動的応答を用いたはりに生じたブリージングクラックの検出* (混合型変分原理に基づく有限要素法を用いた検出法の提案)

神谷 恵輔^{*1}, 吉永 輝光^{*2}, 安田 仁彦^{*3}

Detection of Breathing Cracks in a Beam Using Dynamic Response (Proposition of a Detection Technique Using a Finite Element Method Based on the Mixed Variational Principle)

Keisuke KAMIYA^{*3}, Terumitsu YOSHINAGA and Kimihiko YASUDA

^{*3} Department of Mechanical Engineering, School of Engineering, Aichi Institute of Technology,
1247 Yachigusa, Yakusa-cho, Toyota-shi, Aichi, 470-0392 Japan

Cracks can occur in machines and structures due to vibrations in operation. For safety, early detection of cracks is an important issue. So far many detection techniques of cracks using dynamic response have been proposed. Most of them assume that the cracks are open cracks, which are always open in vibration. However, actual fatigue cracks are breathing cracks, which open and close in vibration depending on sign of the bending moment. In a previous report, the authors presented a vibration analysis method for a beam with breathing cracks based on the mixed variational principle. This report proposes a detection technique of breathing cracks in a vibrating beam using the presented analysis method. Applicability of the proposed detection technique is confirmed by numerical simulation.

Key Words: Diagnostics, Breathing Crack, Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Vibration of Continuous System, Finite Element Method, Mixed Variational Principle

1. ま え が き

機械や構造物に、運転中の振動や外乱によってクラックが発生することがある。クラックが発生したまま長時間使用し続けると疲労破壊につながる恐れがあり、クラックを早期に発見することは安全上重要な課題である。このため、対象とする系の動的応答データを利用してクラックの検出を行う方法がこれまでに多数提案されている⁽¹⁾⁻⁽¹²⁾。ただしそのほとんどは、クラックは振動中に開いたままのオープンクラックであると仮定している。疲労による実際のクラックは、振動中に開閉するブリージングクラックである場合が多い。

著者らは報告⁽¹³⁾でブリージングクラックを有するはりの振動解析手法を提案した。そこでは、混合型変分原理⁽¹⁴⁾に基づいて定式化を行い、曲げモーメントを支配方程式中に陽に現すことで、ブリージングクラックの開閉の切り替えを自然な形で取り扱うことができるようにした。本報告では、混合型変分原理に基づく解析法を応用し、はりに生じたブリージングクラックを

動的応答から検出するための方法を提案する。提案する検出法の有効性を数値シミュレーションによって検討する。

2. クラック検出のためのはりのモデル化と振動解析

2.1 混合型変分原理に基づく有限要素モデルの導出
ブリージングクラックの検出法を提案するための準備として、はりの有限要素モデルの導出を行う。後に述べるようにクラックの検出に際して、ブリージングクラックがはりに与える影響を、要素の曲げモーメントの符号に依存した要素剛性(撓性)の変化としてモデル化する。このため曲げモーメントが陽に現れる形で支配方程式を導く必要がある。ここでは混合型変分原理⁽¹⁴⁾に基づいて有限要素モデルの導出を行う。

対象とするはりをいくつかの要素に分割する。以下、 e 番目の要素に注目する。要素の長さを L_e 、線密度を ρ 、ヤング率を E 、断面二次モーメントを I とする。図 1 に示すように、要素の一端を原点 O とし、軸方向に x 軸を定める。このはり要素は、領域内で減衰係数 c の粘性減衰力および分布外力 $f_e(x, t)$ を受けるとし、 $x = 0, L_e$ の両端で隣の要素からせん断力 S_e^l, S_e^r および曲げモーメント M_e^l, M_e^r を受けるとする。要素内の

* 原稿受付 2007 年 5 月 16 日。

^{*1} 正員, 愛知工業大学工学部 (☎ 470-0392 豊田市八草町八千草 1247)。

^{*2} 森永乳業(株) (☎ 108-0023 東京都港区芝浦 3-13-8)。

^{*3} 正員, フェロー, 愛知工業大学工学部。

E-mail: k-kamiya@aittech.ac.jp

Fig. 1 Beam element

たわみを u_e , 曲げモーメントを M_e とすれば, この要素の運動エネルギー T_e , ひずみエネルギー U_e , 仮想仕事 δW_e は次式のように書ける.

$$\begin{aligned} T_e &= \int_0^{L_e} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} \right)^2 dx \\ U_e &= \int_0^{L_e} \left(-\frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} M_e - \frac{1}{2EI} M_e^2 \right) dx \\ \delta W_e &= \int_0^{L_e} \left(-c \frac{\partial u_e}{\partial t} + f_e(x, t) \right) \delta u_e dx \\ &\quad - S_e^l \delta u_e^l + S_e^r \delta u_e^r + M_e^l \delta \theta_e^l - M_e^r \delta \theta_e^r \end{aligned} \quad (1)$$

