可変構造パラメータを有する適応構造システムにおける
可自己同定条件*仙 場 淳 彦^{*1}, 古 谷 寛^{*1}Self-identifiability of Adaptive Structure Systems with
Variable Structural ParametersAtsuhiko SENBA^{*2} and Hiroshi FURUYA^{*2} Department of Built Environment, Tokyo Institute of Technology,
4259-G3-6 Nagatsuta, Midori-ku, Yokohama-shi, Kanagawa, 226-8502 Japan

This paper investigates the sufficient conditions for self-identification of adaptive structure systems with the control input using variable structural parameters in the systems. The principle of the self-identification is explained by the effect of the control input on the eigen-values and eigen-vectors of linear systems. Based on the principle and sensitivity analyses of modal properties, the sufficient conditions for self-identification are derived, where the controllability and observability of modal properties with respect to the control input are introduced. In numerical examples, two spring-mass systems with variable stiffness or variable mass parameters are examined. The results indicate that the self-identifiability of each system can be evaluated with the derived conditions.

Key Words: Adaptive Structure, Sensitivity Analysis, Modal Analysis, Identification, Eigenvalue Analysis, Self-identification, Variable Structural Parameters, Identifiability

記 号 表

$\mathbf{M}$	: mass matrix
$\mathbf{C}$	: damping matrix
$\mathbf{K}$	: stiffness matrix
$\mathbf{M}_v$	: variable mass matrix
$\mathbf{C}_v$	: variable damping matrix
$\mathbf{K}_v$	: variable stiffness matrix
$\bar{\mathbf{M}}_j$	: modal mass matrix
$\bar{\mathbf{C}}_j$	: modal damping matrix
$\bar{\mathbf{K}}_j$	: modal stiffness matrix
$\mathbf{L}$	: input influence matrix
$\mathbf{O}$	: output influence matrix
$\mathbf{T}_{i,j}$	: generalized control vector
$\mathbf{f}$	: excitation force vector
$\mathbf{x}$	: displacement vector
$\mathbf{y}$	: output vector
$\mathbf{X}_{i,j}$	: i th eigen-vector with j th control input
$\mathbf{u}_j$	: j th control input vector
k_{vj}	: j th variable stiffness

m_{vj}	: j th variable mass
$q_{i,j}$	: i th modal coordinate with j th control input
$s_{i,j}$	: i th eigen-value with j th control input
f	: excitation frequency
i	: imaginary unit
k	: integer
m	: number of different combinations of $\mathbf{u}_j$
n	: DOF of adaptive structure system
r	: number of control inputs
t	: time
Δ	: variation
添え字	
i	: mode number
j	: control input number
d, v, a	: displacement, velocity, acceleration

1. 序 論

機械や構造物の数学モデルの慣性, 減衰, 剛性行列等の特性行列を, 振動試験データを用いて修正するモデル更新手法は, 計算機の処理能力向上に応じて 1990 年代以降, 特に注目されている⁽¹⁾。また, 土木構造物の老朽化や人為的な非破壊検査の実施が困難なプラント及び宇宙構造物等の損傷位置や程度を振動特性から推定

* 原稿受付 2006 年 6 月 21 日。

^{*1} 正員, 東京工業大学大学院総合理工学研究科(〒226-8502 横浜市緑区長津田 4259-G3-6)。

E-mail: asenba@enveng.titech.ac.jp

する損傷同定あるいは構造ヘルスマニタリングに関する研究が活発に行われている⁽²⁾。

モデル更新手法は、直接法と繰り返し計算法に大別でき、共に、更新対象の構造パラメータに対する固有値感度等を用いてパラメータ更新量を推定する。従って、固有値、固有ベクトルなどの振動特性を実験的に精度良く取得することが重要な課題になる。直接法には、Kabeの剛性行列調整法⁽³⁾、繰り返し計算を用いた手法として、大熊らの実験的同定法などがそれぞれ提案されている。⁽⁴⁾

特性行列同定の分野における様々な研究がなされてきたが、一般に未知数の数に対する計測データに含まれる情報量の不足が課題である。例えば、観測可能な振動モードの数が同定対象のモデル自由度よりも小さい場合などが考えられる。

モデル更新における情報不足に対して、データ取得条件の改善を目的とした振動試験に関する研究が行われてきた。例えば、Nalittlelaらは、質量や剛性を付加し、振動データ量の増加を図る振動試験法を提案しており、振動境界条件振動試験と呼ばれている⁽⁵⁾。同様に、ChaとGuは、既知の付加質量を補助的に用いて、質量及び剛性行列の更新手法を提案している⁽⁶⁾。これらの既往研究から、モデル更新において構造物外部から質量等を付加する手法の有効性が明らかにされた。しかし、近年の構造物、機械に共通して見られる構造内部に予め可変構造パラメータが組み込まれた場合の体系的な理論構築が不足している。

一方、自己同定(または、自己システム同定)は、適応構造物が有する様々な可変構造パラメータを変化させることにより、構造同定に必要な情報を増加させ、動力特性を同定する同定概念として定義した⁽⁷⁾。適応構造物の中でも構造物の剛性⁽⁸⁾、粘性⁽⁹⁾、慣性⁽¹⁰⁾といった物理パラメータ可変型、及び可変形状トラス(VGT)⁽¹¹⁾に代表される幾何形状可変型の適応構造物における自己システム同定の可能性を明らかにしてきた⁽¹²⁾。しかし、上記の様々な適応構造物において、自己同定手法の適用可能性を評価するためには、一般的な可自己同定条件が必要であると考えられる。

