区分モード合成法による振動音響連成系の固有値解析*

古屋 耕平^{*1}, 吉村 卓也^{*2}

Component Mode Synthesis (CMS) for Vibro-Acoustic System

Kohei FURUYA^{*3} and Takuya YOSHIMURA^{*3} Graduate School of Engineering, Tokyo Metropolitan University,
1-1 Minamiosawa, Hachioji-shi, Tokyo, 192-0397 Japan

In Vibro-Acoustic System, [I] complex eigenvalue analysis and [II] CMS (unconstrained mode, without residual) are widely used for eigenvalue analysis. The method [I] needs huge computer resources, but it can obtain the exact eigen value and vector. In the opposite, the method [II] needs fewer resources, but accuracy of eigen-vector is not acceptable in some cases. To improve the accuracy, [III] CMS (unconstrained mode, with residual) can be used. But the method [III] deteriorates the advantage of the method [II], because physical degrees need to be remained in the equation of motion. In this paper, [IV] novel CMS method, based on unconstrained mode and residual mode, is proposed. The required computer resource is less than the methods [III], because the equation of motion is described on the modal coordinates. And the accuracy is better than the method [II]. In this paper, applying the methods [I][II] and the proposed method [IV] to finite element models, it is shown that the proposed method is one of the effective methods for the eigenvalue analysis of Vibro-Acoustic System.

Key Words: Component Mode Synthesis, Sound and Acoustic, Coupled Vibration, Eigenvalue Analysis, Modal Analysis, Finite Element Method

1. 緒 言

自動車室内の騒音は、自動車を評価する一つの基準として使用者に認識されるようになり、厳しい設計目標が設定されている。さらに開発期間の短縮、開発コスト低減などの要求から CAE(Computer Aided Engineering)、特に低周波騒音を対象とした場合、有限要素法(FEM)による振動騒音特性の予測が重要な役割を果たしている。

FEM による車室内(閉空間)の振動騒音特性の予測では、一般に振動音響連成解析が行われる。そして萩原⁽¹⁾らが示した振動音響連成系(以下、連成系)の固有ベクトルの直交性に基づいたモード解析が、現象理解のための有効なツールとして利用されている。

連成系の特性方程式は非対称行列で構成されているが、計算過程を簡単にするために特性方程式を対称化し固有値解析を行うことが多い。その一つの方法として複素固有値解析⁽²⁾(以下、方法[I])が知られている。方法[I]により連成系の厳密な固有値、固有ベクトルを計算可能であるが計算負荷は大きい。文献(2)には同自由度の対称行列の固有値問題と比較して2倍から5倍の計算負荷になることが記述されている。

一方で計算負荷を低減させるために、連成系固有ベクトルの構造系成分(変位)と音響系成分(音圧)を、構造系、音響系単体(非連成系)の固有ベクトルの重ね合わせで表し、自由度を低減する不拘束モード合成法(以下、方法[II])が提案されている⁽³⁾。方法[II]により計算負荷は大幅に低減されるが、精度の良い結果を得るために多くの固有ベクトルを採用しなければならない場合がある。

このような採用固有ベクトルの増加を抑えるために剰余剛性を考慮した拘束モード合成法⁽⁴⁾⁽⁵⁾が提案されている。しかし、特性方程式に物理座標の自由度が残り、方法[II]と比較して計算負荷が大きいことが問題として残る。

以上の背景を踏まえ、本論文では剰余剛性を考慮した不拘束モード合成法(以下、方法[III])を検討する。方法[III]の一般構造物への適用は従来から行われており⁽⁶⁾、特性方程式の自由度を採用した固有ベクトルの数まで低減することができる。方法[III]は物体内での内力の釣り合いに基礎をおいている。しかし、振動音響連成系では、変位と音圧という異なる物理量を扱うため内力の釣り合い式は成立せず、従来からの式展開を適用すると運動方程式に物理座標が残る。よって本論文では内力を固有ベクトルの重ね合わせで近似し、特性方程式をモード座標で表す不拘束モード合

* 原稿受付 2007年2月5日。

^{*1} 正員、東京都立大学大学院工学研究科(〒192-0397 八王子市南大沢1-1)。^{*2} 正員、首都大学東京都市教養学部(〒192-0397 八王子市南大沢1-1)。

E-mail: furuya-kouhei@c.metro-u.ac.jp

成法を提案する(以下, 方法[IV]). 方法[IV]で得られる特性方程式の自由度は方法[II]の2倍程度に抑えられ, 解の精度も改善される.

本論文では方法[I], [II], [III]の特徴について記述し, 提案する方法[IV]を展開する. そして有限要素モデルへ方法[I], [II], [IV]を適用し, 提案法が計算精度, 計算負荷の点で有用であることを示す.