ここで δu_e は領域内のたわみの変分であり, $\delta u_e^l, \delta u_e^r, \delta \theta_e^l, \delta \theta_e^r$ は, それぞれ $x = 0, L_e$ の端におけるたわみおよびたわみ角の変分である. なお, 上式のひずみエネルギー U_e の表現においては, たわみと曲げモーメントの間には

$$M_e = -EI \frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} \quad (2)$$

の関係があることを利用している. 式 (1) をハミルトンの原理

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ \delta(T_e - U_e) + \delta W_e \} dt = 0 \quad (3)$$

へ代入し, 部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{L_e} &\left(\rho \frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2} \delta u_e + c \frac{\partial u_e}{\partial t} \delta u_e + \frac{\partial M_e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta u_e \right. \\ &\quad \left. - f_e(x, t) \delta u_e + \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta M_e - \frac{1}{EI} M_e \delta M_e \right) dx \\ &+ S_e^l \delta u_e^l - S_e^r \delta u_e^r + \theta_e^l \delta M_e^l - \theta_e^r \delta M_e^r = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

を得る. ここで δM_e は領域内の曲げモーメントの変分であり, $\delta M_e^l, \delta M_e^r$ はそれぞれ $x = 0, L_e$ の端における曲げモーメントの変分である. なお, 式 (4) では $x = 0, L_e$ の端における $\partial u_e / \partial x$ をそれぞれ θ_e^l, θ_e^r としている. 式 (4) はたわみの変分 δu_e と曲げモーメントの変分 δM_e の両者を含んだものとなっている. このため混合型変分原理と呼ばれる⁽¹⁴⁾.

式 (4) に基づいて有限要素モデルを導く. このため, 要素の領域内のたわみと曲げモーメントを近似するこ

Fig. 2 Nodal variables

とを考える. 式 (4) には u_e および M_e の x に関する 1 階の導関数が含まれている. そこで, u_e および M_e を x の 1 次関数で近似する. 図 2 に示すように要素の両端を節点に取り, 左右の節点におけるたわみと曲げモーメントをそれぞれ $u_e^l, u_e^r, M_e^l, M_e^r$ とする. これらを用いて u_e と M_e を

$$u_e = L_e^T u_e, \quad M_e = L_e^T m_e \quad (5)$$

の形に表す. ここで u_e, m_e は

$$u_e = \{ u_e^l, u_e^r \}^T, \quad m_e = \{ M_e^l, M_e^r \}^T \quad (6)$$

で与えられるベクトルである. また L_e は, $L_0(x), L_1(x)$ を

$$L_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{L_e} \right), \quad L_1(x) = \frac{x}{L_e} \quad (7)$$

として

$$L_e = \{ L_0(x), L_1(x) \}^T \quad (8)$$

で与えられるベクトルである. 式 (4) における変分 $\delta u_e, \delta M_e$ も, 式 (5) と同様に

$$\delta u_e = L_e^T \delta u_e, \quad \delta M_e = L_e^T \delta m_e \quad (9)$$

と表す. ここで $\delta u_e, \delta m_e$ は任意のベクトルである.

式 (5), (9) を式 (4) へ代入し, $\delta u_e, \delta m_e$ は任意であることを考慮すれば

$$\begin{aligned} M_e \ddot{u}_e + C_e \dot{u}_e + T_e m_e &= f_e(t) + s_e \\ T_e^T u_e - A_e m_e &= \theta_e \end{aligned} \quad (10)$$

を得る. ここで $\cdot$ は時間に関する微分を表す. また M_e, C_e, T_e, A_e は

$$\begin{aligned} M_e &= \int_0^{L_e} \rho L_e L_e^T dx, \quad C_e = \int_0^{L_e} c L_e L_e^T dx \\ T_e &= \int_0^{L_e} L_e' L_e'^T dx, \quad A_e = \int_0^{L_e} \frac{1}{EI} L_e L_e^T dx \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられるマトリックスであり, $f_e(t)$ は

$$f_e(t) = \int_0^{L_e} f_e(x, t) L_e dx \quad (12)$$

で与えられるベクトルである。なお、式(11)における'は x に関する微分を表す。さらに s_e, θ_e は

$$s_e = \{-S_e^l \ S_e^r\}^T, \quad \theta_e = \{-\theta_e^l \ \theta_e^r\}^T \quad (13)$$

で与えられるベクトルである。

2.2 クラックモデル ブリージングクラックは振動中に、曲げモーメントの符号に応じて開閉する。例えば、クラックがはり上面に生じた場合、その位置の曲げモーメントが正のときにクラックは開き、負のときはクラックは閉じたままである。逆に、クラックがはり下面に生じた場合、その位置の曲げモーメントが負のときにクラックは開き、正のときはクラックは閉じたままである。クラックが閉じている間は、はりの剛性はクラックが存在しない場合と同じであるが、クラックが開くと剛性は局所的に減少する。すなわち撓性が増加する。このような特性をもつブリージングクラックを、検出に便利な形でモデル化することを考える。

