初期軸圧縮変位により形状が変化する2Dビーム構造の 共振特性の幾何学的非線形FEM解析*

山口 誉 夫^{*1}, 酒 匂 淳 一^{*2}
永 井 健 一^{*3}, 丸 山 真 一^{*1}

Eigen Frequencies of Two-Dimensional Beam Structures Subjected to Large Static Deformations due to Initial Axial Displacement (FEM Analysis with Geometric Nonlinearity)

Takao YAMAGUCHI^{*4}, Jun-ichi SAKO,
Ken-ichi NAGAI and Shinichi MARUYAMA

^{**} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

Eigen frequencies for two dimensional beam structures are investigated under initial axial displacements. When the beam structures are consisted of extremely thin flexible components, the shapes of the structures are changed due to the initial axial displacement. And then, their eigen frequencies are affected by the axial displacements. To analyze these phenomena, discrete equations using finite elements with consideration of geometrical nonlinearity are derived as cubic simultaneous nonlinear differential equations. First, large static deformations of the structures due to initial axial displacement are calculated using the proposed FEM. Linear natural frequencies for the deformed structures are investigated secondly. In the numerical analysis, both ends of the beam structures are clamped. The calculated results for straight beams with initial compressive displacement using the FEM are consistent with the theoretical results carried out by the authors previously. Further, the influences of initial axial displacement on eigen frequencies of the plane structure which is comprised of five straight beams are clarified.

Key Words: Computer Aided Analysis, Free Vibration, Flexible Structure, Simulation, Vibration of Continuous System

1. 緒言

Updated Lagrange Method⁽¹⁾ や Absolute Nodal Coordinate Method⁽²⁾ などの増分型非線形有限要素法を用いて、二次元、三次元ビーム構造の大変形動解析が行われている。増分型非線形有限要素法は時間領域で数値積分を行うので、周期を有する振動問題に用いることは効率的ではない場合がある。変形が中程度の場合のビーム構造の振動問題を対象として、たわみと面内変位の間の幾何学的非線形性を考慮した非線形有限要素法が提案されている。これに関して以下の報告がなされている。

high-order shear deformation theoryを用いた積層はりの自由振動をSinghらは非線形有限要素法で解析している⁽³⁾。階層型の形状関数を用いた非線形有限要素法により、Ribeiroは二次元フレーム構造の自由振動、非定常強制振動⁽⁴⁾、内部共振条件の共振応答⁽⁵⁾を求めている。非線形有限要素法と増分調和バランス法を組み合わせ、Chenらは、二次元フレーム構造の共振応答を求めている⁽⁶⁾。真直はりおよび曲がりはりについて

て、非線形有限要素による離散化方程式を、線形有限要素方程式から求められた固有モードを用いて、モード座標に展開することによる低次元化を小林らは検討している⁽⁷⁾⁽⁸⁾。著者らは、軸方向変位とたわみの間の幾何学的非線形性を考慮した有限要素法を用いて、三次の非線形連立常微分方程式となる形式の離散化方程式を導出した⁽⁹⁾。導出した式は節点の未知量が陽となる形式で記述され、Newton-Raphson法による非線形方程式の求解の演算が容易となる。この離散化方程式を用いて、自重で形状が変化する極めて柔軟なビーム構造の共振特性を解析した。しかし、初期軸変位で形状が変化する柔軟な二次元ビーム構造の共振特性の有限要素法による解析はなされていない。

本報告では、初期軸変位で形状が変化する極めて柔軟な二次元ビーム構造の共振特性を、先に提案した非線形有限要素法を、初期軸圧縮変位を与えられるように拡張して用い、解析する。初期軸圧縮変位の影響として、軸方向の伸縮のみならず面外方向への変形や座屈後変形状態も含めた解析を行う。初期軸変位による静的な変形を計算し、ついで変形後のビーム構造の線形固有振動数を求めた。まず初期軸圧縮変位を与えた両端固定真直はりについて、拡張した非線形有限要素法による数値解析結果と著者らによる過去の理論