主な記号

C : 連成行列	D : 減衰行列
f : 力ベクトル	h : 採用剰余モード数
K : 剛性行列	ℓ : 採用モード数
M : 質量行列	N : 自由度
R : 剰余モード行列	T : 座標変換行列
x, X : 非連成系固有ベクトル, 及び行列	
Z : 剰余コンプライアンス行列	
α : 内部自由度	β : 境界自由度
ϕ : 連成系固有ベクトル	η : 剰余モード寄与ベクトル
λ : 固有値	Θ : 座標変換行列
v : 速度ポテンシャル	ω_c : 剰余計算周波数
ξ : モード寄与ベクトル	
$(\cdot)_A$: 音響系成分	$(\cdot)_S$: 構造系成分
$(\cdot)^T$: 転置	$(\cdot)^{-1}$: 逆行列

2. 従来法の概要

2・1 複素固有値解析⁽²⁾ 特性方程式を対称化し, 固有値解析を行う複素固有値解析について記述する. 振動音響連成系の特性方程式は次式で表される.

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] \begin{Bmatrix} \phi_S \\ \phi_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{M}_A \end{bmatrix}$$

ここで速度ポテンシャル v を次式とおく.

$$\phi_A = \dot{v} = j\sqrt{\lambda}v \quad (2)$$

式(2)を式(1)へ代入し整理すると, 次式のような対称行列の特性方程式を得る.

$$[\tilde{\mathbf{K}} + j\sqrt{\lambda}\tilde{\mathbf{D}} - \lambda\tilde{\mathbf{M}}]\{\mathbf{y}\} = \{0\} \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_A \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}_A \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{y}\} \equiv \begin{Bmatrix} \phi_S \\ v \end{Bmatrix}$$

式(3)の固有値解析を行うことで式(1)の厳密な固有値(実数), 固有ベクトル(実数)を得ることができるが, 計算負荷は大きい.

2・2 剰余剛性を考慮しない不拘束モード合成法⁽³⁾

剰余剛性を考慮しない不拘束モード合成法による自由度低減の流れと特徴を記述する. 連成系固有ベクトルの構造系成分 ϕ_S (変位), 音響系成分 ϕ_A (音圧) を構造系, 音響系単体(非連成状態)の固有ベクトルの重ね合わせで表現できると仮定する.

$$\begin{Bmatrix} \phi_S \\ \phi_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_S \\ \xi_A \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}]\{\xi\} \quad (4)$$

$$\mathbf{X}_S = [\mathbf{x}_{S,1} \cdots \mathbf{x}_{S,\ell_S}], \quad \mathbf{X}_A = [\mathbf{x}_{A,1} \cdots \mathbf{x}_{A,\ell_A}]$$

ここで $\mathbf{X}_S$ は採用した構造系の1次から ℓ_S 次までの固有ベクトルの行列, $\mathbf{X}_A$ は採用した音響系の1次から ℓ_A 次までの固有ベクトルの行列を表す. $\mathbf{X}_S, \mathbf{X}_A$ の第 r 列 $\mathbf{x}_{S,r}, \mathbf{x}_{A,r}$ は r 次の固有ベクトルを表す.

$$[\mathbf{K}_S - \lambda_{S,r} \mathbf{M}_S] \{\mathbf{x}_{S,r}\} = \{0\} \quad (5.a)$$

$$[\mathbf{K}_A - \lambda_{A,r} \mathbf{M}_A] \{\mathbf{x}_{A,r}\} = \{0\} \quad (5.b)$$

式(4)を式(1)へ代入し, 左から $[\mathbf{T}]^T$ を乗じると次式のモード座標上の特性方程式が得られる.

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{k}_S & -\mathbf{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_A \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{m}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T & \mathbf{m}_A \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \xi_S \\ \xi_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{k}_S = \mathbf{X}_S^T \mathbf{K}_S \mathbf{X}_S, \quad \mathbf{m}_S = \mathbf{X}_S^T \mathbf{M}_S \mathbf{X}_S, \quad \mathbf{c} = \mathbf{X}_S^T \mathbf{C} \mathbf{X}_A$$

$$\mathbf{k}_A = \mathbf{X}_A^T \mathbf{K}_A \mathbf{X}_A, \quad \mathbf{m}_A = \mathbf{X}_A^T \mathbf{M}_A \mathbf{X}_A$$

式(6)は依然として非対称であるが, 自由度は採用する非連成系の固有ベクトルの数 $\ell_S + \ell_A$ まで低減され, 固有値解析が容易に実行できる. 式(6)で得られた固有値は連成系固有値の近似を表し, ξ_S, ξ_A を式(4)へ代入することで連成系固有ベクトルの近似が得られる.