本研究の目的は、自己同定の原理に基づき可自己同定条件を導出し、その適用方法などについて述べることである。そのために自己同定における可制御・可観測性ならびに一般化制御ベクトルなどを導入し、また、固有値・固有ベクトルの可変構造パラメータに対する感度解析を用いて可自己同定条件を導く。最後に、特性の異なる可変構造パラメータを有する2自由度質点系を用いて、可自己同定条件の成立性について説明する。

2. 自己同定の原理

本節における議論は、構造物に適切な数のセンサを提供でき、固有値、固有ベクトルが観測可能であることを仮定する。また、比例粘性減衰を仮定し、固有ベクトルは実数ベクトルであるとする。

2.1 基本原理 n 自由度に離散化された適応構造システムの動力学モデルを考える。このシステムの運動方程式を構成する特性行列は、システムの m 通りの制御入力 $\mathbf{u}_j$ の関数であると仮定する。例えば、質量行列が可変である場合、 $\mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)$ のように表す。この制御入力 $\mathbf{u}_j$ は、トラスの可変剛性部材⁽⁸⁾の剛性やVGT⁽¹¹⁾の可変部材長など様々な可変構造パラメータを総称しており、一般的には複数の可変構造パラメータが組み込まれていると考え、以下ベクトル表記で表すものとする。これらの仮定の元に、システムの運動方程式は次式のように表せる。

$$[\mathbf{M} + \mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)]\ddot{\mathbf{x}} + [\mathbf{C} + \mathbf{C}_v(\mathbf{u}_j)]\dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_v(\mathbf{u}_j)]\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{f}. \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)$, $\mathbf{C}_v(\mathbf{u}_j)$, $\mathbf{K}_v(\mathbf{u}_j)$, $\mathbf{x}$ はそれぞれ、 $(n \times n)$ 質量、減衰、剛性行列、可変質量、可変減衰、可変剛性行列、 $(n \times 1)$ 変位ベクトル、 $\{\}$ は時間微分を表す。また、制御入力の初期値 $\mathbf{u}_1$ は次式を満足する。

$$\mathbf{M}_v(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}, \mathbf{C}_v(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}, \mathbf{K}_v(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

次に、 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ を仮定し、制御入力 $\mathbf{u}_1$ のときの i 次モード複素固有値 $s_{i,1}$ 、実固有ベクトル $\mathbf{X}_{i,1}$ と定数構造行列からなる $(n \times 1)$ ベクトル $\mathbf{S}_i$ を定義する。

$$\mathbf{S}_i = [\mathbf{K} + s_{i,1}\mathbf{C} + s_{i,1}^2\mathbf{M}]\mathbf{X}_{i,1} = \mathbf{0}. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

ここで、制御入力 $\mathbf{u}_1$ から異なる制御入力 $\mathbf{u}_j$ ($j \neq 1$)に変化させた場合を考える。このとき、式(3)の変化前の固有値、固有ベクトルと、変化後の可変構造行列から構成される、次式のような $(n \times 1)$ ベクトルを考える。

$$\mathbf{T}_{i,1}(\mathbf{u}_j) = [\mathbf{K}_v(\mathbf{u}_j) + s_{i,1}\mathbf{C}_v(\mathbf{u}_j) + s_{i,1}^2\mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)]\mathbf{X}_{i,1}. \quad (4)$$

式(4)において、 $\mathbf{T}_{i,1}(\mathbf{u}_j) \neq \mathbf{0}$ のときには、構造物の固有値、固有ベクトルの両方、あるいは、どちらかに変化が生じることになる。すなわち、元のシステムの固有空間の固有ベクトル(基底ベクトル)を用いて変化後の固有ベクトルを表すことはできず、可変構造パラメータの作用する前の系の固有空間から新たな異なる固有空間に変化したと考えることができる。このとき、可変構造パラメータの作用により適応構造システムの固有特性は制御できることになる。従って、可変構造行列

が m 通りに変化可能であり、1 番目から j 番目の制御入力に変化させたときの固有値、固有ベクトルの変化量をそれぞれ、 $\Delta s_{i,j}$ 、 $\Delta \mathbf{X}_{i,j}$ とおくと、

$$s_{i,j} = s_{i,1} + \Delta s_{i,j}, \quad (5)$$

$$\mathbf{X}_{i,j} = \mathbf{X}_{i,1} + \Delta \mathbf{X}_{i,j}, \quad (j = 2, \dots, m) \quad (6)$$

と表すことができる。このように、制御入力の場合の数だけ固有値、固有ベクトルが変化可能である場合に自己同定が可能となる。概念的に示すと、剛性行列等の未知構造行列を形式的に $\mathbf{A}$ で表し、 $\mathbf{A}$ が満足すべき j 通り目の制御入力時の固有方程式を $F(\mathbf{A}, \mathbf{u}_j) = 0$ と表すとき、次式が得られる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \{F(\mathbf{A}, \mathbf{u}_1), F(\mathbf{A}, \mathbf{u}_2), \dots, F(\mathbf{A}, \mathbf{u}_m)\}^T = \mathbf{0}. \quad (7)$$

よって、評価関数 $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ の逆関数を $\mathbf{F}^{-1}$ で表すと、自己同定の一般形として、 $\mathbf{A}$ は以下のように表せる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0}). \quad (8)$$

2.2 可変行列同定法 自己同定の一般式 (8) を具体的な構造同定問題に適用するための可変行列同定法について述べる。本手法の詳細は、文献⁽⁷⁾において示したので、ここでは手法の概要とこれまで議論が十分でないと考えられる加振入力条件について述べる。