* 原稿受付 2007年5月16日。

^{*1} 正員、群馬大学大学院工学研究科(〒376-8515 桐生市天神町1-5-1)。

^{*2} 群馬大学大学院機械システム工学専攻。

^{*3} 正員、フェロー、群馬大学大学院工学研究科。

E-mail: yamagme4@me.gunma-u.ac.jp

解析による結果⁽¹⁰⁾と比較検証した。さらに、この非線形有限要素法を用いて、5本の真直はりを組み合わせた二次元ビーム構造(段付はり)の共振特性に対する初期軸変位の影響を調べた。

2. 解析方法

2・1 幾何学的非線形性を考慮したはりの有限要素

(1)要素方程式 両端に節点 r と節点 s を有するはり要素を考える。図1のように、節点 r を原点 o_e とし、はりの要素座標系 $o_e x_e z_e$ を定める。両節点は、はりの中央面上にある。節点 r における軸方向変位、たわみ、傾きをそれぞれ u_r, w_r, θ_r とする。同様に節点 s における軸方向変位、たわみ、傾きを u_s, w_s, θ_s とする。面内変位 u と面外変位 w を次式で近似する。

$$u = B_0 + B_1 x_e \quad (1)$$

$$w = C_0 + C_1 x_e + C_2 x_e^2 + C_3 x_e^3 \quad (2)$$

ただし、

$$B_0 = u_r, \quad B_1 = (u_s - u_r) / L_e, \quad C_0 = w_r, \quad C_1 = \theta_r,$$

$$C_2 = -2\theta_r / L_e - \theta_s / L_e + 3w_s / L_e^2 - 3w_r / L_e^2,$$

$$C_3 = \theta_r / L_e^2 + \theta_s / L_e^2 - 2w_s / L_e^3 + 2w_r / L_e^3$$

要素内部の変位ベクトルを $\{q\}$ 、節点変位ベクトルを $\{q_e\}$ とし、 $\{q\}$ を式(1)、式(2)を整理した形状関数行列 $[N]$ と $\{q_e\}$ で次式のように近似する。

$$\{q\} = [N] \{q_e\} \quad (3)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{u, w, \theta\}^T, \quad \{q_e\} = \{q_{e1}, q_{e2}, q_{e3}, q_{e4}, q_{e5}, q_{e6}\}^T \\ &= \{u_r, u_s, w_r, w_s, \theta_r, \theta_s\}^T = \{\{q_{ue}\}^T, \{q_{we}\}^T\}^T, \\ \{q_{ue}\} &= \{q_{ue1}, q_{ue2}\}^T = \{q_{e1}, q_{e2}\}^T = \{u_r, u_s\}^T, \\ \{q_{we}\} &= \{q_{we1}, q_{we2}, q_{we3}, q_{we4}\}^T \\ &= \{q_{e3}, q_{e4}, q_{e5}, q_{e6}\}^T = \{w_r, w_s, \theta_r, \theta_s\}^T, \\ [N] &= \begin{bmatrix} N_{u1} & N_{u2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{w1} & N_{w2} & N_{w3} & N_{w4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$N_{u1} = 1 - x_e / L_e, \quad N_{u2} = x_e / L_e,$$

$$N_{w1} = 1 - 3x_e^2 / L_e^2 + 2x_e^3 / L_e^3, \quad N_{w2} = x_e - 2x_e^2 / L_e + x_e^3 / L_e^2$$

$$N_{w3} = 3x_e^2 / L_e^2 - 2x_e^3 / L_e^3, \quad N_{w4} = -x_e^2 / L_e + x_e^3 / L_e^2$$

オイラーベルヌーイの仮定を満たすはりを考える。幾何学的非線形性を考慮すると、はりの歪み ε と変位 u, w の関係は次式となる。

$$\varepsilon = \partial u / \partial x_e + (1/2)(\partial w / \partial x_e)^2 - z_e (\partial^2 w / \partial x_e^2) \quad (4)$$