本手法の注意点は式(4)の仮定によって生じる計算誤差である. ここで式(1)を各行で展開し整理すると

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_S - \lambda \mathbf{M}_S] \{\phi_S\} &= \{\mathbf{f}_S\} \\ [\mathbf{K}_A - \lambda \mathbf{M}_A] \{\phi_A\} &= \{\mathbf{f}_A\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_S &= [\mathbf{C}] \{\phi_A\} \\ \mathbf{f}_A &= \lambda [\mathbf{C}]^T \{\phi_S\} \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbf{f}_S$ は振動音響連成の際に構造系が音響系から受ける力, $\mathbf{f}_A$ は音響系が構造系から受ける力(体積加速度)を表す.

式(5)および式(7)からわかるように, 不拘束モード合成法では ϕ_S を音響系からの力 $\mathbf{f}_S$ を受けない状態の固有ベクトル $\mathbf{X}_S$ の重ね合わせで表現している. 同様に ϕ_A を構造系からの体積加速度 $\mathbf{f}_A$ を受けない状態, すなわち剛壁に囲まれた状態の固有ベクトル $\mathbf{X}_A$ (以下, 定在波モード)の重ね合わせで表現している. よって ϕ_S, ϕ_A が $\mathbf{X}_S, \mathbf{X}_A$ で表現できないような変形を生じている場合に計算誤差が大きくなる.

特に ϕ_A の成分のうち構造系と接している音響系節点や、その周辺に位置する音響系節点で計算誤差が顕著にあらわれる。これは構造系の振動によって発生する局所的な音圧分布(例えば、放射状の音圧分布)が、少数の定在波モードの重ね合わせでは表現できないためである。このため精度の良い結果を得るためには一般に多くの固有ベクトルを採用しなければならない。

2・3 剰余剛性を考慮した不拘束モード合成法

採用固有ベクトルの増加を抑えるために、従来からの剰余剛性を考慮した不拘束モード合成法⁽⁶⁾を適用した際の式展開を記述する。次式のように連成系固有ベクトルの構造系成分 ϕ_s を、1次から ℓ_s 次までの非連成系固有ベクトルの行列 $\mathbf{X}_s$ と、 ℓ_s+1 次以上の固有ベクトルの影響を表す剰余コンプライアンス行列 $\mathbf{Z}_s$ (付録参照)の和で表す。

$$\begin{Bmatrix} \phi_{s,\alpha} \\ \phi_{s,\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{s,\alpha} \\ \mathbf{X}_{s,\beta} \end{Bmatrix} \xi_s + \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_{s,\alpha\alpha} & \mathbf{Z}_{s,\alpha\beta} \\ \mathbf{Z}_{s,\beta\alpha} & \mathbf{Z}_{s,\beta\beta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{s,\beta} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

β は構造系と音響系が接している境界自由度成分を表し、 α は内部自由度成分を表す。 $\mathbf{f}_{s,\beta}$ は式(8)で示された $\mathbf{f}_s$ の β 成分を表し、 α 成分は零である。音響系も同様に考え、連成系の特性方程式の縮約を行うと結果として次式の特性方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}'_s & -\mathbf{c}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}'_A \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{m}'_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}'^T & \mathbf{m}'_A \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} \xi_s \\ \xi_A \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \phi_{s,\beta} \\ \phi_{A,\beta} \end{Bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{k}'_s = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_s + \mathbf{X}_{s,\beta}^T \mathbf{Z}_{s,\beta\beta}^{-1} \mathbf{X}_{s,\beta} & -\mathbf{X}_{s,\beta}^T \mathbf{Z}_{s,\beta\beta}^{-1} \\ -\mathbf{Z}_{s,\beta\beta}^{-1} \mathbf{X}_{s,\beta} & \mathbf{Z}_{s,\beta\beta}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}'_s = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{k}'_A$, $\mathbf{m}'_A$ も同様の形式で表される。 $\mathbf{C}_{\beta\beta}$ は連成行列 $\mathbf{C}$ の β 成分に対応した成分である。式(10)の $\phi_{s,\beta}$, $\phi_{A,\beta}$ に対応した行を展開すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{s,\beta\beta}^{-1} & -\mathbf{C}_{\beta\beta} \\ -\lambda \mathbf{C}_{\beta\beta}^T & \mathbf{Z}_{A,\beta\beta}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{s,\beta} \\ \phi_{A,\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{Z}_{s,\beta\beta}^{-1} \mathbf{X}_{s,\beta}] \xi_s \\ [\mathbf{Z}_{A,\beta\beta}^{-1} \mathbf{X}_{A,\beta}] \xi_A \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式(11)の左辺第二行に未知数 λ が含まれているため、式(11)を $\phi_{s,\beta}$, $\phi_{A,\beta}$ について解くことができず、特性方程式に物理座標が残ってしまう。そのため剰余剛性を考慮することで計算精度は改善されるが、計算負荷は剰余剛性を考慮しない場合と比較して大きくなる。