式 (5), (6) のような固有値 $s_{i,j}$ 、固有ベクトル $\mathbf{X}_{i,j}$ を、振動試験により推定したと仮定し、推定値をそれぞれ、 $\tilde{s}_{i,j}$ 、 $\tilde{\mathbf{X}}_{i,j}$ とおく。式 (1) において外力 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ とすると、この系の固有値問題は、次式で表せる。

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_v(\mathbf{u}_j) + \tilde{s}_{i,j}\{\mathbf{C} + \mathbf{C}_v(\mathbf{u}_j)\} + \tilde{s}_{i,j}^2\{\mathbf{M} + \mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)\}]\tilde{\mathbf{X}}_{i,j} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

可変構造行列 $\mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)$ 、 $\mathbf{C}_v(\mathbf{u}_j)$ 、 $\mathbf{K}_v(\mathbf{u}_j)$ からなる項を右辺に移行すると次式のように表せる。

$$[\mathbf{K} + \tilde{s}_{i,j}\mathbf{C} + \tilde{s}_{i,j}^2\mathbf{M}]\tilde{\mathbf{X}}_{i,j} = -[\mathbf{K}_v(\mathbf{u}_j) + \tilde{s}_{i,j}\mathbf{C}_v(\mathbf{u}_j) + \tilde{s}_{i,j}^2\mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)]\tilde{\mathbf{X}}_{i,j}. \quad (10)$$

式 (10) の右辺を $\mathbf{u}_j$ の関数である一般化制御ベクトル $-\tilde{\mathbf{T}}_{i,j}(\mathbf{u}_j)$ と定義し次式を得る。

$$[\mathbf{K} + \tilde{s}_{i,j}\mathbf{C} + \tilde{s}_{i,j}^2\mathbf{M}]\tilde{\mathbf{X}}_{i,j} = -\tilde{\mathbf{T}}_{i,j}(\mathbf{u}_j). \quad (11)$$

従って、式 (7) の左辺に対応する評価関数として、

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}) = [\mathbf{K} + \tilde{s}_{i,j}\mathbf{C} + \tilde{s}_{i,j}^2\mathbf{M}]\tilde{\mathbf{X}}_{i,j} + \tilde{\mathbf{T}}_{i,j}(\mathbf{u}_j), \quad (12)$$

が得られた。このように、制御入力変化により、未知構造行列に関する新たな固有方程式が得られ、同定のための方程式の数を増加させることができる。これにより、提供できる加振入力に対して感度の低いモードを計測せず、感度の高いモードを複数通りに変化させ、必要なデータを取得するなどの可能性が考えられる。

2.3 加振条件 自己同定を行うためには、制御入力により変化させることができる振動モードを励起する加振力を必要とする。ここでは、加振条件として加振周波数および加振点（位置）についてそれぞれ条件を導く。

m 通りの制御入力によって、 i 次の振動モードを m 通りに変化させる場合を考える。このとき、制御入力により変化する i 次固有周波数 $f_{i,j}$ の最小値と最大値が、加振力の周波数帯域に含まれることが必要である。より一般的には、この条件が n_s 個の振動モードに対し満足されることが十分条件と考えられるから、次式のようにまとめられる。

$$\min(f) \leq f_{i,j} \leq \max(f), \quad (13)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_s, j = 1, 2, \dots, m)$$

ここで、 n_s は制御入力に対し、感度のある最高次のモード数を表す。また、 $\min(f)$ 、 $\max(f)$ はそれぞれ、加振周波数の最小値、最大値である。

次に、加振点に関する条件を導く。式 (9) の固有方程式から求めた n 個の固有ベクトル、 $\mathbf{X}_{i,j}$ を列方向に並べた行列を $\mathbf{X}_j$ とおく。式 (1) の解 $\mathbf{x}$ は、 $\mathbf{X}_j$ とモード座標 $\mathbf{q}_j = \{q_{1,j}, q_{2,j}, \dots, q_{n,j}\}^T$ を用いて、 $\mathbf{x} = \mathbf{X}_j \mathbf{q}_j$ と表すことができ、次式を得る。

$$\bar{\mathbf{M}}_j \ddot{\mathbf{q}}_j + \bar{\mathbf{C}}_j \dot{\mathbf{q}}_j + \bar{\mathbf{K}}_j \mathbf{q}_j = \mathbf{X}_j^T \mathbf{L} \mathbf{f}, \quad (14)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{M}}_j$ 、 $\bar{\mathbf{C}}_j$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_j$ は、それぞれモード質量行列、モード減衰行列、モード剛性行列であり次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{M}}_j = \mathbf{X}_j^T (\mathbf{M} + \mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)) \mathbf{X}_j, \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_j = \mathbf{X}_j^T (\mathbf{C} + \mathbf{C}_v(\mathbf{u}_j)) \mathbf{X}_j, \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_j = \mathbf{X}_j^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_v(\mathbf{u}_j)) \mathbf{X}_j. \quad (17)$$

次に、 $\mathbf{L} = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_n)$ 、 $\mathbf{f} = \{1, 1, \dots, 1\}^T$ とおくと、式 (14) の右辺は次式となる。

$$\mathbf{X}_j^T \mathbf{L} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} X_{1,j,1} & X_{1,j,2} & \dots & X_{1,j,n} \\ X_{2,j,1} & X_{2,j,2} & \dots & X_{2,j,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_{n,j,1} & X_{n,j,2} & \dots & X_{n,j,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

ここで、行列の成分 $X_{i,j,k}$ は、制御入力 $\mathbf{u}_j$ を与えたときの i 次モードの k 番目ベクトル成分である。式 (18) から明らかに、 i 次固有ベクトルのベクトル成分 $X_{i,j,k}$ がゼロでないとき、この点に加振力を与えることにより、 i 次振動モードを励起させることができる。また、他のモードについても同様のことが言える。

以上から、自己同定可能な適応構造システムに要求される加振力ならびに加振点に関する条件は以下の二つにまとめられる。

- 自己同定のための加振周波数は, 制御入力によって制御可能な固有周波数の上下限値を含む周波数帯域を持つこと.
- 自己同定のための加振点は, 制御入力によって制御可能なモード形状 (固有ベクトル) のベクトル成分がゼロでない位置 (節とならない位置) であること.