まずクラックの開閉の、曲げモーメントの符号への依存性を表すため、次式で定義される M_e^+, M_e^- を導入する。

$$\begin{aligned} M_e^+ &= H(M_e^l)L_0(x)M_e^l + H(M_e^r)L_1(x)M_e^r \\ M_e^- &= H(-M_e^l)L_0(x)M_e^l + H(-M_e^r)L_1(x)M_e^r \end{aligned} \quad (14)$$

ここで $H(\cdot)$ はヘビサイド関数である。式(14)より、要素の両端の曲げモーメント M_e^l, M_e^r がともに正のときは、 M_e^+ は正の値をとり、 M_e^- は零であることがわかる。逆に、 M_e^l, M_e^r がともに負のときは、 M_e^- は負の値をとり、 M_e^+ は零である。この意味で、 M_e^+, M_e^- は要素の正の曲げモーメントおよび負の曲げモーメントを表す。ただし、 M_e^l, M_e^r の符号が異なるときは、 M_e^+ と M_e^- は同時に零でない値をとりうる。また

$$M_e^+ + M_e^- = M_e \quad (15)$$

が成り立つことは容易にわかる。

次に、クラックが開いた場合の撓性の増加の表現方法について考える。まず、クラックがはり上面に生じた場合を考える。この場合、クラックは曲げモーメントが正のときに開く。ここでは、クラックが開いたことによる撓性の増加を、図3に示すように、 M_e^+ に

Fig. 3 Model of the element with an opened crack

対する要素撓性の一様な増加としてモデル化する。同様に、はり下面に生じたクラックによる局所的な撓性の増加を、 M_e^- に対する要素撓性の一様な増加としてモデル化する。 M_e^+ に対する要素撓性の増加率を α_e^+ 、 M_e^- に対する要素撓性の増加率を α_e^- とすれば、この要素のひずみエネルギーは次式で表される。

$$U_e = \int_0^{L_e} \left[-\frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} M_e - \frac{1}{2EI} \{ (1 + \alpha_e^+) M_e^+ + (1 + \alpha_e^-) M_e^- \} M_e \right] dx \quad (16)$$

なお、 α_e^+, α_e^- はその物理的意味から

$$\alpha_e^+ \geq 0, \quad \alpha_e^- \geq 0 \quad (17)$$

を満たすことに注意されたい。

式(1)の第2式を式(16)で置き換えて、前節と同じことを行えば、ブリージングクラックをもつ要素に対する方程式として

$$\begin{aligned} M_e \ddot{u}_e + C_e \dot{u}_e + T_e m_e &= f_e(t) + s_e \\ T_e^T u_e - A_e^c(m_e; \alpha_e^+, \alpha_e^-) m_e &= \theta_e \end{aligned} \quad (18)$$

を得る。ここで $A_e^c(m_e; \alpha_e^+, \alpha_e^-)$ は、 I を単位マトリックス、 H_e^+, H_e^- を

$$\begin{aligned} H_e^+ &= \begin{bmatrix} H(M_e^l) & 0 \\ 0 & H(M_e^r) \end{bmatrix} \\ H_e^- &= \begin{bmatrix} H(-M_e^l) & 0 \\ 0 & H(-M_e^r) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

で与えられるマトリックスとして、

$$A_e^c(m_e; \alpha_e^+, \alpha_e^-) = A_e (I + \alpha_e^+ H_e^+ + \alpha_e^- H_e^-) \quad (20)$$

で与えられるマトリックスである。

2.3 全体方程式の組み立て 最後にはり全体の支配方程式を組み立てる。図4に示すように、 e 番目の要素と $e+1$ 番目の要素を考える。要素の結合点におけるたわみおよびたわみ角は連続であり、せん断力および曲げモーメントは釣り合わなければならない。したがって

$$\begin{aligned} u_e^r &= u_{e+1}^l, \quad \theta_e^r = \theta_{e+1}^l \\ S_e^r &= S_{e+1}^l, \quad M_e^r = M_{e+1}^l \end{aligned} \quad (21)$$

が成り立たねばならない。上式の条件をすべてのはり要素に対して適用することによって、はり全体の支配方程式を組み立てることができる。

次に、はりの境界条件を指定する。自由端、固定端、単純支持の場合には、たわみ、たわみ角、せん断力、

Fig. 4 Connectivity condition

曲げモーメントのうちいずれかを二つを指定値にし、自由端や単純支持端のように未知のたわみ角やせん断力が生じる場合には、これらに関する方程式を全体の方程式から取り除けばよい。このようにすれば、はり全体の支配方程式は