3. 提案する不拘束モード合成法

3・1 展開 内力を固有ベクトルの重ね合わせで近似し、特性方程式をモード座標で表す方法を提案する。連成系固有ベクトル ϕ を、非連成系の固有ベクトル $\mathbf{X}$ と剰余コンプライアンス行列 $\mathbf{Z}$ で次式のように表す。

$$\begin{aligned} \{\phi_s\} &= [\mathbf{X}_s] \xi_s + [\mathbf{Z}_s] \mathbf{f}_s \\ \{\phi_A\} &= [\mathbf{X}_A] \xi_A + [\mathbf{Z}_A] \mathbf{f}_A \end{aligned} \quad (12)$$

さらに各系へ作用する力 $\mathbf{f}$ を $\mathbf{X}_s$, $\mathbf{X}_A$ の重ね合わせで表現できると仮定すると、式(8)より

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s &\equiv [\mathbf{C}] [\mathbf{X}'_A] \eta_s \\ \mathbf{f}_A &\equiv [\mathbf{C}]^T [\mathbf{X}'_s] \eta_A \end{aligned} \quad (13)$$

$\mathbf{X}'_s$ は採用次数を1次から h_A 次とした構造系単体の固有ベクトルを表す(添え字は以降の展開のためにAとする)。同様に $\mathbf{X}'_A$ は1次から h_s 次までの音響系単体の固有ベクトルである。また η は $\mathbf{f}$ に対するモード寄与ベクトルを表す。式(13)を式(12)へ代入すると

$$\begin{aligned} \{\phi_s\} &= [\mathbf{X}_s] \xi_s + [\mathbf{R}_s] \eta_s \\ \{\phi_A\} &= [\mathbf{X}_A] \xi_A + [\mathbf{R}_A] \eta_A \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{R}_s = [\mathbf{Z}_s] [\mathbf{C}] [\mathbf{X}'_A], \quad \mathbf{R}_A = [\mathbf{Z}_A] [\mathbf{C}]^T [\mathbf{X}'_s]$$

$\mathbf{R}_s$ は構造系 $\sim[\mathbf{C}] [\mathbf{X}'_A]$ の力が作用したときの剰余剛性の変形形状を表す。本論文では $\mathbf{R}$ を剰余モード行列、 $\mathbf{R}$ の各列を剰余モードと呼ぶ。 h_s は剰余モードの採用数を表し、 η_s は剰余モードの ϕ_s への寄与を表している。 $\mathbf{R}_A$, h_A , η_A も同様の意味を持つ。

式(14)において ξ , η が一意に決定されるためには、 $\mathbf{X}_s$ と $\mathbf{R}_s$ の各列、 $\mathbf{X}_A$ と $\mathbf{R}_A$ の各列が線形独立でなければならない。よって自由度の観点から $\ell_s + h_s \leq N_s$ (構造系自由度)、 $\ell_A + h_A \leq N_A$ (音響系自由度)を満足する必要がある。またそれらの条件を満たした場合であっても、 $\mathbf{R}$ の各列が線形従属になる場合があり、独立な成分を取り出さなければならない。この方法については次節以降で論じる。以下では $\mathbf{X}_s$ と $\mathbf{R}_s$ の各列、 $\mathbf{X}_A$ と $\mathbf{R}_A$ の各列が線形独立であると仮定し議論する。式(14)を整理すると

$$\begin{Bmatrix} \phi_s \\ \phi_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_s & \mathbf{0} & \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_A & \mathbf{0} & \mathbf{R}_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_s \\ \xi_A \\ \eta_s \\ \eta_A \end{Bmatrix} = [\Theta] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式(15)を式(1)へ代入し、左から $[\Theta]^T$ を乗じると自由度 $\ell_s + \ell_A + h_s + h_A$ の特性方程式が得られる。

$$[\tilde{\mathbf{k}} - \lambda \tilde{\mathbf{m}}] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = [\Theta]^T [\mathbf{K}] [\Theta], \quad \tilde{\mathbf{m}} = [\Theta]^T [\mathbf{M}] [\Theta]$$

式(16)の特性行列は密行列に近くなるが、自由度が小さいため容易に解くことができる。

3・2 剰余モードの採用数に対する制約 剰余モードの採用数 h の制約について考える。連成行列 $\mathbf{C}$ は $\mathbf{C}_{\beta\beta}$ 以外の成分が零の行列であるから、各系へ作用する力 $\mathbf{f}$ は、構造系と音響系が接した境界自由度成分 β のみ非零となる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{s,\alpha} \\ \mathbf{f}_{s,\beta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] \begin{Bmatrix} \phi_{\alpha} \\ \phi_{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\beta\beta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{\alpha} \\ \phi_{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\beta\beta} \phi_{\beta} \end{Bmatrix} \quad (17.a)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\alpha} \\ \mathbf{f}_{\beta} \end{Bmatrix} = \lambda [\mathbf{C}]^T \begin{Bmatrix} \phi_{\alpha} \\ \phi_{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda \mathbf{C}_{\beta\beta}^T \phi_{\beta} \end{Bmatrix} \quad (17.b)$$