はり要素 e の運動エネルギー $\tilde{T}$ 、歪みエネルギー $\tilde{U}$ 、外力による仕事 $\tilde{V}$ は、それぞれ次式となる。

$$\tilde{T} = (1/2) \rho_e \int_0^{L_e} ((\partial w / \partial t)^2 + (\partial u / \partial t)^2) dA_e dx_e \quad (5)$$

$$\tilde{U} = (1/2) E_e \int_0^{L_e} \int_{A_e} \varepsilon^2 dA_e dx_e \quad (6)$$

$$\tilde{V} = \{q\}^T \{f\} \quad (7)$$

Fig.1 Element coordinate system

上式では、フックの法則が成立するものとする。 $\{f\} = \{f_x, f_z, m\}^T$ は力ベクトル、 f_x, f_z, m は、それぞれ軸力、せん断力、曲げモーメントである。 E_e, ρ_e, A_e は、はり要素 e のヤング率、質量密度、断面積である。 t は時間である。式(3)と式(4)を式(5)、式(6)、式(7)へ代入し、ラグランジェの方程式を用いて整理すると式(8)、式(9)に示す要素方程式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_j^2 B_{uij} \ddot{q}_{uej} + \sum_j^2 C_{uij} \dot{q}_{uej} + \sum_{j,k}^4 D_{uijk} q_{uej} q_{wek} - f_{eui} &= 0, (i=1,2) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_j^4 B_{wij} \ddot{q}_{wej} + \sum_j^4 C_{wij} \dot{q}_{wej} + \sum_{j,k}^4 D_{wijk} q_{uej} q_{wek} + \sum_{j,k,l}^4 E_{wikl} q_{wej} q_{wek} q_{wel} - f_{ewi} &= 0, (i=1,2,3,4) \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、

$$B_{uij} = \rho_e A_e \int_0^{L_e} N_{ui} N_{uj} dx_e, \quad (i, j=1,2),$$

$$B_{wij} = \rho_e A_e \int_0^{L_e} N_{wi} N_{wj} dx_e, \quad (i, j=1,2,3,4),$$

$$C_{uij} = E_e A_e \int_0^{L_e} (\partial N_{ui} / \partial x_e) (\partial N_{uj} / \partial x_e) dx_e, \quad (i, j=1,2),$$

$$C_{wij} = E_e I_e \int_0^{L_e} (\partial^2 N_{wi} / \partial x_e^2) (\partial^2 N_{wj} / \partial x_e^2) dx_e, \quad (i, j=1,2,3,4),$$

$$D_{uijk} = (E_e A_e / 2) \int_0^{L_e} (\partial N_{ui} / \partial x_e) (\partial N_{uj} / \partial x_e) (\partial N_{wk} / \partial x_e) dx_e, \quad (i=1,2, j, k=1,2,3,4),$$

$$D_{wijk} = E_e A_e \int_0^{L_e} (\partial N_{wi} / \partial x_e) (\partial N_{uj} / \partial x_e) (\partial N_{wk} / \partial x_e) dx_e, \quad (i, k=1,2,3,4, j=1,2),$$

$$E_{wikl} = (E_e A_e / 2) \int_0^{L_e} (\partial N_{wi} / \partial x_e) (\partial N_{uj} / \partial x_e) (\partial N_{wk} / \partial x_e) (\partial N_{wl} / \partial x_e) dx_e, \quad (i, j, k, l=1,2,3,4),$$

$$\{f_{eu}\} = \{f_{eu1}, f_{eu2}\}^T = \{f_{eu}, f_{eu}\}^T,$$

$$\{f_{ew}\} = \{f_{ew1}, f_{ew2}, f_{ew3}, f_{ew4}\}^T$$

$$= \{f_{ew}, f_{ew}, m_{er}, m_{es}\}^T$$

である。式(8)と式(9)はそれぞれ x_e 方向および z_e 方向

の要素の運動方程式に対応する。 f_{eur}, f_{ewr}, m_{er} はそれぞれ節点 r における軸力, せん断力, モーメントである。同様に, f_{eus}, f_{ews}, m_{es} は節点 s における軸力, せん断力, モーメントである。式(8)および式(9)中の $\dot{\cdot}$ は時間微分を表す。 I_e は要素 e の断面二次モーメントである。