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + T\mathbf{m} &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{T}^T \mathbf{u} - \mathbf{A}^c(\mathbf{m}; \alpha^+, \alpha^-) \mathbf{m} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (22)$$

の形に書ける。ここで $\mathbf{u}$, $\mathbf{m}$ は全ての節点におけるたわみ、曲げモーメントを並べてできるベクトル、 α^+ , α^- は各要素撓性の増加率 α_e^+ , α_e^- を並べてできるベクトルで、 $M, C, T, \mathbf{A}^c(\mathbf{m}; \alpha^+, \alpha^-)$ および $\mathbf{f}(t)$ は各要素に対する $M_e, C_e, T_e, \mathbf{A}_e^c(\mathbf{m}_e; \alpha_e^+, \alpha_e^-)$, $\mathbf{f}_e(t)$ を適当に配置してできるマトリックスおよびベクトルである。

2.4 調和バランス法による定常振動解析 前節で導いた支配方程式 (22) に基づいて定常振動解析を行う。はりに作用する外力は基本角振動数 ω の周期外力であるとする。

支配方程式 (22) は非線形であるため、ここでは反復法により解くことを考える。このため、 k 回目の反復における $\mathbf{u}$, $\mathbf{m}$ を $\mathbf{u}^k$, $\mathbf{m}^k$ とし、 $k-1$ 回目の反復における解を用いて

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k-1} + \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{m}^k = \mathbf{m}^{k-1} + \Delta \mathbf{m} \quad (23)$$

とおく。ここで $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{m}$ は $k-1$ 回目の解からの修正量であり、微小であるとする。式 (23) の $\mathbf{u}^k$, $\mathbf{m}^k$ を式 (22) の $\mathbf{u}$, $\mathbf{m}$ へ代入し、 $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{m}$ の 2 次以上の項を無視すれば

$$\begin{aligned} M\ddot{\Delta \mathbf{u}} + C\dot{\Delta \mathbf{u}} + T\Delta \mathbf{m} &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{u} - \mathbf{A}^c(\mathbf{m}^{k-1}; \alpha^+, \alpha^-) \Delta \mathbf{m} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。なお、上式の導出に際しては、式 (22) 第 2 式の左辺第 2 項に現れる $H(M)M$ の形の関数の導関数は $H(M)$ となることを用いている。

式 (24) を、調和バランス法により解くことを考える。いま、はりに作用する外力として基本角振動数 ω の周期外力を考えているので、ベクトル $\mathbf{f}(t)$ は

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \{ \mathbf{f}_{cj} \cos(j\omega t) + \mathbf{f}_{sj} \sin(j\omega t) \} \quad (25)$$

の形のフーリエ級数に表すことができる。

上記の外力に対する定常状態の応答を求めるため、 $\mathbf{u}^k$, $\mathbf{m}^k$ をフーリエ級数

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k &= \mathbf{u}_0^k + \sum_{j=1}^{N_f} \{ \mathbf{u}_{cj}^k \cos(j\omega t) + \mathbf{u}_{sj}^k \sin(j\omega t) \} \\ \mathbf{m}^k &= \mathbf{m}_0^k + \sum_{j=1}^{N_f} \{ \mathbf{m}_{cj}^k \cos(j\omega t) + \mathbf{m}_{sj}^k \sin(j\omega t) \} \end{aligned} \quad (26)$$

の形におく。ここで $\mathbf{u}_0^k$, $\mathbf{u}_{cj}^k$, $\mathbf{u}_{sj}^k$, $\mathbf{m}_0^k$, $\mathbf{m}_{cj}^k$, $\mathbf{m}_{sj}^k$ は未知ベクトルであり、 N_f はフーリエ級数展開の打ち切り次数である。

式 (25), (26) を式 (24) へ代入し、調和バランスの原理にしたがって両辺の定数項、 $\cos(j\omega t)$, $\sin(j\omega t)$ ($j = 1, 2, \dots, N_f$) の係数を等しいとおくと

$$\mathbf{A}^k \mathbf{z}^k = \mathbf{b} \quad (27)$$

の形の式を得る。ここで $\mathbf{z}^k$ は式 (26) のフーリエ係数ベクトルを並べてできる未知ベクトル、 $\mathbf{A}^k$ は式 (24) に現れる係数マトリックスから決まる既知のマトリックス、 $\mathbf{b}$ は式 (25) のフーリエ係数ベクトルを並べてできる既知ベクトルである。これらの具体的な形を示すことはここでは省略する。式 (27) を解けば $\mathbf{z}^k$, すなわち式 (26) のフーリエ係数が求められ、 $\mathbf{u}^k$, $\mathbf{m}^k$ が定められる。