3. 可自己同定条件

前節では, 可変行列同定法による自己同定のためには, 制御入力によって固有値・固有ベクトルの独立な変化が必要であることを述べた. 本節では主に, 前節の議論と感度解析を統合して, 適応構造システムの設計段階等において, 事前に自己同定可能性を評価できる可自己同定条件を固有特性の感度の条件として導く.

3.1 自己同定における固有特性の可制御性 式 (5), (6) で表される固有値・固有ベクトルの独立変化を用いた自己同定の原理に基づき, 固有値・固有ベクトルを固有特性と定義し, 以下のような自己同定における可制御性を定義する.

- 固有特性の可制御性: 可変構造パラメータの有限の変化によって, システムの固有特性を初期の固有特性から異なる固有特性へ遷移可能であること. この可制御性は, 制御工学で知られる可制御性が満足されるシステムにおいても必ずしも満足されるとは限らない. 以下に, 固有値と固有ベクトルの感度解析を用いた検討を行い, 可制御性の必要十分条件を導く.

3.1.1 可制御条件 n 個の離散点からなる線形離散システムとして表すことができる適応構造システムを考える. また一般性を考慮して, 適応構造システムは, r 個の制御入力 u_k , ($k=1, 2, \dots, r$) を有するものとする. 各制御入力の j 番目の値から構成される制御入力ベクトルを次式で定義する.

$$\mathbf{u}_j = \{u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{rj}\}^T, \quad (19)$$

また, 初期制御入力ベクトル $\mathbf{u}_1$ を基準とした j 番目制御入力ベクトルの変化量を次式で表す.

$$\Delta \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_1. \quad (20)$$

式 (19) の制御入力ベクトルによって制御される固有値, 固有ベクトル変化量は, 各モード特性の $\mathbf{u}_j$ による 1 次の感度を用いて以下のように近似できると考えられる.

$$\Delta s_{i,j} \approx \frac{\partial s_{i,j}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_1} \Delta \mathbf{u}_j, \quad (21)$$

$$\Delta \mathbf{X}_{i,j} \approx \frac{\partial \mathbf{X}_{i,j}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_1} \Delta \mathbf{u}_j. \quad (22)$$

ここで, 式 (21), (22) 右辺の感度成分は次式のように表せる.

$$\frac{\partial s_{i,j}}{\partial \mathbf{u}} = \left\{ \frac{\partial s_{i,j}}{\partial u_1} \frac{\partial s_{i,j}}{\partial u_2} \dots \frac{\partial s_{i,j}}{\partial u_r} \right\}, (1 \times r) \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}_{i,j}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{i,j,1}}{\partial u_1} & \frac{\partial X_{i,j,1}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial X_{i,j,1}}{\partial u_r} \\ \frac{\partial X_{i,j,2}}{\partial u_1} & \frac{\partial X_{i,j,2}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial X_{i,j,2}}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial X_{i,j,n}}{\partial u_1} & \frac{\partial X_{i,j,n}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial X_{i,j,n}}{\partial u_r} \end{bmatrix}. (n \times r) \quad (24)$$

なお, 式 (23), (24) の各行列成分 $\partial s_{i,j}/\partial u_1$, $\partial \mathbf{X}_{i,j,k}/\partial u_1$ 等の解析方法については, 例えば, 山川らの手法⁽¹³⁾を参照されたい.

以上から自己同定における多入力の場合の可制御性条件は以下のようにまとめられる.

$$\frac{\partial s_{i,j}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_1} \Delta \mathbf{u}_j \neq 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}_{i,j}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_1} \Delta \mathbf{u}_j \neq c \mathbf{X}_{i,j} \quad (26)$$

ここで, c はスカラーであり, 式 (26) は固有ベクトル変化量が $\mathbf{X}_{i,j}$ と線形従属でないことを意味する. 以上から, 可制御な適応構造システムは以下のようにまとめられる.

- 固有値ならびに固有ベクトルの制御入力に対する感度がゼロでなく, 固有ベクトルと線形独立な固有ベクトル変化に相当する制御入力が存在することを満足するシステム.

3.1.2 制御入力の存在条件 式 (26) の右辺が存在する場合に, それを満たす左辺の感度行列と制御入力ベクトルの積が存在することが要求される. 言い換えると, 固有値, 固有ベクトルの制御入力ベクトルに対する感度行列の k 行目ベクトルと j 番目制御入力ベクトル変化量の内積がゼロでなく式 (26) を満たすこと, すなわち, 次式が満足されることが必要になる.

$$\frac{\partial X_{j,k}}{\partial u_1} \bigg|_{u_1=u_{11}} \Delta u_{1j} + \frac{\partial X_{j,k}}{\partial u_2} \bigg|_{u_2=u_{21}} \Delta u_{2j} + \dots + \frac{\partial X_{j,k}}{\partial u_r} \bigg|_{u_r=u_{r1}} \Delta u_{rj} \neq p_{i,j,k} \quad (27)$$

ここで, $p_{i,j,k}$ は式 (26) の右辺を満足するベクトルの k 番目成分である.

以上から, 適応構造システムにおいて, 自己同定可能を行うための制御入力が存在するためには, 以下の条件が要求される.