式(8)と式(9)をまとめると, 次式の要素方程式を得る。

$$\sum_j^6 B_{eij} \ddot{q}_{ej} + \sum_j^6 C_{eij} \dot{q}_{ej} + \sum_j^6 D_{eijk} q_{ek} + \sum_{j,k,l}^6 E_{eijkl} q_{ej} q_{ek} q_{el} - f_{ei} = 0, (i=1,2,\dots,6) \quad (10)$$

B_{eij} は B_{uij} と B_{wij} を整理することで得られる。同様に C_{uij} と C_{wij} から C_{eij} が, D_{uijk} と D_{wijk} から D_{eijk} が得られ E_{eijkl} は E_{wijkl} を変形させることで求められる。 f_{ei} ($i=1,2,\dots,6$ は要素 e の節点力ベクトル $\{f_e\} = \{\{f_{eu}\}^T, \{f_{ew}\}^T\}^T$ の成分である。

(2)全系の離散化方程式 要素座標系 $o_e x_e z_e$ の節点変位ベクトル $\{q_e\}$ と全体座標系 $O X Z$ の節点変位ベクトル $\{Q_e\} = \{Q_{e1}, Q_{e2}, Q_{e3}, Q_{e4}, Q_{e5}, Q_{e6}\}^T = \{U_{er}, U_{es}, W_{er}, W_{es}, \Theta_{er}, \Theta_{es}\}^T$ の関係は座標変換行列 $[T]$ を用いると次式となる。

$$\{q_e\} = [T] \{Q_e\} \quad (11)$$

$U_{er}, W_{er}, \Theta_{er}$ はそれぞれ節点 r における全体座標の X 方向変位, Z 方向変位, 回転角である。

同様に, 要素座標系の節点力ベクトル $\{f_e\}$ と全体座標系の節点力ベクトル $\{F_e\} = \{F_{eXr}, F_{eXs}, F_{eZr}, F_{eZs}, M_{er}, M_{es}\}^T$ の関係は次式となる。

$$\{f_e\} = [T] \{F_e\} \quad (12)$$

F_{eXr}, F_{eZr}, M_{er} はそれぞれ節点 r における X 方向節点力, Z 方向節点力, モーメントである。式(11)と式(12)を要素方程式(10)に代入して, 全体座標系に変換すると次式を得る。

$$\sum_j^6 \bar{B}_{eij} \ddot{Q}_{ej} + \sum_j^6 \bar{C}_{eij} \dot{Q}_{ej} + \sum_j^6 \bar{D}_{eijk} Q_{ek} + \sum_{j,k,l}^6 \bar{E}_{eijkl} Q_{ej} Q_{ek} Q_{el} - \bar{F}_{ei} = 0, (i=1,2,\dots,6) \quad (13)$$

$\bar{B}_{eij}, \bar{C}_{eij}, \bar{D}_{eijk}, \bar{E}_{eijkl}, \bar{F}_{ei}$ は, それぞれ要素座標系で記述した方程式(10)中の係数 $B_{eij}, C_{eij}, D_{eijk}, E_{eijkl}, F_{ei}$ を全体座標系で記述した係数である。

さらに, 対象とする構造全系について要素方程式(13)の節点力を重ね合わせるとつぎの全系の離散化方程式を得る。

$$\sum_j^N B_{ij} \ddot{Q}_j + \sum_j^N C_{ij} \dot{Q}_j + \sum_{j,k}^N D_{ijk} Q_j Q_k + \sum_{j,k,l}^N E_{ijkl} Q_j Q_k Q_l = \bar{F}_i, (i,j,k,l=1,2,\dots,N_{\max}) \quad (14)$$

ここで, $B_{ij}, C_{ij}, D_{ijk}, E_{ijkl}, \bar{F}_i$ は, それぞれ, 全体座標系で記述した要素方程式(13)中の係数 $\bar{B}_{eij}, \bar{C}_{eij}, \bar{D}_{eijk}, \bar{E}_{eijkl}, \bar{F}_{ei}$ を全要素にわたり組み上げた係数である。 $N_{\max}$ は節点数の三倍である。