得られた k 回目の解を用いれば、上記と同様にして $k+1$ 回目の解を求めることができる。これを解が収束するまで繰り返す。

3. 検出法の提案

以上の準備のもとに、ブリージングクラックの検出法について考える。はりの寸法、ヤング率、密度、減衰係数は既知であるとする。

3.1 要素撓性の増加率の決定 前章で述べたように、ここではクラックを要素撓性の増加率 α_e^+ , α_e^- という形でモデル化した。したがって、測定データから各要素の α_e^+ , α_e^- を定めることができれば、これからクラックの位置および深さの推定が可能であると期待される。そこでまず、 α_e^+ , α_e^- の定め方について考える。

はりに N 個の測定点を定め、これらの測定点で、式 (25) の形の周期外力に対する定常状態のたわみと曲げモーメントを測定する。これらは変位計、ひずみゲージなどで容易に測定することができる量である。 i 番目の測定点におけるたわみと曲げモーメントを、式

(26) のようにフーリエ級数展開し、各振動数成分を並べてできるベクトルを、それぞれ $\mathbf{u}_i^m, \mathbf{m}_i^m$ とする。

次に、前章で示した解析法によりはりの応答を求める。このとき節点として測定点を含むようにとる。得られた応答のうち、測定データから求められる $\mathbf{u}_i^m, \mathbf{m}_i^m$ に対応するものを $\mathbf{u}_i, \mathbf{m}_i$ とする。これらを用いて、次式で定義される量 J を導入する。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^m)^T \mathbf{W}_{ui} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^m) + (\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_i^m)^T \mathbf{W}_{mi} (\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_i^m) \right\} \quad (28)$$

ここで $\mathbf{W}_{ui}, \mathbf{W}_{mi}$ は重みマトリックスである。上式の J は解析により得られる応答と測定された応答との重みつき二乗誤差を表している。以下、 J を最小にする α^+, α^- を求めることを考える。前述のように α^+, α^- の各成分は式 (17) を満たさねばならない。したがって、いま考えている問題は制約条件 (17) のもとで目的関数 J を最小にする α^+, α^- を定める問題となる。このような問題は、準ニュートン射影法⁽¹⁵⁾などを用いて解くことができる。

準ニュートン射影法などの勾配法では J の一次感度が必要となる。これを計算するためには、応答 $\mathbf{u}_i, \mathbf{m}_i$ の一次感度が必要である。これは以下のようにすれば求められる。式 (22) を α_e^+ (あるいは α_e^-) で微分すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{T}\dot{\mathbf{m}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{A}^c(\mathbf{m}; \alpha^+, \alpha^-) \dot{\mathbf{m}} &= \tilde{\mathbf{A}}^c(\mathbf{m}) \mathbf{m} \end{aligned} \quad (29)$$

を得る。ここで $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{m}}$ は $\mathbf{u}, \mathbf{m}$ の α_e^+ (あるいは α_e^-) に対する一次感度であり、 $\tilde{\mathbf{A}}^c(\mathbf{m})$ は式 (22) の $\mathbf{A}^c(\mathbf{m}; \alpha^+, \alpha^-)$ を α_e^+ (あるいは α_e^-) で微分して得られる行列を表す。式 (29) は式 (22) と同じ形の方程式である。したがって、2.4 節と同様にして応答の一次感度を求めることができる。

3.2 クラック位置の決定 以上のように定めた α^+, α^- の成分のうち、零でないものに対応する要素にクラックが存在する可能性がある。ただし、報告⁽¹³⁾で述べたように、曲げモーメントが小さい位置にクラックが存在しても、クラックが応答に与える影響はほとんどない。逆に、曲げモーメントが大きな位置では比較的浅いクラックでも応答に与える影響は大きい。したがって α^+, α^- の値の大きさだけからクラックが存在する要素を特定すると、はりの挙動に大きな影響を与えるクラックを見逃す可能性がある。そこで α_e^+, α_e^- とは異なる量を、クラックが存在する要素を特定するための指標として用いることを考える。

α_e^+ による、クラックが存在しない場合に対するひずみエネルギーの 1 周期分の変化量を考える。これを $\Delta U_{\alpha_e^+}$ とすると、 $\Delta U_{\alpha_e^+}$ は式 (16) より次式で与えられることがわかる。

$$\Delta U_{\alpha_e^+} = \int_0^T \left(\int_0^{L_e} \frac{1}{2EI} \alpha_e^+ M_e^+ M_e dx \right) dt \quad (30)$$

ここで T は応答の周期である。同様に、 α_e^- によるひずみエネルギーの 1 周期分の変化量を $\Delta U_{\alpha_e^-}$ とすると、 $\Delta U_{\alpha_e^-}$ は

$$\Delta U_{\alpha_e^-} = \int_0^T \left(\int_0^{L_e} \frac{1}{2EI} \alpha_e^- M_e^- M_e dx \right) dt \quad (31)$$