- 固有値の制御入力に対する感度ベクトルのベクトル成分がゼロではなく, 固有ベクトルの制御入力に対する感度行列の k 行目ベクトルと制御入力ベクトルの内積がゼロではないこと. ただし, $k=1, 2, \dots, r$.

3.2 自己同定における固有特性の可観測性 次に、自己同定における固有特性の可観測性を以下に定義する。

- 自己同定における固有特性の可観測性: 有限時間の出力を観測することにより、可変構造パラメータにより変化する固有特性変化が一意に決定可能であること。ただし、可変構造パラメータ制御入力とは既知とする。

本研究では、適応構造システムが線形離散システムと仮定できる場合を扱うため、固有値、固有ベクトルの推定には、変位、速度、加速度何れかの計測を行うことで十分である。

有限時間において適応構造システムの変位計測を行った場合の出力信号は以下のように表せる。

$$\mathbf{y}_d(\mathbf{u}_j) = \mathbf{O}_d \mathbf{x}(\mathbf{u}_j). \quad (l \times 1) \quad (28)$$

ここで、 $\mathbf{y}_d(\mathbf{u}_j)$ 、 $\mathbf{O}_d$ はそれぞれ、 $(l \times 1)$ 観測信号、 $(l \times n)$ の変位出力影響行列である。また、速度計測の場合には、

$$\mathbf{y}_v(\mathbf{u}_j) = \mathbf{O}_v \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{u}_j). \quad (l \times 1) \quad (29)$$

ここで、 $\mathbf{O}_v$ は、 $(l \times n)$ の速度出力影響行列である。同様に、加速度計測の場合には、

$$\mathbf{y}_a(\mathbf{u}_j) = \mathbf{O}_a \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{u}_j). \quad (l \times 1) \quad (30)$$

ここで、 $\mathbf{O}_a$ は、 $(l \times n)$ の加速度出力影響行列である。その他、歪計測の場合には、歪と変位の関係から適切な変換を行い、変位などを推定する。式 (28), (29), (30) で表した時間領域における各出力信号を N 点離散フーリエ変換し、周波数領域に変換すると、

$$\mathbf{Y}_d(\mathbf{u}_j, k) = \mathbf{O}_d \mathbf{X}(\mathbf{u}_j, k), \quad (31)$$

$$\mathbf{Y}_v(\mathbf{u}_j, k) = s_j(k) \mathbf{O}_v \mathbf{X}(\mathbf{u}_j, k), \quad (32)$$

$$\mathbf{Y}_a(\mathbf{u}_j, k) = s_j^2(k) \mathbf{O}_a \mathbf{X}(\mathbf{u}_j, k). \quad (33)$$

となる。ここで、 $k = 1, 2, \dots, N$ である。これらの方程式から、右辺の $\mathbf{X}(\mathbf{u}_j, k)$ が一意に定まるためには、

$$\text{rank}(\mathbf{O}_d) = \text{rank}(\mathbf{O}_v) = \text{rank}(\mathbf{O}_a) = n, \quad (34)$$

が必要になる。したがって必然的に、 $l \geq n$ でなければならない。また、上記の条件が、制御入力、 $\mathbf{u}$ の変化に依存せず満足されることが必要である。以上から、自己同定における可観測性を満足する適応構造システムの条件は以下のようにまとめられる。

- 制御入力とは無関係に、同定対象の離散点に対応する位置において、変位、速度、加速度の少なくとも一つの計測を可能とする出力影響行列が存在し、その出力影響行列がフルランクであるシステム。これを満たす基本的な例としては、出力影響行列が $(n \times n)$ 単位行列であるときである。

Fig. 1 Variable stiffness and variable mass systems

4. 数 値 例

本節では、特性の異なる可変構造パラメータを有する二つの質点系を用いて、まず前節において導出した可自己同定条件の成立・不成立の具体例を示す。次いで、特性行列が不明な場合に自己同定可能性を評価するための簡易な実験的評価法について説明する。

図 1 (a) は、可変バネ定数 k_v が制御可能である可変剛性システム、図 1 (b) は、可変質量 m_{v1}, m_{v2} が制御可能である可変慣性システムである。各システムに対し、式 (19) に対応する j 番目の制御入力を以下のように定義する。

$$(a): \mathbf{u}_j = k_{vj}, \quad (35)$$

$$(b): \mathbf{u}_j = \{m_{v1j}, m_{v2j}\}^T. \quad (36)$$

ただし、(a) における制御入力はスカラーである。

4.1 可自己同定条件の成立・不成立 可自己同定条件を表す式 (25), (26) を用いて、図 1 に示した数値モデルの自己同定条件の成立を調べる。本節では、固有特性の可制御性条件についてのみ具体的に示し、式 (34) の可観測性条件の成立については、満足されることを前提として議論する。

図 1 の両質点系のパラメータは、 $m_1 = m_2 = 1$ 、バネ定数は、 $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ とする。このとき図 1 (a) の質点系の運動方程式は、次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{vj} & -k_{vj} \\ -k_{vj} & k_{vj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}. \quad (37)$$

一方、図 1 (b) の系の運動方程式は次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{v1j} & 0 \\ 0 & m_{v2j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}. \quad (38)$$

なお、固有値解析を行うため外力は作用しないものとする。

図 1 (a) のシステムの運動方程式 (37) の固有値問題は次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} 2+k_{vj}+s_{i,j}^2 & -(1+k_{vj}) \\ -(1+k_{vj}) & 2+k_{vj}+s_{i,j}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{i,j,1} \\ X_{i,j,2} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (39)$$

