未知パラメータをもつ系に対する完全非弾性衝突
を利用した自由振動抑制法*高橋 将徳^{*1}, 木下 正作^{*2}, 五郎丸 正隆^{*3}
川 寄 義 則^{*2}, 岩 井 善 太^{*4}Vibration Suppression of Systems with Unknown Parameters
by Perfectly Inelastic CollisionMasanori TAKAHASHI^{*5}, Shosaku KINOSHITA, Masataka GOROMARU,
Yoshinori KAWASAKI and Zenta IWAI^{*5} School of Engineering, Kyushu Tokai University,
9-1-1 Toroku, Kumamoto-shi, Kumamoto, 862-8652 Japan

In this paper, two novel vibration suppression methods based on perfectly inelastic collision are developed for undamped vibration systems with unknown parameters. One is the perfect vibration suppression method by just two collisions, and the other is the asymptotic vibration suppression method which provides higher effects than one in the previous work. Also the proposed methods are applied to the problem on reduction of residual vibration in stacker cranes. In order to confirm the effectiveness of the proposals, several experiments are explored.

Key Words: Vibration Suppression, Inelastic Collision, Impact Damper, Stacker Crane

1. は じ め に

運動量保存の法則によれば, 物体のもつ力学的エネルギーは(非弾性)衝突によって減少する. 特に, 衝突が完全非弾性衝突のときには, エネルギー損失量は最大となる. この点に注目し, 著者らは既報において, 完全非弾性衝突による力学的エネルギーの散逸を利用した二つの自由振動抑制法, すなわち, 一回の完全非弾性衝突で振動を完全に抑制する完全振動抑制法と, 無限回の衝突と分離による漸近的振動抑制法を提案している⁽¹⁾. しかし, 前者では, 振動体と衝突体とから構成される振動系のパラメータが既知であることを前提条件としており, また, 後者では, 一回の衝突による振動抑制効果が低く, 効果向上の余地が残されている.

そこで, 本論文では, 未知パラメータをもつ非減衰振動系に対して, 二回の衝突でパラメータを同定しかつ振動を抑制する完全振動抑制法と, 以前の方法より振動抑制効果をさらに向上させた漸近的振動抑制法を

提案する. さらに, これらの方法をスタッククレーンと呼ばれる搬送装置の残留振動問題^{(1)~(3)}に応用し, 貨物の重量などの情報を必要としない残留振動抑制法を提案する. また, 実験によりその有効性を検証する.

なお, 本論文で用いる完全非弾性衝突とは, 物体間に作用する内力によって, 物体同士が瞬間的に結合されて, その後, 一体となって運動することを云う. そのような衝突を実現する内力としては, 例えば, 磁気や摩擦力などがある.

2. 問 題 設 定

図1に示されているように, バネ定数 k のバネに接続された質量 M の振動体と, その上部に載せられた質量 m の衝突体とからなる振動系について考える. ただし, 二体の質量 M および m とバネ定数 k は未知とし, また, 物体間に作用する内力を制御することができて, 二体の完全非弾性衝突と分離が自由にできるものとする. なお, 本論文では, 振動体 M と衝突体 m のそれぞれの変位を X と x で表すことにする.

問題は, 振動体 M の自由振動を, 衝突体 m を利用して完全に抑制する(振幅を零とする)ことである.

* 原稿受付 2006年12月4日.

^{*1} 正員, 九州東海大学工学部(☎ 862-8652 熊本市渡鹿 9-1-1).^{*2} 正員, 有明工業高等専門学校(☎ 863-8585 大牟田市東萩尾 150).^{*3} 学生員, 有明工業高等専門学校専攻科.^{*4} 正員, フェロー, 熊本県立技術短期大学校(☎ 869-1102 熊本県菊池郡菊陽町大字原水 4455-1).

E-mail: mtakahasi@ktmail.ktokai-u.ac.jp

Fig. 1 Identification of the ratio of masses.