2・2 初期軸変位によるビーム構造の変形解析 柔軟なビーム構造が初期軸変位によって, 形状が変化する問題を扱う。式(14)の左辺第一項の慣性項を省略し, 初期軸変位を強制変位として与え, ビーム構造の形状の変化 $\tilde{Q}_j$ を求める。これより, つぎの $Q_j = \tilde{Q}_j$ ($j=1,2,\dots,N_{\max}$) についての連立三次方程式を得る。

$$\sum_j^N C_{ij} \tilde{Q}_j + \sum_{j,k}^N D_{ijk} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k + \sum_{j,k,l}^N E_{ijkl} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k \tilde{Q}_l = \tilde{F}_i, (i,j,k,l=1,2,\dots,N_{\max}) \quad (15)$$

上式で, 初期軸変位による形状の変化を求める場合には, 外力項 $\tilde{F}_i$ をゼロとする。ビーム構造の静的復元力特性を求める場合には, 外力 F_i に, はりの質量と重力加速度 g の積に相当する分布荷重 $\tilde{F}_i$ を与える。

ここで, 以下の方法を用いて, 初期軸変位の処理を行う。式(15)を次式のように書き換える。

$$\left[\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & \cdots & C_{1N_{\max}} \\ C_{21} & C_{22} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ C_{n1} & & & C_{nn} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ C_{N_{\max}1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C_{N_{\max}N_{\max}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_n \\ \vdots \\ \tilde{Q}_{N_{\max}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{F}_1 - \sum_{j,k}^N D_{1jk} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k - \sum_{j,k,l}^N E_{1jkl} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k \tilde{Q}_l \\ \tilde{F}_2 - \sum_{j,k}^N D_{2jk} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k - \sum_{j,k,l}^N E_{2jkl} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k \tilde{Q}_l \\ \vdots \\ \tilde{F}_n - \sum_{j,k}^N D_{njk} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k - \sum_{j,k,l}^N E_{njk} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k \tilde{Q}_l \\ \vdots \\ \tilde{F}_{N_{\max}} - \sum_{j,k}^N D_{N_{\max}jk} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k - \sum_{j,k,l}^N E_{N_{\max}jkl} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k \tilde{Q}_l \end{array} \right\} \quad (16)$$

初期軸変位の変位拘束条件を $\tilde{Q}_n = U$ としたいとき, $\tilde{Q}_n$ に対応する線形復元力項の対角成分 C_{nn} を非常に硬いばね k_{∞} に置き換える。式(16)の第 n 行は次式となる。

$$C_{n1} \tilde{Q}_1 + C_{n2} \tilde{Q}_2 + \cdots + k_{\infty} \tilde{Q}_n + \cdots + C_{nN_{\max}} \tilde{Q}_{N_{\max}} + \sum_{j,k}^N D_{nj k} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k + \sum_{j,k,l}^N E_{nj k l} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_k \tilde{Q}_l = \tilde{F}_n \quad (17)$$

この外力 $\tilde{F}_n$ を次式の関係を有する f_{∞} で置き換える。

$$k_{\infty} U = f_{\infty} \quad (18)$$

式(17)は式(18)より次式となる。

$$\begin{aligned} C_{n1}\tilde{Q}_1 + C_{n2}\tilde{Q}_2 + \dots + C_{n\infty}\tilde{Q}_n + \dots + C_{nN_{\max}}\tilde{Q}_{N_{\max}} \\ + \sum_{j,k} D_{njkl}\tilde{Q}_j\tilde{Q}_k + \sum_{j,k,l} E_{njkl}\tilde{Q}_j\tilde{Q}_k\tilde{Q}_l \\ = f_{\infty} = k_{\infty}U \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)の両辺を k_{∞} で割ると次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{C_{n1}\tilde{Q}_1}{k_{\infty}} + \frac{C_{n2}\tilde{Q}_2}{k_{\infty}} + \dots + \frac{\tilde{Q}_n}{k_{\infty}} + \dots + \frac{C_{nN_{\max}}\tilde{Q}_{N_{\max}}}{k_{\infty}} \\ + \frac{\sum_{j,k} D_{njkl}\tilde{Q}_j\tilde{Q}_k}{k_{\infty}} + \frac{\sum_{j,k,l} E_{njkl}\tilde{Q}_j\tilde{Q}_k\tilde{Q}_l}{k_{\infty}} = U \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)で k_{∞} を十分大きくすると $\tilde{Q}_n \approx U$ が得られる。