よって $\mathbf{f}_s$ の自由度は構造系の境界自由度 $N_{s,\beta}$ で表される。 $\mathbf{f}_s$ の近似式(13)の自由度は h_s であるから、 $h_s \leq N_{s,\beta}$ を満足しなければならない。音響系も同様に、 $h_A \leq N_{A,\beta}$ (音響系境界自由度)を満足しなければならない。

3・3 モード寄与 ξ , η の差異 提案法では境界面に作用する力 $\mathbf{f}$ を非連成状態の固有ベクトルの重ね合わせで表現し、その寄与を新たな未知変数 η とおいた。式(8)の定義から考えると物理的には次式の従属関係が成立する。

$$\xi_A = \eta_s, \quad \lambda \xi_s = \eta_A \quad (18)$$

しかし、近似という観点ではこれらを独立に扱うことで精度が向上する。これは ξ が全系の ϕ を近似するのに対して、 η は境界面における力 $\mathbf{f}$ のみを近似するため、 $\mathbf{f}$ の精度が改善され、結果として ϕ の精度も改善されるからである。

3・4 剰余モードの線形独立成分 採用した非連成系の固有ベクトル $\mathbf{X}_s$ と線形独立な剰余モードの列を $\mathbf{R}_s$ から取り出す方法について考える。剰余コンプライアンス行列 $\mathbf{Z}_s$ は、式(A.3)で定義され、 $r=1, \dots, \ell_s$ 次までの固有ベクトル成分を含まない。よって $\mathbf{R}_s$ の列の中で線形独立な列は、 $\mathbf{X}_s$ の各列と線形独立となる。

線形独立な $\mathbf{R}_s$ の列を取り出す簡易的な方法は、次式のように $\mathbf{R}_s^T$ と $\mathbf{R}_s$ の積を LU 分解して得られる行列 $\mathbf{U}$ の非零対角成分を調べることである。

$$[\mathbf{L}][\mathbf{U}] = [\mathbf{R}_s]^T [\mathbf{R}_s] \quad (19)$$

$[\mathbf{R}_s]^T [\mathbf{R}_s]$ は $h_s \times h_s$ の行列であるから LU 分解が容易に実行できる。以上の議論は音響系成分についても同様に成立する。

3・5 提案法のまとめ 提案する不拘束モード合成法の特徴を以下にまとめる。

- ①. 構造系、音響系へ作用する力を、構造系、音響系単体の固有ベクトルで近似する。
- ②. ①の結果から連成系固有ベクトルを構造系、音響系の固有ベクトルと剰余モードで近似する。
- ③. 縮約された特性方程式の自由度は採用した固有ベクトルと剰余モードの数($\ell_s + \ell_A + h_s + h_A$)となる。提案法を適用するための制約は以下である。
- ④. $\ell_s + h_s \leq N_s$ (構造系自由度), $\ell_A + h_A \leq N_A$ (音響系自由度)
- ⑤. $h_s \leq N_{s,\beta}$ (構造系境界自由度), $h_A \leq N_{A,\beta}$ (音響系境界自由度)
- ⑥. $\mathbf{X}_s$ と $\mathbf{R}_s$ の各列, $\mathbf{X}_A$ と $\mathbf{R}_A$ の各列は線形独立。
- ⑦. 剰余コンプライアンス行列 $\mathbf{Z}$ の精度を保障するため、求める連成系固有値 λ は $\lambda \leq \lambda_{s,\ell_s}$, λ_{A,ℓ_A} であること(付録参照)。 λ_{s,ℓ_s} , λ_{A,ℓ_A} は ℓ_s 次, ℓ_A 次の構造系、音響系単体の固有値を表す。

4. 提案法の検証 1

4・1 対象有限要素モデル [I]複素固有値解析, [II]剰余無し不拘束モード合成法, [IV]提案する不拘束モード合成法を有限要素モデルへ適用し、精度と計算負荷について検証を行う。

図 1 に対象とする有限要素モデルを示す。対象モデルは板が音響空間の底面と連成しており、板の四辺は完全拘束されている。また板と接していない音響空間の面は剛壁と接している。本章では従来法との比較検証を容易にするため、構造系の剰余剛性が無視できるよう板厚を 20mm とした。20mm の板の場合、連成系固有ベクトルの構造系成分 ϕ_s は少数の構造系単体の固有ベクトル $\mathbf{X}_s$ で十分に表現できる。よって[II][IV]の方法において構造系採用固有ベクトル数を $\ell_s=10$ とした。また対象モデルの材料定数、自由度を表 1 にまとめる。