3. パラメータ同定にもとづく完全振動抑制法

3.1 完全振動抑制法 議論の便のため、まず、文献(1)の完全振動抑制法について述べる。

振動体 M の質量が衝突体 m のそれより小さい ($M < m$ となる) 場合について考える。

いま、二体 (振動体 M と衝突体 m) が一体となって、振幅 A で自由振動をしているものとする。このとき、以下の手順で振動体 M の自由振動を完全に抑制することができる⁽¹⁾。

(S1) 二体を次の点 ($t = t_S$) で分離させる。

$$X(t_S) = A\sqrt{1 - \frac{M}{m}} =: X_S \quad (1)$$

(S2) 振動体 M が分離時の速度と逆向きの速度で中立点に戻ってきたときに、二体を完全非弾性衝突させる。

式(1)からも明らかなように、上述の完全振動抑制法では、二体の質量比が事前に分かっている必要はない。そこで、次節では、完全非弾性衝突を利用して質量比を求める簡単な同定法を提案する。

3.2 衝突を利用した質量比の同定 以下に示す手順で衝突前後の振幅を計測することにより、質量比を算出することができる (図1を参照)。

二体が一体となって自由振動をしているものとする。

(I1) 速度が零 ($\dot{X}(t_0) = 0$) となる点で振動体 M の変位 $X(t_0) = A_0$ を計測し、二体を分離させる。

(I2) 振動体 M が中立点に戻ってきたときに、二体を完全非弾性衝突させる。

(I3) 速度が零 ($\dot{X}(t_1) = 0$) となる点で振動体 M の変位 $X(t_1) = A_1$ を計測する。

このとき、計測した振幅 A_0 および A_1 と、二体の質量 M および m との間には、次の関係が成立する⁽¹⁾ (導出は付録参照)。

$$\frac{A_1}{A_0} = \sqrt{\frac{M}{M+m}} =: S_I < 1 \quad (2)$$

この結果を利用すれば、二体の質量比は振幅比 S_I から次のように求められる。

$$\frac{M}{m} = \frac{S_I^2}{1 - S_I^2} \quad (3)$$

従って、式(1)の代わりに上式を代入した

$$X_S = A_1 \sqrt{\frac{1 - 2S_I^2}{1 - S_I^2}} \quad (4)$$

を用いることで、事前情報である質量比が不要となる。すなわち、(I1)、(I2) および (I3) の手順で質量比を求めた後に、(S1) および (S2) の手順で振動を抑制すれば、パラメータ未知の振動系の自由振動を完全に抑制することができる。

以上が、パラメータ同定にもとづく完全振動抑制法である。

ところで、式(3)より、次のことが成立する。

$$M < m \iff S_I < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

これより、振幅比 S_I から本手法が適用可能か否かの判断ができる。なお、本手法が適用不可 ($M \geq m$) となる場合には、次章で提案する漸近的振動抑制法を適用すればよい。

4. 漸近的振動抑制法

4.1 振動抑制手順 振動体 M の質量が衝突体 m のそれより大きい ($S_I \geq 1/\sqrt{2}$ となる) 場合、以下の手順で振動体 M の自由振動を抑制することができる (図2を参照)。

(P1) 二体を中立点で分離させる。

(P2) 振動体 M が分離時の速度と逆向きの速度で中立点に戻ってきたときに、再び二体を完全非弾性衝突させる。

(P3) 自由振動の半周期を待ち、(P1)に戻る。

このとき、振動体 M の自由振動は漸近的に抑制される。次節では、このことを理論的に確認する。

Fig. 2 Asymptotic vibration suppression.

4.2 各質点の挙動解析 二体が分離している状態と一体化している状態に分けて解析を行う。

n 回目の分離 ($t = t_n^-$) から n 回目の衝突 ($t = t_n^+$) までの区間 $[t_n^-, t_n^+)$ は、二体が分離している。このとき、二体は次の運動方程式に従う。

$$M\ddot{X} = -kX, \quad m\ddot{x} = 0 \quad (6)$$

ただし、分離時の各状態は以下のとおりである。

$$\begin{cases} X(t_n^-) = 0, & \dot{X}(t_n^-) = V_n^- > 0 \\ x(t_n^-) = a_n^-, & \dot{x}(t_n^-) = V_n^- \end{cases} \quad (7)$$

このとき、振動体 M は振幅 A_n^- の自由振動を行う。

$$X(t) = A_n^- \sin[\omega^-(t - t_n^-) + \pi(2n - 2)] \quad (8)$$

$$A_n^- = \frac{V_n^-}{\omega^-}, \quad \omega^- = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (9)$$

一方、衝突体 m は、次の衝突まで、速度 V_n^- の等速運動を行い、衝突時には、

$$\begin{aligned} x(t_n^+) &= a_n^- + V_n^-(t_n^+ - t_n^-) \\ &= a_n^- + V_n^-\left(\frac{\pi}{\omega^-}\right) =: a_n^+ \end{aligned} \quad (10)$$