また、式 (39) の固有値、固有ベクトルは次式の固有方程式から得られる。

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2+k_{vj}+s_{i,j}^2 & -(1+k_{vj}) \\ -(1+k_{vj}) & 2+k_{vj}+s_{i,j}^2 \end{bmatrix} \right) = 0 \\ \Rightarrow s_{1,j} = i, s_{2,j} = \sqrt{2k_{vj}+3}i. \quad (40)$$

ここで、 i は虚数単位を表す。従って、1 次、2 次各モードの固有値の感度は、以下のように表せる。

$$\left. \frac{\partial s_{1,j}}{\partial k_v} \right|_{k_v=k_{v1}} = 0, \quad (41)$$

$$\left. \frac{\partial s_{2,j}}{\partial k_v} \right|_{k_v=k_{v1}} = \frac{i}{\sqrt{2k_{v1}+3}}. \quad (42)$$

よって、式 (25) により満足される固有値の可制御性は、1 次モードでは不成立、2 次モードでは成立であることが示される。

続いて、固有ベクトルの可制御性を検討する。式 (39) の固有ベクトル $\mathbf{X}_{i,j}$ の感度は、二つのベクトル成分の比の感度と等価であると考えることができる。よって、固有ベクトルの 2 成分の比が、制御入力 k_v の関数であることを固有ベクトルの可制御性が成立したことから考えて以下の考察を行う。従って、各モードの固有ベクトルは、次式で表す。

$$\mathbf{X}_{1,j} = \frac{X_{1,j,1}}{X_{1,j,2}} = \frac{1+k_{vj}}{2+k_{vj}+s_{1,j}^2} = 1, \quad (43)$$

$$\mathbf{X}_{2,j} = \frac{X_{2,j,1}}{X_{2,j,2}} = \frac{1+k_{vj}}{2+k_{vj}+s_{2,j}^2} = -1. \quad (44)$$

式 (43), (44) の右辺は定数であるから、固有ベクトルの感度は次式のようにゼロとなるため、式 (26) の条件は不成立となる。

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}_{1,j}}{\partial k_v} \right|_{k_v=k_{v1}} = 0, \quad (45)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}_{2,j}}{\partial k_v} \right|_{k_v=k_{v1}} = 0. \quad (46)$$

一方、図 1 (b) のシステムについても同様に判定する。式 (38) の固有値問題を表す方程式は次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} 2+s_{i,j}^2(1+m_{v1j}) & -1 \\ -1 & 2+s_{i,j}^2(1+m_{v2j}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{i,j,1} \\ X_{i,j,2} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (47)$$

Fig. 2 Sensitivity of eigen-value with respect to variable mass (see Eq. (53), (54))

また、式 (47) の固有値、固有ベクトルは、次式の固有方程式から得られる。

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2+s_{i,j}^2(1+m_{v1j}) & -1 \\ -1 & 2+s_{i,j}^2(1+m_{v2j}) \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (48)$$

式 (48) より、二つの固有値は以下のように表せる。

$$s_{1,j} = \sqrt{\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 3\alpha}}{\alpha}} i, \quad (49)$$

$$s_{2,j} = \sqrt{\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 3\alpha}}{\alpha}} i, \quad (50)$$

ここで、 α, β はそれぞれ次式で定義される。

$$\alpha = (1+m_{v1j})(1+m_{v2j}), \quad \beta = m_{v1j}+m_{v2j}+2. \quad (51)$$

従って、1 次、2 次モードの固有値の感度を表す式 (23) は、式 (49), (50) を用いて次式のように表せる。

$$\left\{ \frac{\partial s_{i,j}}{\partial m_{v1}} \frac{\partial s_{i,j}}{\partial m_{v2}} \right\}. \quad (i=1,2) \quad (52)$$

式 (52) の感度ベクトルの成分は、式 (49), (50) の右辺を m_{v1}, m_{v2} それぞれで偏微分することにより計算できる。

$$\left. \frac{\partial s_{i,j}}{\partial m_{v1}} \right|_{m_{v1}=m_{v11}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-s_{i,j}}{\delta + \gamma(2+s_{i,j}^2\delta)^2} \right\}, \quad (53)$$

$$\left. \frac{\partial s_{i,j}}{\partial m_{v2}} \right|_{m_{v2}=m_{v21}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-s_{i,j}(2+s_{i,j}^2\delta)^2}{\delta + \gamma(2+s_{i,j}^2\delta)^2} \right\}. \quad (54)$$

ここで、 $\gamma = 1+m_{v21}$, $\delta = 1+m_{v11}$ である。式 (53), (54) の右辺がゼロにならない場合には、可自己同定条件である式 (25) が満足される。ここでは、式 (53), (54) の右辺を数値的に調べた結果を示す。図 2 は、式 (53), (54) を用いて計算した、1 次、2 次固有値の制御入力 m_{v1} および m_{v2} に対する 4 通りの感度を示したものである。

Fig. 3 Sensitivity of eigen-vector with respect to variable mass (see Eq. (57), (58))

図2中、独立した線は二つしか見えないが、制御入力 m_{v1} と m_{v2} に対する感度が等しいためである(図2中、○印と◇印、*印と▽印)。図2から、制御入力によらず感度がゼロでなく、固有値の可制御性は成立していることが示された。加えて、横軸の値が増加するにつれ、感度の絶対値は徐々に減少することも示されている。

次に、固有ベクトルの可制御性について考察を行う。式(47)に対し、式(49)、(50)で得られる固有値を代入して i 次固有ベクトルの2成分の比を表すと、

$$\mathbf{X}_{i,j} = \frac{X_{i,j,1}}{X_{i,j,2}} = \frac{1}{2 + s_{i,j}^2 \delta}. \quad (55)$$