以下では、MSC/Nastran を利用し方法[I]の解析を行う。その際に特性行列 $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ を出力させ、その行列を数値計算ソフトウェア MATLAB で作成した方法[II][IV]で解析する。計算機は CPU Pentium 4 3.2GHz, Memory 2.0GB, Windows PC を利用した。

Table 1 Properties of FE model

Total DOF $N = N_S + N_A$	9295
Properties of Structure	
Young's modulus	207[GPa]
Density	$7.90 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$
Poisson's ratio	0.30
Thickness of shell	0.020 [m]
DOF N_S	2070
Properties of Acoustics	
Sound velocity	343.0 [m/s]
Density of air	$1.21 [\text{kg/m}^3]$
DOF N_A	7225

Fig. 1 Objective FE model

 Fig. 2 Structural Deformation of 2nd Coupled Mode, by [I]Complex Eigenvalue Analysis

 Fig. 3 Sound Pressure Distribution of 2nd Coupled Mode, by [I]Complex Eigenvalue Analysis

Nastran と MATLAB を併用した理由は、計算負荷が大きいため物理座標での複素固有値解析が MATLAB 上で行えなかったためである。

4・2 [I]複素固有値解析の結果 複素固有値解析で得られた連成2次(連成1次は0Hzの音響系定在波が主体のモード)、固有振動数 $f=69.37[\text{Hz}]$ の固有ベクトルの構造系成分を図2、音響系成分を図3に示す。図2から構造系が膜振動している様子がわかる。図3は最大値で正規化された音圧分布を示しており、図中の“+”、“-”は、その周辺の音圧の符号を表す。図3上は $y=0.7[\text{m}]$ の xz 面音圧分布、図3下は構造系と接している $z=0.0[\text{m}]$ の xy 面音圧分布を示している。図3が示すように構造系に近い下部節点($z<0.6[\text{m}]$)で放射状の音圧分布がみられ、また上部節点($z>0.6[\text{m}]$)では、音圧が一様に高いレベルで分布している様子がわかる。

4・3 [II]剰余無し不拘束モード合成法の結果

剰余剛性を考慮しない不拘束モード合成法で得られた結果を示す。図4は音響系の採用固有ベクトルを $\ell_A=10$ から400まで変化させ得られた連成2次の固有ベクトルと、方法[I]で得られた固有ベクトル間の相関を示している。添え字は対象とした成分を表す。例として音響系の境界自由度 β の相関 $r_{A,\beta}$ は次式で表される。

$$r_{A,\beta} = \frac{\left| \left\{ \phi_{A,\beta}^{[I]} \right\}^T \left\{ \phi_{A,\beta}^{[II]} \right\} \right|}{\left\| \phi_{A,\beta}^{[I]} \right\| \cdot \left\| \phi_{A,\beta}^{[II]} \right\|} \quad (20)$$

添え字[I][II]は計算方法、 $|\cdot|$ は絶対値、 $\|\cdot\|$ はベクトルノルムを表す。構造系、音響系の相関 r_S 、 r_A は $\ell_A=10$ であっても良い値を示している。一方で $r_{A,\beta}$ の値は低く、構造系と接している音響系成分で精度が悪いことが分かる。

Fig. 4 Correlation of method [I] and method [II]

図5は、方法[I][II]で得られた連成2次の固有ベクトルをそれぞれ $\|p_s\|=1$ になるように正規化したときの、音響系節点 P_U , P_L (図3)の値の比を表している。節点 P_U の比は $\ell_A=20$ で方法[I]で得られた値とほぼ等しくなっている。一方、節点 P_L の比は $\ell_A=400$ の場合であっても0.8程度であり、2.2節で述べたように、構造系と接している音響系節点では精度が著しく低下することが分かる。

図6に $\ell_A=10$ の場合の音圧分布を示す。 $\ell_A=10$ の場合、大まかな音圧分布は正しく表現されているが、下部節点の放射状の音圧分布は正しく表現されていない。

図7に方法[I][II]で得られた連成2次の固有振動数の相対誤差と ℓ_A の関係を示す。連成2次の固有振動数は構造系が主体であるため、 $\ell_A=10$ であっても方法[I]との誤差が+0.07%という良い近似を与えている。また ℓ_A が増加すると共に固有振動数が+方向から方法[I]で得られた値へ収束している様子がわかる。

Fig.5 Sound Pressure Ratio between Method [I] and [II]

Fig. 6 [II] CMS without Residual $\ell_A=10$. SP Distribution

Fig. 7 Natural Freq. Error of Method [II]

Table 2 Correlation and Normalized Ratio of Method [II] [IV]

	r_S	r_A	$r_{A\beta}$	$P_U/P_U^{[I]}$	$P_L/P_L^{[I]}$
[II] $\ell_A=10$	1.00	0.985	0.446	1.123	0.169
[II] $\ell_A=50$	1.00	0.999	0.943	1.007	0.564
[IV] $\ell_A=h_S=h_A=10$	1.00	1.00	0.999	0.966	0.955
$\ell_S=10$ in Methods [II] [IV].					

