の仮定を満たす式 (9) のポート・ハミルトン系 Σ を考えよう。この系に対して式 (11) で定義された重み付き可制御性関数 $L_c^w(x)$ を考える。いま重み行列 $D_c(x)$ が次式を満たすとすると。

$$g(x)^T D_c(x) g(x) = R(x)$$

このとき次式が成立する。

$$L_c^w(x) = H(x) \quad (12)$$

証明. 重み付きでない場合と同様に, 重み付きの可制御性関数 $L_c^w(x)$ も次式のようなハミルトンヤコビ方程式の解となる.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L_c^w(x)}{\partial x} (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^T \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial L_c^w(x)}{\partial x} g(x) 2D_c(x) g(x)^T \frac{\partial L_c^w(x)}{\partial x}^T \\ &= \frac{\partial L_c^w(x)}{\partial x} (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^T \\ &\quad + \frac{\partial L_c^w(x)}{\partial x} R(x) \frac{\partial L_c^w(x)}{\partial x}^T \\ &= \frac{\partial H(x)}{\partial x} (J(x) - R(x)) \frac{\partial (H(x) - L_c^w(x))}{\partial x}^T. \end{aligned}$$

もし式 (12) が成立するなら上式も成立する. したがって, このハミルトンヤコビ方程式の反安定化の唯一性より, 式 (12) は常に成立する. $\square$

この補題は, 次式が成立するならば, 通常の可制御性関数の代わりにハミルトン系に対しては, ハミルトン関数 $H(x)$ を重み付きの可制御性関数と同一視してよいということを述べている.

$$R(x) \in \text{Im } g(x) \quad (13)$$

したがってその場合には, 可制御性関数 $L_c(x)$ を求める際に問題であったハミルトンヤコビ方程式 (4) を解くことなしに平衡実現および低次元モデルを得ることができる. さらにこの事実は低次元化の際にも, 計算量以外の恩恵をもたらすことを次節で述べる.

また重み付き可観測性関数を考えることで, 補題 1 と双対な結果が得られる. 以下ではこれを見てみよう. ここでは, 式 (9) のポート・ハミルトン系に対して次のような人工的な出力関数を加えたものを考える. 式 (10) と見比べると, $g_0(x) = g(x)$ のときに受動出力と一致する量であることがわかる.

$$y_w = g_0(x)^T \frac{\partial H(x)}{\partial x}^T \quad (14)$$

この出力 y_w に対して, 重み付き可制御性関数のときと同様な重み行列 $D_o(x) > 0 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ による計量を導入した可観測性関数 $L_o^w(x)$ を定義する.

$$L_o^w(\xi) := \int_0^\infty y_w(t)^T D_o(x) y_w(t) dt, \quad x(0) = \xi, \quad u(t) \equiv 0. \quad (15)$$

この準備の元で次のような結果が成立する.

補題 2 定理 1 の仮定を満たす式 (9) のポート・ハミルトン系 Σ を考えよう. この系に対して式 (15) で定義された重み付き可観測性関数 $L_o^w(x)$ を考える. いま重み行列 $D_o(x)$ が次式を満たすとする.

$$g_o(x) D_o(x) g_o(x)^T = R(x)$$

このとき次式が成立する.

$$L_o^w(x) = H(x) \quad (16)$$

証明. 重み付きでない場合と同様に, 重み付き可観測性関数 $L_o^w(x)$ は, 次のリアプノフ方程式を満たす.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L_o^w(x)}{\partial x} (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^T \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial H(x)}{\partial x} g_o(x) 2D_o(x) g_o(x)^T \frac{\partial H(x)}{\partial x}^T \\ &= \frac{\partial L_o^w(x)}{\partial x} (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^T \\ &\quad + \frac{\partial H(x)}{\partial x} R(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^T \\ &= \frac{\partial (L_o^w(x) - H(x))}{\partial x} (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^T. \end{aligned}$$

もし式 (16) が成立するならば, 上式も成立する. したがってリアプノフ方程式の解の唯一性より, 式 (16) は常に成立する. $\square$

可制御性の場合と同様にこの補題は, 次式が成立するならば, ポート・ハミルトン系のハミルトン関数 $H(x)$ を式 (14) の出力 y_w に関する重み付きの可観測性関数と見なしてよいということがわかる.

$$R(x) \in \text{Im } g_o(x) \quad (17)$$

この場合も, 通常のように可観測性関数 $L_o(x)$ に関するリアプノフ方程式 (5) を解く必要がなくなり, 計算量を削減できる. さらに重み付き可制御性関数の場合と異なり, 式 (14) の $g_o(x)$ を選ぶことにより, 式 (17) の条件は常に成立させることができる. そのような $g_o(x)$ のもっとも簡単な選択肢は,

$$g_o(x) := R(x)^{\frac{1}{2}}$$

である. さらにこのときは $D_o(x) = I$, すなわち重みなしの可観測性行列を用いればよい.