となる。式(55)より、式(24)のように表される固有ベクトルの感度ベクトルは次式で表される。

$$\left[\frac{\partial \mathbf{X}_{i,j}}{\partial m_{v1}} \quad \frac{\partial \mathbf{X}_{i,j}}{\partial m_{v2}} \right]. \quad (i=1,2) \quad (56)$$

式(56)の感度ベクトルの成分は、式(55)の右辺を m_{v1} 、 m_{v2} それぞれで偏微分し、式(53)、(54)を用いることにより次式のように計算される。

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}_{i,j}}{\partial m_{v1}} \right|_{m_{v1}=m_{v1,1}} = - \frac{s_{i,j}^2 + 2s_{i,j}\delta \frac{\partial s_{i,j}}{\partial m_{v1}}}{(2 + s_{i,j}^2 \delta)^2} \Big|_{m_{v1}=m_{v1,1}} \quad (57)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}_{i,j}}{\partial m_{v2}} \right|_{m_{v2}=m_{v2,1}} = - \frac{2s_{i,j}\delta \frac{\partial s_{i,j}}{\partial m_{v2}}}{(2 + s_{i,j}^2 \delta)^2} \Big|_{m_{v2}=m_{v2,1}} \quad (58)$$

式(57)、(58)から、右辺に含まれる固有値 $s_{i,j}$ および固有値の感度 $\frac{\partial s_{i,j}}{\partial m_{v1}}$ 等がゼロでない限り、固有ベクトル感度もゼロにならないことが示される。

次に、固有ベクトルの感度の大きさを制御入力の変数として調べた結果を示す。図3は、式(57)、(58)を用いて計算した、1次、2次固有ベクトルの制御入力 m_{v1} および m_{v2} に対する4通りの感度を示したものである。図3の横軸は制御入力 $m_{v1}(=m_{v2})$ の値である。図3から、図2に示した固有値の感度と同様に、感度の絶対値

は制御入力に対して単調減少の傾向があることが示された。

また、図3において、○印と◇印のように、 m_{v1} と m_{v2} それぞれに対する感度は、互いに絶対値が等しく異符号の関係であり、 m_{v1} 、 m_{v2} に等しい制御入力変化量を与えた場合、各制御入力による固有ベクトル変化量は互いに相殺され、制御入力の存在条件が成立しなくなる。

以上の考察から、図1(a)および(b)の各質点系における可自己同定条件の成立性が明らかになった。このように、適応構造システムの理論モデルを用いて、可変構造パラメータに対する固有特性の感度解析を行い、可自己同定条件の成立性について評価することができると考えられる。また同時に、固有値・固有ベクトルの感度の大きさや観測精度を考慮して制御入力を決するなどの応用に利用できると考えられる。

4.2 特性行列が不明な場合の可自己同定条件 特性行列が不明であり、式(25)、(26)による判定が直接行えない場合に対する自己同定条件の評価法について述べる。式(11)で定義した一般化制御ベクトルによる評価を行う。例えば、式(37)の場合には k_v 、また、式(38)の場合には m_{v1} 、 m_{v2} を制御入力と考え、制御入力変化時 ($j=1$ から $j \neq 1$) における一般化制御ベクトルを構成し、 $j=1$ の固有ベクトルとの独立性を確認する。

図1(a)において、 k_v の初期値がゼロ ($k_{v1}=0$) である場合を仮定し、式(37)、(38)の右辺がゼロである場合の固有値問題より、2つの振動モードが求まる。これらを実験により正しく推定したと仮定し、1次、2次固有ベクトル推定値を $\tilde{\mathbf{X}}_{1,1} = \{1, 1\}^T$ 、 $\tilde{\mathbf{X}}_{2,1} = \{1, -1\}^T$ とそれぞれ表す。これらから、式(11)のような一般化制御ベクトルは、次式のように計算できる。

$$\begin{aligned} -\tilde{\mathbf{T}}_{1,1}(\mathbf{u}_j) &= -\mathbf{K}_v(\mathbf{u}_j)\tilde{\mathbf{X}}_{1,1} \\ &= \begin{bmatrix} -k_{vj} & k_{vj} \\ k_{vj} & -k_{vj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{\mathbf{T}}_{2,1}(\mathbf{u}_j) &= -\mathbf{K}_v(\mathbf{u}_j)\tilde{\mathbf{X}}_{2,1} \\ &= \begin{bmatrix} -k_{vj} & k_{vj} \\ k_{vj} & -k_{vj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2k_{vj} \\ 2k_{vj} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (60)$$

同様に、図1(b)の系についても以下のように表せる。

$$\begin{aligned} -\tilde{\mathbf{T}}_{1,1}(\mathbf{u}_j) &= \tilde{s}_{1,1}^2 \mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)\tilde{\mathbf{X}}_{1,1} \\ &= \tilde{s}_{1,1}^2 \begin{bmatrix} m_{v1j} & 0 \\ 0 & m_{v2j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{s}_{1,1}^2 m_{v1j} \\ \tilde{s}_{1,1}^2 m_{v2j} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{\mathbf{T}}_{2,1}(\mathbf{u}_j) &= -\tilde{s}_{2,1}^2 \mathbf{M}_v(\mathbf{u}_j)\tilde{\mathbf{X}}_{2,1} \\ &= -\tilde{s}_{2,1}^2 \begin{bmatrix} m_{v1j} & 0 \\ 0 & m_{v2j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tilde{s}_{2,1}^2 m_{v1j} \\ \tilde{s}_{2,1}^2 m_{v2j} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (62)$$