で与えられる。上式で与えられる $\Delta U_{\alpha_e^+}, \Delta U_{\alpha_e^-}$ は要素の長さ L_e に依存する。そこで $\Delta U_{\alpha_e^+}, \Delta U_{\alpha_e^-}$ を要素の長さ L_e で割ったひずみエネルギーの変化密度

$$\overline{\Delta U}_{\alpha_e^+} = \Delta U_{\alpha_e^+} / L_e, \quad \overline{\Delta U}_{\alpha_e^-} = \Delta U_{\alpha_e^-} / L_e \quad (32)$$

を導入し、これをクラックが存在する要素を特定するための指標として用いることとする。あるいは、 $\overline{\Delta U}_{\alpha_e^+}, \overline{\Delta U}_{\alpha_e^-}$ を、さらにはり全体のひずみエネルギーをはりの長さで割った平均ひずみエネルギー密度 $\bar{U}$ で割って無次元化した

$$\delta \bar{U}_{\alpha_e^+} = \frac{\overline{\Delta U}_{\alpha_e^+}}{\bar{U}}, \quad \delta \bar{U}_{\alpha_e^-} = \frac{\overline{\Delta U}_{\alpha_e^-}}{\bar{U}} \quad (33)$$

を用いてもよい。

はりの挙動に大きな影響を与えるクラックは、 $\overline{\Delta U}_{\alpha_e^+}, \overline{\Delta U}_{\alpha_e^-}$ あるいは $\delta \bar{U}_{\alpha_e^+}, \delta \bar{U}_{\alpha_e^-}$ の値が大きな要素に存在すると考えられる。

3.3 クラック深さの決定 次に、クラックの深さを定める方法について考える。ここでは、上で定めた要素撓性の増加率からクラックの深さを定める方法と、2.2 節で示したクラックモデルとは異なるモデルに基づいてクラックの深さを定める方法の 2 通りを述べる。前者は簡便であるが、クラックのモデル化の精度に起因して、後者に比べて深さの推定精度は劣る。

いずれの方法においても、クラックの深さを定めるために、前節で定めたクラックが存在する要素内にクラックが一つあるとし、その位置を $x = x_c$ とする。 x_c は、例えば要素の中央などのように適当に定める。クラックが存在する要素が複数ある場合には、その要素ごとに x_c を定める。以下では説明の簡単のため、 e 番目の要素にのみクラックが存在するとする。

3.3.1 要素撓性の増加率に基づくクラック深さの定め方 まず要素撓性の増加率に基づいてクラックの深さを定めることを考える。このため、オープンク

ラックに対して Chondros ら⁽¹⁶⁾により提案されたモデルを利用する。このモデルは、図 5 に示すように、クラックを等価なばね定数

$$k_c = \frac{EI}{6\pi(1-\nu^2)h\phi(\gamma)} \quad (34)$$

をもつ回転ばねで表現するものである。上式において ν はポアソン比、 h ははりの厚さ、 γ ははりの厚さに対するクラックの深さの比であり、 $\phi(\gamma)$ は

$$\begin{aligned} \phi(\gamma) = & 0.6272\gamma^2 - 1.04533\gamma^3 + 4.5948\gamma^4 \\ & - 9.9736\gamma^5 + 20.2948\gamma^6 - 33.0351\gamma^7 \\ & + 47.1063\gamma^8 - 40.7556\gamma^9 + 19.6\gamma^{10} \end{aligned} \quad (35)$$

で与えられる関数である。クラックははりの上面にあるとすると、このモデルを用いた場合のひずみエネルギーの 1 周期分の変化量は

$$\int_0^T \frac{1}{2k_c} M_{x_c}^2 H(M_{x_c}) dt \quad (36)$$

で与えられる。ここで M_{x_c} は e 番目の要素の $x = x_c$ における曲げモーメントである。一方、2.2 節のクラックモデルに対するひずみエネルギーの変化量は、クラックがはりの上面にある場合、前述のように式 (30) で与えられる。式 (36) と式 (30) を等置すればクラックの深さに関する方程式を得る。これを解けばクラックの深さが求められる。

3.3.2 異なるクラックモデルに基づくクラック深さの定め方 著者らは報告⁽¹³⁾でブリージングクラックの位置と深さを与えて振動応答を求める方法を提案した。この方法を用いてクラックの深さを定めることを考える。いま、クラックの位置はわかっているので、深さを与えれば報告⁽¹³⁾の方法で応答を求めることができる。そこで、この方法で求めた応答と測定データを用いて式 (28) と同じ形の目的関数を定義する。いまの場合、この目的関数はクラックの深さのみの関数である。クラックの深さは正の量であるので、いま考えている問題は、3.1 節と同様、制約付きの最小化問題に帰着され、準ニュートン射影法等により解くことができる。以上のようにすればクラックの深さを求めることができる。