この方法を用いて、初期軸変位を処理した式(15)をニュートンラプソン法で解き初期軸変位による変形量 $\tilde{Q}_j$ を計算する。反復計算 $n+1$ 回目の解 $\tilde{Q}_j^{(n+1)}$ を n 回目の解 $\tilde{Q}_j^{(n)}$ と増分 $\Delta\tilde{Q}_j^{(n)}$ で以下のように記述する。

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_j^{(n+1)} = \tilde{Q}_j^{(n)} + \sum_p (\partial\tilde{Q}_j^{(n)} / \partial\tilde{Q}_p^{(n)}) \Delta\tilde{Q}_p^{(n)}, \\ (j, p=1, 2, \dots, N_{\max}) \end{aligned} \quad (21)$$

$\tilde{Q}_j = \tilde{Q}_j^{(n+1)}$, ($j=1, 2, \dots, N_{\max}$) とおき、式(21)を式(15)へ代入して整理すると、増分 $\Delta\tilde{Q}_j^{(n)}$ についての連立一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} [G]\{\Delta\tilde{Q}^{(n)}\} = \{b\} \\ \{\Delta\tilde{Q}^{(n)}\} = \{\Delta\tilde{Q}_1^{(n)}, \Delta\tilde{Q}_2^{(n)}, \Delta\tilde{Q}_3^{(n)}, \dots, \Delta\tilde{Q}_j^{(n)}, \dots\}^T, \\ (j=1, 2, \dots, N_{\max}) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、 $[G]$ と $\{b\}$ はそれぞれ係数 C_{ij} , D_{ijk} , E_{ijkl} , $\tilde{F}_i$ と $\tilde{Q}_j^{(n)}$ で構成される行列とベクトルである。式(22)を解き増分 $\Delta\tilde{Q}_j^{(n)}$, ($j=1, 2, \dots, N_{\max}$) を求める。さらに式(21)から $\tilde{Q}_j^{(n+1)}$ を求める。 $\tilde{Q}_j^{(n+1)}$ と $\tilde{Q}_j^{(n)}$ を比較し両者の変化率が十分に小さくなるまで反復計算し、初期軸変位による変形量 $\tilde{Q}_j$, ($j=1, 2, \dots, N_{\max}$) を定める。

2・3 初期軸変位により形状が変化したビーム構造の固有振動数解析 荷重 F_i を静荷重 $\tilde{F}_i$ と動荷重 $\tilde{F}_i(t)$ の和で記述し、

$$F_i = \tilde{F}_i + \tilde{F}_i(t) \quad (24)$$

を得る。同様に、ビーム構造の変位 Q_j を静的変位(初期軸変位による変形+静荷重による変形) $\tilde{Q}_j$ と動荷重による変位 $\tilde{Q}_j(t)$ の和で次式で記述する。

$$Q_j = \tilde{Q}_j + \tilde{Q}_j(t) \quad (25)$$

式(24)と式(25)を式(14)に代入すると、次式の初期軸変位および静荷重により形状が変化した後の運動

方程式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_j \bar{B}_{ij} \ddot{\tilde{Q}}_j + \sum_j \bar{C}_{ij} \dot{\tilde{Q}}_j + \sum_{j,k} \bar{D}_{ijk} \tilde{Q}_j \ddot{\tilde{Q}}_k \\ + \sum_{j,k,l} \bar{E}_{ijkl} \tilde{Q}_j \ddot{\tilde{Q}}_k \tilde{Q}_l - \bar{F}_i = 0, \\ (i, j, k, l=1, 2, \dots, N_{\max}) \end{aligned} \quad (26)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{B}_{ij} &= B_{ij}, \quad \bar{E}_{ijkl} = E_{ijkl}, \\ \bar{C}_{ij} &= C_{ij} + \sum_k (D_{ijk} + D_{ikj}) \tilde{Q}_k + \sum_{k,l} (E_{ijkl} + E_{ikjl} + E_{iljk}) \tilde{Q}_k \tilde{Q}_l, \\ \bar{D}_{ijk} &= D_{ijk} + \sum_l (E_{ijkl} + E_{ijk l} + E_{ilkj}) \tilde{Q}_l \end{aligned}$$