4. モデル低次元化

この節ではポート・ハミルトン系のモデル低次元化を扱う. 前節では, ポート・ハミルトン系のハミルトン関数 $H(x)$ が, 重み付き可制御性関数 $L_c^w(x)$ もしくは重み付き可観測性関数 $L_o^w(x)$ と見なせることがわかった. ここではこの事実が, ハミルトン系のモデル低次元化の際にも非常に有用であることを示そう.

定理 3 式 (9) のポート・ハミルトン系 Σ を考えよう. いま (重み付き) 可制御性関数もしくは可観測性関数のいずれかがハミルトン関数 $H(x)$ に一致するとする. このとき平衡化打ち切り法によって得られた低次元モ

デルは、式(9)と同様な受動的なポート・ハミルトン系で表される。

証明. 式(9)のポート・ハミルトン系 Σ がハミルトン関数 $H(x)$ に関して平衡化されているとする。ポート・ハミルトン系は(時不変な)座標変換によって不変であり、受動性も保存される⁽¹⁴⁾ことに注意。2節で述べた平衡化打ち切り法を適用する。ハンケル特異値関数にあわせて状態を $x = (x^r, x^b)$ のように分割すると、制御系は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^r \\ \dot{x}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11}(x) & J_{12}(x) \\ J_{21}(x) & J_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x)}{\partial x^r} \\ \frac{\partial H(x)}{\partial x^b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} u$$

したがって $x_b = 0$ を代入することにより、定理2は次のような低次元モデルを導く。

$$\dot{x}^r = J_{11}(x^r, 0) \frac{\partial H(x^r, 0)}{\partial x^r} + g_1(x^r, 0) u$$

ここで次の関係式を用いた。

$$\left. \frac{\partial H(x^r, x^b)}{\partial x^b} \right|_{x^b=0} = 0.$$

$J_{11}(x^r, 0)$ は半負定であることから、低次元モデルがポート・ハミルトン系になることが示される。□

さらにこの定理の系として次のような結果を導くことができる。

系1 式(9)のポート・ハミルトン系 Σ を考える。いま条件式(13)、(17)のいずれかが成立するとする²。このとき、低次元モデルが受動的なポート・ハミルトン系となるような重み付き可制御性関数 $L_c^w(x)$ もしくは可観測性関数 $L_o^w(x)$ が存在する。

証明. 補題1,2を定理3に適用すれば直ちに得られる。□

この定理および系より、次の手順によって、ポート・ハミルトン系の構造を保つ低次元モデルが得られることがわかる: (i) もし式(9)の制御対象が、条件(13)を満たしているならば、重み付き可制御性関数 $L_c^w(x)$ としてハミルトン関数 $H(x)$ を用いればよい。こうすることで、式(4)のハミルトンヤコビ方程式を解かずにかつポート・ハミルトン系の構造を保存した低次元化が行える。この場合、元の出力 $y = h(x)$ を可観測性関数として評価すればよい。(ii) 条件(13)は成立しないが、出力関数 y_w を自由に選んでも良い場合は、条件式(13)が成立するように出力 y_w を選び、重み付き可

観測性関数 $L_o^w(x)$ のかわりにハミルトン関数 $H(x)$ を用いる。

上記(i),(ii)に当てはまらない場合は、一般には低次元化の際にハミルトン系の構造は保存されないが、機械系の場合(劣駆動系)では、条件式(13)が成立しなくても $H(x) \approx L_c^w(x)$ となる場合がある。この場合 $H(x)$ を近似的に重み付きの付きの可制御性関数 $L_c^w(x)$ と見なすことでハミルトン系の構造を保存した低次元化が行なえる。数値例ではこの場合を取り扱う。

5. 数 値 例

制御対象が全駆動の機械系である場合、前節の条件式(13)が成立するため、直ちにポート・ハミルトン系の構造を保存した低次元化が可能となる。ここでは、条件式(13)が成り立たない例として、力学系の自由度よりも入力数のほうが少ない劣駆動系を考える。図1に示すような二重振り子を取り扱う。この系は2つのリンクと2つの関節からなる二重振り子で、天井側の関節に駆動トルクが加えられ、もう一方の関節はフリージョイントであるとする。

Fig. 1 A double pendulum

ここで m_i は、リンク i の先端に取りつけられた質点の質量、 l_i はリンク i の長さ、 μ_i はリンク i の関節の摩擦係数、 q_i はリンク i の(リンク $i-1$ に対する)変位角。ここでは簡単のため、これらの物理パラメータは次のように定めた。 $l_1 = l_2 = 1, m_1 = m_2 = 1, \mu_1 = 10, \mu_2 = 1, g_f = 9.8$ ただし g_f は重力定数である。配位空間座標を $q = (q_1, q_2)$ 、(q_1 が根本側のリンク角) 入力 u をリンク1へ加えられるトルク、出力 y をリンク2の先端に取りつけられた質点 m_2 の水平および鉛直方向の変位とする。系の位置エネルギー $P(q)$ および運動エネルギー $K(q, \dot{q})$ は次のようになる。

$$P(q) = -m_1 g_f l_1 \cos q_1 - m_2 g_f l_1 \cos q_1 - m_2 g_f l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$K(q, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2 & m_2 l_1 l_2 \cos q_2 \\ m_2 l_1 l_2 \cos q_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}$$