ここで, $\delta_{1,1}, \delta_{2,1}$ はそれぞれ, $m_{v11} = m_{v21} = 0$ における, 1次, 2次固有値の推定値を表す。

式(59), (60)から, 図1(a)では, 一般化制御ベクトルが $j=1$ のときの固有ベクトル推定値 $\tilde{\mathbf{x}}_{2,1}$ と線形従属となる。また, 式(61), (62)から, 図1(b)では, $m_{v1} \neq m_{v2}$ のときには, 固有ベクトル $\tilde{\mathbf{x}}_{1,1}, \tilde{\mathbf{x}}_{2,1}$ と線形独立な一般化制御ベクトルとなる。

以上から, 特性行列を用いない実験的手法により得られた可制御性の成立性と, 前述の可自己同定条件式に基づく結果に一致が見られた。ただし, 実験的に計測した固有値, 固有ベクトル, また既知と仮定している可変構造行列のモデル化誤差などが存在するため, 判定においては観測誤差を低減し, また可変構造行列のモデル化精度を出来るだけ高めることが重要である。

一方, 固有特性の可観測性については, 明らかに両質点に一個ずつ加速度, 速度, 変位の何れかを計測可能なセンサを配置し, これらにより制御入力変化に対し無関係に計測可能であることで満足される。ただし, 実際には観測誤差や非線形性等を十分に考慮した振動試験等を行う必要がある。

なお, 本論文では可自己同定条件の導出において減衰項を含む定式化を行った。減衰の存在する場合の適用例が十分でないが, 比例粘性減衰の場合, 複素固有値と実固有ベクトルから表現できるので, 本研究と同様の評価を行うことができる。一方, 非比例粘性減衰の場合, 複素固有ベクトルから実固有ベクトルを推定する手法⁽¹⁴⁾を用いた検討が可能であると考えられる。

5. 結 論

本研究では, 適応構造システムの可変構造パラメータを用いた自己同定を可能とするための一般的条件を, 主に感度解析を用いて導出した。まず, 自己同定原理について説明し, また一般化制御ベクトル, 固有値・固有ベクトルの可制御性, 可観測性等をそれぞれ導入した。次に, 固有値・固有ベクトルの可変構造パラメータに対する感度解析に基づき, 導入した可制御性・可観測性条件を満足する等価な感度の条件を導出し, これらを可自己同定条件とした。

数値例において, 可変剛性システム及び可変慣性システムとみなせる質点系を用いて, 導出した可自己同定条件の適用例および条件の成立・不成立の具体例を示した。また, 特性行列が不明であり, 理論的に感度解析を行うことのできない場合に対して, 一般化制御ベクトルを用いた簡易な実験の評価法を検討した。その結果, 特性行列による感度解析が行える場合と, 一般化制御ベクトルを用いた場合の可自己同定条件の成立性

は一致し, 可自己同定条件の妥当性が明らかになった。

今後の課題として, 可自己同定条件を満足する可変デバイスおよびセンサ配置法の確立, ならびに非比例粘性減衰系における自己同定条件の導出等が挙げられる。

文 献

- (1) Friswell, M.I., Mottershead, J.E., *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, (1995), Kluwer Academic Publishers.
- (2) Ricles, J.M., Kosmatka, J.B., Damage Detection in Elastic Structures Using Vibratory Residual Forces and Weighted Sensitivity, *AIAA Journal*, Vol.30, No.9(1992), pp.2310-2316.
- (3) Kabe, A.M., Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data, *AIAA Journal*, Vol.23, No.9(1985), pp.1431-1436.
- (4) Okuma, M. et al., Development of The Experimental Spatial Matrix Identification Method (Theory and Basic Verification With A Frame Structure), *Journal of Sound and Vibration*, Vol.219, No.1(1999), pp.5-22.
- (5) Nalittlela, N.G. et al., A Mass or Stiffness Addition Technique for Structural Parameter Updating, *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol.7(1992), pp.157-168.
- (6) Cha, P.D., Gu, W., Model Updating Using an Incomplete Set of Experimental Modes, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.234(2000), pp.587-600.
- (7) Senba, A., Furuya, H., Identifiability and Limitation of Self-Identification of Adaptive Structures by Variable Matrices Method, *Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol.52, No.609(2004), pp.479-486. (in Japanese)
- (8) Onoda, J. et al., Vibration Suppression by Variable-stiffness Members, *AIAA Journal*, Vol. 29, No.6(1991), pp.977-983.
- (9) Carlson, J.D. et al., Commercial Magneto-rheological Fluid Devices, *International Journal of Modern Physics B*, Vol.10, No.23,24(1996), pp.2857-2865.
- (10) Furuya, H., Kobori, A., Suppression of Multiple Modes Vibration of Flexible Structures with Adaptive Gyroscopic Damper System, 10th Int. Conf. on Adaptive Structures and Technologies, Technomic Publishing, (1999), pp.127-134.
- (11) Miura, K. et al., Variable Geometry Truss and Its Application to Deployable Truss and Space Crane Arm, *Acta Astronautica*, Vol.12, No.7/8(1985), pp.599-607.
- (12) Senba, A., Furuya, H., Self-identification of Two-Dimensional Adaptive Structures with Variable Geometric Parameters, *Space Technology Japan, The Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol.5(2006), pp.1-7. (in Japanese)
- (13) Yamakawa, H. et al., Optimum Designs of Structures in Dynamic Response: 2nd Report, Optimum Design Method II, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.48, No.435(1991), pp.1750-1758.
- (14) Minas, C., Inman, D.J., Identification of a Nonproportional Damping Matrix from Incomplete Modal Information, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.113(1991), pp.219-224.