なる点に至る。

n 回目の衝突から $n+1$ 回目の分離 ($t = t_{n+1}^-$) までの区間 $[t_n^+, t_{n+1}^-)$ は、二体が一体化している。このとき、二体は次の運動方程式に従う。

$$(M+m)\ddot{X} = -kX, \quad \ddot{x} = \ddot{X} \quad (11)$$

ただし、衝突時の各状態は以下のとおりである。

$$\begin{cases} X(t_n^+) = 0, & \dot{X}(t_n^+) = V_n^+ < 0 \\ x(t_n^+) = a_n^+, & \dot{x}(t_n^+) = V_n^+ \end{cases} \quad (12)$$

従って、振動体 M は振幅 A_n^+ の自由振動を行う。

$$X(t) = A_n^+ \sin[\omega^+(t - t_n^+) + \pi(2n - 1)] \quad (13)$$

$$A_n^+ = -\frac{V_n^+}{\omega^+}, \quad \omega^+ = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \quad (14)$$

一方、衝突体 m は、 $x = a_n^+$ を中心とした振幅 A_n^+ の自由振動を行う。

$$x(t) = a_n^+ + A_n^+ \sin[\omega^+(t - t_n^+) + \pi(2n - 1)] \quad (15)$$

さて、運動量保存の法則から、次式を得る。

$$V_n^+ = -\left(\frac{M-m}{M+m}\right)V_n^- \quad (16)$$

従って、 n 回目の衝突により、自由振動は次の振幅比 S_P^+ で抑制される。

$$\begin{aligned} S_P^+ &:= \frac{A_n^+}{A_n^-} = -\frac{V_n^+}{V_n^-} \frac{\omega^-}{\omega^+} \\ &= \left(\frac{M-m}{M+m}\right) \sqrt{\frac{M+m}{M}} \end{aligned} \quad (17)$$

また、 $V_{n+1}^- = -V_n^+$ であることを考慮すると、 $n+1$ 回目の分離により、自由振動は (n に関係なく) 次の振幅比 S_P^+ で抑制される。

$$S_P^- := \frac{A_{n+1}^-}{A_n^+} = \frac{\omega^+}{\omega^-} = \sqrt{\frac{M}{M+m}} \quad (18)$$

結局、 n 回目の衝突と $n+1$ 回目の分離により、自由振動は次の振幅比 S_P で抑制されることになる。

$$S_P := \frac{A_{n+1}^-}{A_n^-} = S_P^- S_P^+ = \frac{M-m}{M+m} < 1 \quad (19)$$

従って、式 (17) および上式より、次式を得る。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^+ = 0 \quad (20)$$

これは、無限回の衝突と分離により、振動体 M の自由振動が漸的に抑制されることを意味している。

ところで、衝突体 m について、 $n+1$ 回目の分離時には、再び n 回目の衝突点に戻ってくるから、

$$x(t_{n+1}^-) = a_{n+1}^- = a_n^+ = a_n^- + V_n^-\left(\frac{\pi}{\omega^-}\right) \quad (21)$$

を得る。式 (9) および式 (19) より、

$$V_n^- = A_n^- \omega^- = A_1^- \omega^- S_P^{n-1} \quad (22)$$

上式を式 (21) に代入し, a_n^- について漸化式を解けば,

$$a_n^- = a_1^- + \frac{\pi A_1^- (M+m)}{2m} (1 - S_P^{n-1}) \quad (23)$$

を得て, これより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^- = a_1^- + \frac{\pi A_1^- (M+m)}{2m} \quad (24)$$

となるから, 無限回の衝突と分離の後に, 衝突体 m の運動も止まる.

ここで, 衝突による力学的エネルギーの変化について言及しておく. 系内の力学的エネルギーは, 二体が分離するときには保存されるが, 衝突するときには全て運動エネルギーに変換されて, 式 (16) で減速された分だけ散逸することになる. つまり, n 回目の衝突前後の力学的エネルギーをそれぞれ E_n および E_{n+1} とすると, 衝突による力学的エネルギーの損失量 ΔE_n は次式となる.