Fig. 5 Equivalent spring model

3.4 要素数が多い場合の検出の効率化 以上が提案するクラック検出法の基本的な考え方である。ただし、要素数が多い場合、各要素に対して撓性の増加率 α_e^+ , α_e^- を定めようとする、未知数の数が多くなって計算時間がかかる。また、 α_e^+ , α_e^- を求めるための J の最小化の過程において局所解に陥りやすくなり、結果として検出精度も悪化しやすい。そこで、ここではこれらの問題を解決する方法を示す。

クラックの検出に際し、まず、図 6 に示すように隣り合ういくつかの要素をグルーピングし、各グループでは撓性の増加率 α_e^+ , α_e^- は等しいという制約を課す。このようにすれば、独立な α_e^+ , α_e^- が少なくなるので、 J の最小化問題は比較的短時間で解ける。

次に、求めた α_e^+ , α_e^- が零であった要素にはクラックは存在しないとし、以降の計算ではこれらの要素の α_e^+ , α_e^- を零に固定する。求めた α_e^+ , α_e^- が零でないグループに対しては、このグループをさらにいくつかの小グループに分け、各小グループでは α_e^+ , α_e^- の値は等しいとして、上記の過程を繰り返す。このようにすれば、クラックが存在しない要素に対する α_e^+ , α_e^- を早い段階でまとめて取り除くことができ、クラックが存在する可能性がある要素に対してのみ α_e^+ , α_e^- を求めればよい、計算の効率化が期待できる。また、1 回の最小化計算における独立な未知数の数が少なく、局所解に陥る可能性が減少し、検出精度の向上も期待できる。後に示す数値シミュレーションにおいても、ここで示した方法により計算時間が短縮され、検出精度が向上されることを確認している。

4. 数値シミュレーション

提案した検出法の有効性を確認するため、数値シミュレーションを行う。

4.1 応答データの生成 数値的に応答データを求めるため、はりのパラメータを表 1 のように設定する。図 7 に示すように、クラックは左端からはりの長さの 48% の上面に位置に存在するとし、深さははりの厚さの 50% とする。なお、クラック位置を変えた場合やクラック深さを 20% 程度とした場合にも以下と同様の結果が得られることを確認している。はりは両

Fig. 6 Grouping of elements

Table 1 Parameters of the beam

Length l	8.0×10^{-1} m
Thickness b	1.0×10^{-2} m
Width w	1.5×10^{-2} m
Young's modulus E	2.05×10^{11} Pa
Poisson's ratio ν	3.0×10^{-1}
Density ρ	7.83×10^3 kg/m ³
Damping coefficient c	5.0 Ns/m ²

Fig. 7 Beam with a crack

Fig. 8 Frequency response of the beam

端固定とし、応答の測定点を、はりを5等分する6か所とする。また左端からはりの長さの60%の位置に大きさ $F = 30$ Nの集中調和外力を加えるものとする。

上記のはりに対し、報告⁽¹³⁾の方法により応答を求めた。このとき、はりは50個の要素に分割した。得られた応答のうち、左端から4番目の測定点におけるたわみの振動数応答曲線を図8に示す。図8より、 $\omega = 250$ rad/s付近でクラックによる2次高調波共振が現れていることがわかる。そこで、検出に用いるデータとして2次高調波共振点付近の $\omega = 240$ rad/sの応答を用いる。実際の応答にはノイズが含まれる。そこで、ここでは応答の時刻歴にノイズとして正規乱数を加え、得られた応答を実験データと見なして検出を行う。加えたノイズの大きさはSN比が30dBとなるようにした。こうして得られた応答データの例を図9に示す。なお、参考のため、図9にはクラックがない場合の応答を点線で示してある。

Fig. 9 Example of data used for detection

4.2 クラック位置の決定 図9に示したデータ以外に各測定点におけるたわみと曲げモーメントのデータを用い、提案した検出法にしたがってまず要素撓性の増加率を定めた。検出の際、はりは20個の要素に分割し、式(26)のフーリエ級数における打ち切り次数 N_f は4とした。目的関数 J の評価においても定数成分から4次高調波成分までを用いた。また、 J における重みマトリックス W_{ui} , W_{mi} は、各測定データの大きさをそろえるため

$$W_{ui} = \frac{1}{\|u_i^m\|^2} I, \quad W_{mi} = \frac{1}{\|m_i^m\|^2} I \quad (37)$$

とした。ここで $\|\cdot\|$ はベクトルのノルムを表す。 J の最小化には準ニュートン射影法を用いた。

はじめに、隣り合う4つの要素ごとにグルーピングし、各グループ内では要素の撓性の増加率は等しいとして検出計算を行った。得られた結果を図10(a)に示す。この図の横軸ははりの軸方向の位置を百分率で示しており、縦軸は、上半分に3.2節で定義した $\overline{\delta U}_{\alpha_+}$ 、下半分に $\overline{\delta U}_{\alpha_-}$ を示している。この図より、左から3番目のグループ内の要素の上面にクラックが存在する可能性があることがわかる。