である。式(26)の左辺第三、第四項の非線形復元力項と左辺第五項の動荷重項を省略し、角周波数 Ω の調和振動解 $\tilde{Q}_j = \hat{Q}_j \cos \Omega t$ を仮定すると、つぎの微小振幅の自由振動問題の式を得る。

$$\sum_j \bar{C}_{ij} \hat{Q}_j - \Omega^2 \sum_j \bar{B}_{ij} \hat{Q}_j = 0, \quad (i, j=1, 2, \dots, N_{\max}) \quad (27)$$

この斉次方程式(27)は一般化固有値問題となる。その固有値 $\hat{\Omega}_j$ と固有ベクトル $\{\hat{\phi}\}_j$, ($j=1, 2, \dots, N_{\max}$) を求め、初期軸変位により形状が変化したビーム構造の固有振動数と振動モードを定める。

3. 数値計算結果

第2章に記載した有限要素法を用いて、初期軸変位を与えたビーム構造の共振特性を検討する。最初に真直はりを用い、計算精度を検証する。その後に真直はりを台形状に5本組み合わせたビーム構造(段付はり)を用いて、パラメータスタディを行った結果を示す。

3・1 真直はりでの本有限要素法の収束特性 図2に真直はりに初期軸圧縮変位 $U_c = 3.86 \times 10^{-6}$ [m]を与え、要素数を4, 16, 32, 48と変化させた場合の静的復元力特性の計算結果を示す。 U_c により形状が変化するはりに、さらにZ方向(鉛直下向き)に一樣な分布荷重を作用させて、静的復元力特性を求めた。分布荷重は、Z方向(鉛直下向き)に一樣な分布加速度 α_s を与えて作用させる。図の縦軸は分布加速度 α_s 、横軸はたわみ W である。両端の境界は固定とした。はりの全長は $L = 0.10$ [m]、幅は $b = 1.2 \times 10^{-2}$ [m]、板厚は $h = 2.22 \times 10^{-4}$ [m]、ヤング率は $E = 210$ [GPa]、密度は $\rho = 7.8 \times 10^3$ [kg/m³]とした。図から要素数16以上で復元力特性が収束している。

図3に初期軸圧縮変位 $U_c = 3.88 \times 10^{-6}$ [m]を与え、形状を変化させた、真直はりの変形後の固有振動数 $\hat{\Omega}_j / (2\pi)$, ($j=1, 2, \dots, 5$)の計算結果を示す。要素数を8, 16, 24, 32, 48と変化させた結果が図に記載されている。これより最低次から5次までの全共振につい

て、固有振動数は32要素程度で収束している。

以上より本論文では基本的には要素数を32として以降の解析をしていく。

Fig.2 Static deflection of the straight beam

Fig.3 Eigen frequencies of the straight beam

3・2 真直はりをういた本有限要素法の計算精度検証

初期軸圧縮変位を $U_c = 0.00$ [m], $U_c = 1.94 \times 10^{-6}$ [m], $U_c = 2.72 \times 10^{-6}$ [m], $U_c = 3.88 \times 10^{-6}$ [m] と変化させた真直はりの静的復元力特性の計算結果を図4に示す。この場合もZ方向(鉛直下向き)に一樣な分布加速度 α_s を作用させ、分布荷重をはりに与えた。図中、本有限要素法で計算された復元力特性と、過去に著者らによりなされた理論解析⁽¹⁰⁾による復元力特性が記載されている。縦軸は鉛直方向下向きを正とする分布加速度 α [m/s²], 横軸はたわみ W [m] を示す。図より本有限要素法と理論解析の結果は良く一致している。また、有限要素法、理論解析の結果ともに、初期軸圧縮変位の影響で負の勾配を含む漸軟-漸硬の復元力特性を示す。