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= E_{n+1} - E_n \\ &= \frac{1}{2} (M+m) [(V_n^+)^2 - (V_n^-)^2] \\ &= \frac{1}{2} (M+m) (V_n^-)^2 (S_P^2 - 1) \\ &= (S_P^2 - 1) E_n < 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ここで, E_n について上式の漸化式を解けば次式を得る.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} E_1 (S_P^2)^{n-1} = 0 \quad (26)$$

従って, 無限回の衝突により, 系内に蓄えられている力学的エネルギーが全て散逸する. すなわち, 系内の全ての運動が止まる.

さて, 式 (19) および式 (23) から明らかなように, 本手法では, 衝突体 m の質量が大きいほど抑制効果が高く (振幅比 S_P が小さく), 衝突体 m の移動量は少ない. 特に, $M = m$ の場合には, 一回の分離と衝突で自由振動が完全に抑制され (無限回の衝突を必要としない), 前章の完全振動抑制法と同じ結果となる.

4.3 文献 (1) の方法との比較 既に述べたように, 著者らは, 文献 (1) において, 本手法と同様の漸近的振動抑制法を提案している⁽¹⁾. その方法は以下の手順による.

(C1) 二体をそれらの速度が零となる (振幅が極大となる) 点で分離させる.

(C2) 振動体 M が中立点に戻ってきたときに, 二体を完全非弾性衝突させる.

(C3) 再び (C1) に戻る.

上記の手順から明らかなように, 文献 (1) の方法では, 一周内に二回の衝突が行われる. ところが, 一

Fig. 3 Illustration of a stacker crane.

Fig. 4 The modified structure for residual vibration reduction.

回の衝突による振幅比が

$$S_C = \sqrt{\frac{M}{M+m}} (= S_I) \quad (27)$$

であるから⁽¹⁾, 二回の衝突を行ってもその効果は本手法のそれに及ばないことが分かる. 本手法の振動抑制効果は, 上述の文献 (1) の方法と比べ,

$$S_C^2 - S_P = \frac{m}{M+m} > 0 \quad (28)$$

だけ向上している.

5. スタッカクレーンの残留振動問題への応用

5.1 残留振動抑制法 図 3 に示しているように, スタッカクレーンは, 荷台を前後および上下に移動可能とする高性能な搬送装置である. しかし, 近年, コストや搬送効率などの点から, スタッカクレーンの高層化, 軽量化がすすめられ, その剛性は低下している. このため, 台車停止時に無視することのできない残留振動が生じ, これが位置決め精度の劣化や搬送時間の遅れなどの要因となっている^{(1)~(3)}.

上述の残留振動問題の解決策として, 著者らは, 文献 (1) において, 完全非弾性衝突による自由振動抑制法を応用した残留振動抑制法を考案している. そこでは, 荷台部をフレームから独立させ, さらに荷台部とフレームの衝突と分離が自由に制御できる内力発生装置を設置し, 荷台部そのものを衝突体として利用する

Fig. 5 The vibration suppression algorithm.

Fig. 6 The experimental model of the stacker crane.

ことで残留振動を抑制している（図4を参照）。ただ、既述のように、振動系のパラメータが既知であることを前提としているため、振動を抑制するときには、積載貨物の質量や荷台の高さなど、スタックレーンの正確なパラメータを求めておく必要がある。しかし、これは技術的にみて非常に困難な問題である。

そこで、本論文では、文献(1)の自由振動抑制法の代わりに、前章までに提案した二つの自由振動抑制法をスタックレーンの残留振動抑制問題に応用する。すなわち、台車停止後、(I1)～(I3)の手順で振幅比 S_I を求め（質量比を同定し）、それが不等式(5)を満たしていれば、完全振動抑制法(S1), (S2)により残留振動を抑制する。不等式(5)を満たしていない場合は、漸近的振動抑制法(P1)～(P3)により残留振動を抑制する（図5を参照）。このとき、積載する貨物の重量や荷台の高さなどの情報を一切利用していないことに注意する。よって、この残留振動抑制法は、貨物の重量や荷台の高さの変化に適應可能なものとなっている。

5.2 実験による検証 前節の残留振動抑制法の効果を、図6に示すような実験装置を用いて検証する。図6の実験装置は、スタックレーンのフレーム（振動体）を模擬した柔軟な構造物と、荷台を模擬した移

Fig. 7 Experimental results for $m_p = 7$ kg Fig. 8 Experimental results for $m_p = 4$ kg