そこで次に、このグループに含まれる要素の上面の撓性の増加率のみを未知量とし、他の撓性の増加率を零に固定して再度検出計算を行った。得られた結果を図10(b)に示す。この図より、左端から45-50%の位置の上面における $\overline{\delta U}_{\alpha_+}$ が最も大きく、ここにクラックが存在するという結果を得る。今回のシミュレーションでは、クラックははりの左端から48%の位置の上面に存在するとしている。したがって、提案した方法でクラックの存在する位置を精度よく検出できることがわかる。

4.3 クラック深さの決定 次にクラックの深さを求めた。3.3.1節の方法と3.3.2節の方法で求めた結

Fig. 10 Results of crack position estimation

Table 2 Results of crack depth estimation

Method in Section 3-3-1	36.9 %
Method in Section 3-3-2	50.3 %
Exact	50.0 %

果を表2に示す。いずれも、前節でクラックが存在するとした要素の上面中央にクラックが存在するとして計算を行った。ここで示した数値シミュレーションで用いたクラックの深さは50%であったので、3-3-1節の方法ではクラック深さの推定値は実際より小さなものとなっていることがわかる。3-3-2節の方法では実際の値に非常に近い結果が得られている。これはクラックの位置や深さを変えた場合でも同様であった。

5. まとめ

本報告では、混合型変分原理に基づく有限要素法を用いて、はりに生じたブリージングクラックを動的応答から検出するための方法を提案した。提案した方法は、クラックを曲げモーメントの符号に依存する要素撓性の増加として表し、混合型変分原理に基づく有限要素法により得られたたわみと曲げモーメントの動的応答と測定により得られたたわみと曲げモーメントの動的応答の差が最小となるように要素撓性を定め、この結果に基づいてクラックの存在する位置と深さを推定するものである。提案する検出法の有効性を数値シミュレーションによって示した。

文 献

- (1) Ju, F.D. and Mimovich, M.E., Experimental Diagnosis of Fracture Damage in Structures by the Modal Frequency Method, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. 110(1988), pp.457-463.
- (2) Rigos, P.F., Aspragathos, N. and Dimarogonas, A.D., Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 3(1990), pp.381-388.
- (3) Hearn, G. and Tesra, R.B., Modal Analysis for Damage Detection in Structures, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 117, No. 10(1991), pp.3042-3063.
- (4) Shen, M.-H.H. and Taylor, J.E., An Identification Problem for Vibrating Cracked Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 150, No. 3(1991), pp.457-484.
- (5) Banks, H.T., Inman, D.J., Leo, D.J. and Wang, Y., An Experimentally Validated Damage Detection Theory in Smart Structures, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 191, No. 5(1996), pp.859-880.
- (6) Ratan, S., Baruh, H. and Rodriguez, J., On-line Identification and Location of Rotor Cracks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 1(1996), pp.67-82.
- (7) Tsyfansky, S.L. and Beresnevich, V.I., Detection of Fatigue Cracks in Flexible Geometrically Non-Linear Bars by Vibration Monitoring, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213, No. 1(1998), pp.159-168.
- (8) Rivola, A. and White, P.R., Bispectral Analysis of the Bilinear Oscillator with Application to the Detection of Fatigue Cracks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 216, No. 5(1988), pp.889-910.
- (9) Khadem, S.E. and Rezaee, M., An Analytical Approach for Obtaining the Location and Depth of an All-Over Part-Through Crack on Externally In-Plane Loaded Rectangular Plate Using Vibration Analysis, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, No. 2(2000), pp.291-308.
- (10) Saavedra, P.N. and Cuitino, L.A., Crack Detection and Vibration Behavior of Cracked Beams, *Computers and Structures*, Vol. 79, No. 16(2001), pp.1451-1459.
- (11) Lele, S.P. and Maiti, S.K., Modeling of Transverse Vibration of Short Beams for Crack Detection and Measurement of Crack Extension, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, No. 3(2002), pp.559-583.
- (12) Patil, D.P. and Maiti, S.K., Detection of Multiple Cracks Using Frequency Measurements, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 70, No. 12(2003), pp.1553-1572.
- (13) Kamiya, K. and Yoshinaga, T., Nonlinear Steady-state Vibration Analysis of a Beam with Breathing Cracks (Finite Element Analysis Based on the Mixed Variational Principle), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.73, No.731(2007), pp.1963-1970.
- (14) Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, (1977), p.303, McGraw-Hill.
- (15) Konno, H. and Yamashita, H., *Nonlinear Programming Method* (in Japanese), (1978), p.263, JUSE Press, Ltd.
- (16) Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, J., A Continuous Cracked Beam Vibration Theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 1(1998), pp.17-34.