$M(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ は、慣性行列である。ここで一般化運動

²3節で述べたように、式(14)の出力 y_w を自由に選べるのであれば、この仮定は常に満たすことができる

量を $p := M(q)\dot{q}$ とすると、この系の運動方程式は式 (9) のようなポート・ハミルトン系で表される。ただしハミルトン関数などのパラメータは以下ようになる。

$$\begin{aligned} H(q, p) &= P(q) + K(q, M(q)^{-1} p) \\ J(x) &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \\ R(x) &= \text{diag}(0, 0, \mu_1, \mu_2) \\ g(x) &= (0, 0, 1, 0)^T. \end{aligned}$$

この制御対象に対しては、関節 2 の摩擦係数が $\mu_2 = 0$ のときにかぎり、条件式 (13) が成立する。実際には摩擦が 0 になることはないが、十分小さいとすると補題 1 の条件は、近似的に成立し $L_c^w(x) \approx H(x)$ となると考えられる。よってここでは $L_o(x)$ と $L_c(x)$ を用いた (ハミルトン系の構造を保存しない) 低次元化と $L_o(x)$ と $H(x) \approx L_c^w(x)$ を用いたハミルトン系の構造を保存する低次元化とを行い、低次元モデルの性質を比較することにした。

Fig. 2 Response of the vertical displacement of the mass 2

Fig. 3 Response of the Hamiltonian function

インパルス入力に対する質点 2 の水平方向の変位を図 2 に示す。一点鎖線は、元の制御系の応答を、鎖線は $L_o(x)$ と $L_c(x)$ を用いた (ハミルトン系の構造を保存しない) 低次元モデルの応答を、実線は $L_o(x)$ と $H(x)$

を用いたハミルトン系の構造を保存する低次元モデルの応答である。ハミルトン系構造を保存するように可制御性関数を変更したためか、低次元モデルのモデル化誤差が若干大きくなっているが、おおむね元のモデルの挙動を表している。また図 3 は、対応するハミルトン関数 $H(x)$ の応答である。ハミルトン系構造を保存する実線の応答では、 $H(x)$ の低次元化された値も単調減少していることがわかる。はじめの 0.5 秒ほどは、 H の絶対値にはかなりずれがあるが、低次元化する際に無視された早く収束する状態の影響であると考えられる。

6. 結 言

本論文では、筆者らの提案している非線形平衡実現とモデル低次元化手法に基づいて、ポート・ハミルトン系の構造を保存したモデル低次元化法を提案した。まずポート・ハミルトン系の平衡実現では、重み付きの可制御性関数や可観測性関数を導入することにより、これらの関数とハミルトン関数が一致することがわかった。さらにハミルトン関数を平衡化することで、ハミルトン系の構造やハミルトン関数および受動性を保存するモデル低次元化手法を導いた。最後に数値例により、その有効性を検証した。

本論文の数値例作成にご協力いただいた本学の学生、梶浦英雄君に感謝します。

文 献

- (1) H. K. Khalil : *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, third edition (1996)
- (2) B. C. Moore : Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction; *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-26, pp. 17-32 (1981)
- (3) G. Obinata and B. D. O. Anderson : *Model Reduction for Control System Design*, Springer-Verlag, London (2001)
- (4) J. M. A. Scherpen : Balancing for nonlinear systems; *Systems & Control Letters*, Vol. 21, pp. 143-153 (1993)
- (5) K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen : Nonlinear input-normal realizations based on the differential eigenstructure of Hankel operators; *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 50, No. 1, pp. 2-18 (2005)
- (6) K. Fujimoto and J. M. A. Scherpen : Nonlinear balanced realization based on singular value

- analysis of Hankel operators; *Proc. 42nd IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 6072–6077 (2003)
- (7) S. Gugercin and A. C. Antoulas : Comparative study of 7 algorithms for model reduction; *Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control*, p. 2367 (2000)
- (8) A. Newman and P. S. Krishnaprasad : Computing balanced realizations for nonlinear systems; *Proc. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems* (2000)
- (9) A. J. van der Schaft and J. E. Oeloff : Model reduction of linear conservative mechanical systems; *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-35, No. 6, pp. 729–733 (1990)
- (10) K. Fujimoto : Control of Hamiltonian systems; *Measurement and Control*, Vol. 39, No. 2, pp. 99–104 (2000)
- (11) A. J. van der Schaft : *L_2 -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Springer-Verlag, London (2000)
- (12) Dale F. Enns : Model reduction with balanced realizations: an error bound and frequency weighted generalization; *Proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 127–132 (1984)
- (13) D. Tsubakino and K. Fujimoto : Weighted balanced realization and model reduction for nonlinear systems; *Proc. Symp. Mathematical Theory and Network Systems 2006* (2006)
- (14) K. Fujimoto and T. Sugie : Canonical transformation and stabilization of generalized Hamiltonian systems; *Systems & Control Letters*, Vol. 42, No. 3, pp. 217–227 (2001)
-