Table 3 Natural Frequency of 2nd Coupled Mode.

Method	Natural Freq. [Hz]
[I] Complex Eigenvalue Analysis	69.37
[II] CMS without Residual $\ell_A=10$	69.42
[II] CMS without Residual $\ell_A=50$	69.39
[IV] Proposed CMS $\ell_A=h_S=h_A=10$	69.37
$\ell_S=10$ in Methods [II] [IV].	

4・4 [IV]提案法の結果 [IV]提案する剰余剛性を考慮した不拘束モード合成法を適用する。固有ベクトルの採用数を $\ell_S=\ell_A=10$ 、同様に剰余モードの採用数を $h_S=h_A=10$ とした。方法[I]で得られた固有ベクトルとの相関、 P_U , P_L の値の比を表2に示す。提案法では相関 r はほぼ1.0、 P_U , P_L の値も5%程度の誤差であり良好な結果であった。表3に得られた連成2次の固有振動数をまとめる。提案法では固有振動数の値は方法[I]で得られた値と小数点以下2桁まで一致した。

この結果から剰余モードを導入することで、固有値解析の精度を改善できることが確認できた。

4・5 計算時間の比較 本節では各方法の計算時間の比較を行う。方法[II]の採用固有ベクトル数を $\ell_S=10$, $\ell_A=50$ 、方法[IV]では $\ell_S=\ell_A=10$, $h_S=h_A=10$ とした。また参考として方法[III]の従来からの剰余剛性を考慮した不拘束モード合成法を $\ell_S=\ell_A=10$ の条件で適用した。

特性方程式の自由度(DOF)と計算時間の関係を調べるため、有限要素モデルのx軸方向の要素分割を変え、

初期状態(DOF=9295)の 2,3,4 倍の自由度で計算を行った。本論文では Nastran と MATLAB を併用しているため方法[I]と他の方法の計算時間を直接比較できない。そのため Nastran で行った方法[I][II]の固有値解析に要した時間を図 8 に、MATLAB で行った方法[III]、[IV]の固有値解析に要した時間を図 9 に示す。ここで固有値解析に要した時間とは行列 **M, K** の縮約過程の計算時間を含んだものである。

図 8 に示すように自由度が小さい場合、方法[I][II]は同程度の計算時間であるが、自由度に対する計算時間の傾きが異なっている。このことから大自由度の問題では方法[I]の適用が困難となることが予想される。

図 9 に示すように方法[III]の計算負荷は大きく、自由度を 4 倍にした計算では解析が実行できなかった。

一方、提案する方法[IV]では少数の非連成系固有ベクトルを求めるだけで良く、特性方程式の自由度も小さいため計算時間は短く、 $\ell_A=50$ とした方法[II]の半分程度であった。この結果から提案する方法[IV]の計算負荷に対する有効性が確認できる。

5. 提案法の検証 2

本章では図 10 に示す有限要素モデルを利用し、提案法の精度検証を行う。対象有限要素モデルは、直方体の音響系が厚さ 5mm の板で囲まれたものである。板厚以外の材料定数は表 1 の値を利用した。構造系は底面($z=0.0$ [m])の四隅を完全拘束されている。図 10 のモデルは板厚がモデルの寸法に対して薄く、音響系の六面が構造系と接しているため、構造系が受ける音響系からの圧力、音響系が受ける構造系からの体積加速度が大きい。そのため構造系、音響系、双方の剩余剛性の影響が大きく、前章で対象としたものより一般的なモデルとなっている。

以下では[I]複素固有値解析で得られた 200Hz までの 134 個の固有ベクトルと、[IV]提案法により得られた 134 個の固有ベクトルを比較する。提案法では 250Hz までの構造系単体の固有ベクトル($\ell_S=150$)と、音響系単体の固有ベクトル($\ell_A=15$)を採用した。また剩余モードは $h_S=15$, $h_A=150$ とした。

方法[I][IV]で得られた固有ベクトル間の相関 r_S , r_A , $r_{A,B}$ は 0.999 以上の良好な値を示した。また方法[I][IV]で得られた固有ベクトルを $\|\phi_B\|=1$ になるように正規化したときの、音響系の境界自由度成分 $\phi_{A,B}$ のノルム比を図 11 に示す。境界自由度の誤差は $\pm 1\%$ 程度で良好な結果であった。また固有振動数の相対誤差を図

12 に示す。固有振動数の誤差は最大で $8 \times 10^{-3}[\%]$ と、非常に小さい値であった。またその誤差はすべて正であった。以上の結果から、一般的な問題に対しても提案法により精度の良い固有値解析が行えることを確認した。