動テーブルとから構成されている。移動テーブルには、電磁石が設置されており、この磁力によって構造物と移動テーブルの衝突と分離を実現する。構造物の変位 X はレーザ変位計によって計測され、A/D変換器を経由してコンピュータに取り込まれる。コンピュータは、前節の振動抑制法に従い、電磁石のオン・オフ制御を行い、構造物と移動テーブルの衝突と分離を制御する。なお、構造物（天井部）の質量は $m_r = 5.5$ kgであり、側壁部のバネ定数は $k_p = 0.1$ kN/mである。

実験では、移動テーブルの質量を $m_p = 7$ kgとした場合と、 $m_p = 4$ kgとした場合について検討する。構造物の初期変位として、手動により、

$$X(0) \approx 100 \text{ mm} \quad (29)$$

を与えている。各実験結果を図7および図8に示す。各図において、実線および破線はそれぞれ構造物の振動抑制時の波形と自由振動波形を表している。また、点線は電磁石への指令電圧を表している。電磁石の指

令電圧が H の状態では構造物と移動テーブルが衝突（一体化）しており、L の状態では分離している。この指令電圧のデータから、 $m_p = 7 \text{ kg}$ とした場合は完全振動抑制法が選択され、一方、 $m_p = 4 \text{ kg}$ とした場合は漸近的振動抑制法が選択されていることが分かる。実験開始初期の分離（L）、衝突（H）の動作、すなわち（I1）、（I2）および（I3）の手順で質量比の同定が行われ、移動テーブルの質量の変化が自動的に認識されて、適切な振動抑制法が選択されている。振動抑制法の選択後、理論上、 $m_p = 7 \text{ kg}$ とした場合は、一回の衝突によって振動が完全に抑制され、また、 $m_p = 4 \text{ kg}$ とした場合は、衝突と分離を繰り返すたびに、 $S_P \simeq 0.16$ の割合で振動が漸的に抑制されていく。しかし、両場合ともに、微小な残留振動があり、自由振動を完全に抑制することができていない。これは、電磁石の特性から、衝突と分離のタイミングに遅れが生じたためと考えられる。電磁石の特性を考慮したオン・オフ制御法とその効果の検証については、今後の課題としたい。

6. お わ り に

本論文では、著者らが既に提案している完全非弾性衝突による振動抑制法を改良し、振動系のパラメータが未知でも振動を完全に抑制できる方法と、無限回の衝突と分離によって振動を漸近のかつ効果的に抑制する方法を提案した。さらに、これらの方法をスタッカクレーンの残留振動問題に応用し、貨物の重量や荷台の高さなどの情報を必要としない残留振動抑制法を提案した。また、その効果を実験によって検証した。

最後に、本論文の実験において、装置の製作や実験データの収集など、多大なご協力をいただいた、加藤宏和氏（有明工業高等専門学校 専攻科）、葭原俊一氏（現 熊本大学 大学院）の両氏に謝意を表する。

文 献

- (1) Takahashi, M., et al, Vibration Suppression by Perfectly Inelastic Collision, *Transactions of JSME Ser. C*, Vol. 72, No. 718 (2006), pp.1717-1722
- (2) Takahashi, M., et al, Vibration Suppression by Inelastic Collision and Its Application to Vibration Reduction in Stacker Crane, *Transactions of JSME Ser. C*, Vol. 71, No. 704 (2005), pp.1201-1206
- (3) Takemoto, K. et al, Motion and Multimode-Vibration Control of a High Speed Transportation System, *Transactions of JSME Ser. C*, Vol. 70, No. 694 (2004), pp. 113-120.

付 録

ここでは、式 (2) の振幅比 S_I を求める。

（I1）では、速度が零となる点で二体を分離する。このときの振幅 A_0 は、衝突（I2）直前の振動体 M の速度を V とすると、次のように表される。

$$A_0 = \frac{V}{\omega^-} \quad (30)$$

ここで、 ω^- は式 (9) の定義による。

さらに、（I2）では、中立点で再び二体を衝突させるから、運動量保存の法則より、衝突後の二体の速度 V' は、次式となる。

$$V' = \frac{M}{M+m} V \quad (31)$$

ところで、衝突後の振動体 M の振幅 A_1 は次のように表される。

$$A_1 = \frac{V'}{\omega^+} \quad (32)$$

ここで、 ω^+ は式 (14) の定義による。

結局、振幅比 S_I は、式 (31) より、

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{V' \omega^-}{V \omega^+} = \frac{M}{M+m} \sqrt{\frac{M+m}{M}} \quad (33)$$

となり、これを簡単にすれば式 (2) を得る。