Fig. 8 CPU time of Methods [I] [II] on Nastran

* Method [III] is failed at 3.7×10^4 DOF (shortage of memory)

Fig. 9 CPU time of Methods [III] [IV] on MATLAB

△Constraint. Thickness of shell = 5[mm]

Fig. 10 Objective FE model

Fig. 11 Normalized $\|\phi_{A,B}\|$ Ratio between Method [I] and [IV]

Fig. 12 Natural Freq. Error of Method [IV]

6. 結 論

本論文の内容を以下にまとめる。

- (1) 振動音響連成系の固有値解析における計算負荷低減を目的とした新しい不拘束モード合成法を提案した。
- (2) 提案法と従来法を、構造系剰余剛性の影響が無視できる有限要素モデル(図 1)へ適用した。そして提案法が従来法と比較して、計算精度、計算負荷の点で有効であることを示した。
- (3) 構造系、音響系、双方の剰余剛性の影響が大きい有限要素モデル(図 10)へ提案法を適用し、良好な結果を得た。この結果から提案法により一般の問題に対しても精度の良い結果が得られることを確認した。

提案法は若干の数値解析上の技術が必要とするが、その精度と計算負荷の利点により、その欠点は補われるものと考えている。

付 録

萩原らによる剰余剛性の算出方法⁽⁷⁾ 剰余剛性を考慮しない不拘束モード合成法において、連成系固有ベクトルの構造系成分 ϕ_s を非連成系固有ベクトル $\mathbf{x}_{s,r}$ ($r=1, \dots, \ell_s$) の重ね合わせで表したことの数学的な意味は、逆行列を次式で近似したことである。

$$[\mathbf{K}_s - \lambda \mathbf{M}_s]^{-1} \cong \sum_{r=1}^{\ell_s} \frac{\{\mathbf{x}_{s,r}\} \{\mathbf{x}_{s,r}\}^T}{\lambda_{s,r} - \lambda} \quad (\text{A.1})$$

このとき採用しなかった ℓ_s+1 次以上の固有ベクトルの影響は剰余剛性と呼ばれ次式で表される。

$$\mathbf{Z}_{s\lambda}(\lambda) = [\mathbf{K}_s - \lambda \mathbf{M}_s]^{-1} - \sum_{r=1}^{\ell_s} \frac{\{\mathbf{x}_{s,r}\} \{\mathbf{x}_{s,r}\}^T}{\lambda_{s,r} - \lambda} \quad (\text{A.2})$$

上式の剰余剛性はコンプライアンスの次元を持つので剰余コンプライアンス行列と呼ばれる。 $\mathbf{Z}_{s\lambda}$ は λ が未知であるため厳密な値を求めることができない。しかし、その精度の良い近似が次式の定数行列 $\mathbf{Z}_s$ で与えられることが導かれている。

$$\mathbf{Z}_s = [\mathbf{K}_s - \omega_c^2 \mathbf{M}_s]^{-1} - \sum_{r=1}^{\ell_s} \frac{\{\mathbf{x}_{s,r}\} \{\mathbf{x}_{s,r}\}^T}{\lambda_{s,r} - \omega_c^2} \quad (\text{A.3})$$

ここで ω_c は定数で、 ω_c の値によって近似精度が変化する。 ω_c が求めようとする λ に近くなるほど近似精度は良くなる。本論文では採用した最高次 (ℓ_s 次) の固有振動数以下で近似精度が保たれるように次式の値を利用する。

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_{s,1} + \lambda_{s,\ell_s})} \quad (\text{A.4})$$

以上の議論は音響系においても同様に成立する。

文 献

- (1) Hagiwara, I., et al., Technical Development of Eigenmode Sensitivity Analysis for Coupled Acoustic-Structural Systems, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 56, No. 527(1990), pp. 1704-1711.
- (2) MSC software, MSC.Nastran Reference Manual 2001, p580.
- (3) R.Freyman, Dynamic Response of Coupled Structural-Acoustic Systems, *Journal of Low Frequency Noise and Vibration*, Vol.14, No.1, 1995.
- (4) Matthias Maess, et al., Component Mode Synthesis for Efficient Structure-Acoustic Simulation of Piping system, *International Modal Analysis Conference XXIV*, 2006.
- (5) Ichikawa, T., et al., Component Mode Synthesis for Large-Scale Coupled Structure-Acoustic Fluid Interaction Problem, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 61, No. 587, pp. 2718-2724, 1995.
- (6) Nagamatsu, A., et al., *Building Block Approach* (1991), pp.126-130, BAIFUKAN CO., LTD.
- (7) Nagamatsu, A., et al., *Modal Analysis and Control of Sound and Vibration* (1996), pp.139-148, CORONA PUBLISHING.