図5に、初期軸圧縮変位 U_c を変化させたときの、1次と2次の固有振動数 $\hat{\Omega}_j / (2\pi)$, ($j = 1, 2$) を示す。図中、本有限要素法と過去に著者らによりなされた理論解析⁽¹⁰⁾を用いて計算された結果が記載されている。縦軸は固有振動数 $\hat{\Omega}_j / (2\pi)$, ($j = 1, 2$), 横軸は初

期軸圧縮変位 U_c [m] である。図より、本有限要素法、理論解析による結果は一致している。また、初期軸圧縮変位が $U_c = 0.00$ [m] から大きくなっていくと、座屈前の軸圧縮変位 $U_c = 1.50 \times 10^{-6}$ [m] 付近までは、はりは、ゆるんだ状態となっていくので、一次固有振動数 $\hat{\Omega}_1 / (2\pi)$ は低くなっていく。初期軸圧縮変位が $U_c = 1.5 \times 10^{-6}$ [m] 付近を越えると、はりは座屈変形し、曲率形状となり剛性が増し、固有振動数 $\hat{\Omega}_1 / (2\pi)$ は高くなっていく。このような現象が本有限要素法で再現できた。

3・3 段付はりの計算条件 図6のような、真直はりを台形状に5本組み合わせたビーム構造(段付はり)を考える。高さ H [mm] の矢高を持つ。はりの全長は $L = 0.106$ [m], 幅は $b = 1.2 \times 10^{-2}$ [m], 板厚は $h = 2.22 \times 10^{-4}$ [m], ヤング率は $E = 210$ [GPa], 密度は $\rho = 7.8 \times 10^3$ [kg/m³] とした。要素分割数は32とした。

3・4 初期軸変位による段付はりの形状変化

段付きはりに初期軸圧縮変位 U_c を与え形状を変化させた。図7に矢高を $H = 0.0$ [mm] (真直はり), $H = 0.2$ [mm], $H = 1.0$ [mm] と変化させた場合の形状を示す。図中、初期軸圧縮変位 $U_c = 3.88 \times 10^{-6}$ [m] を作用させる前後の形状が記載されている。縦軸は、はりのZ座標、横軸は、はりのX座標である。図より段付きはりの矢高が $H = 0.0$ [mm], $H = 0.2$ [mm] と低い場合には、初期軸圧縮変位 U_c を与えると、はりの形状が変化し、みかけ上矢高が増す。これより、はりの剛性が増す。一方、矢高が $H = 1.0$ [mm] と高くなると、初期軸圧縮変位 U_c を与えた時の、段付きはりの形状変化が図のように少ない。すなわち、 U_c によるみかけの矢高の増加が少なく、はりの剛性変化が小さい。これは図のような段状部分の局所変形によって初期軸圧縮変位 U_c の影響が吸収されたためと考えられる。

3・5 段付はりの非線形復元力特性 図8に矢高 H を $H = 0.0$ [mm] (真直はり), $H = 0.2$ [mm], $H = 1.0$ [mm] と変化させた場合の静的復元力特性の本有限要素法による計算結果を示す。先の真直はりと同様に、初期軸圧縮変位 U_c を与え形状が変化するはりに、さらにZ方向(鉛直下向き)に一樣な分布加速度 α_s を作用させて、分布荷重を与えている。図中、初期軸圧縮変位を $U_c = 0.00$ [m], $U_c = 3.88 \times 10^{-6}$ [m] と変化させた結果が記載されている。縦軸は鉛直下向きを正とする分布加速度 α [m/s²], 横軸はたわみ W [m] である。図より段付きはりに初期軸圧縮変位 U_c を与えると、大きな分布荷重のもとでは、飛び移りを伴う座屈が発生する。その結果、漸軟-漸硬の復元力特性となる。

Fig.4 Static deflection of the straight beam

Fig.5 Eigen frequencies of the straight beam

3・6 段付きはりの固有振動数への矢高の影響

図9に初期軸圧縮変位 $U_c = 0.00$ [m], $U_c = 3.88 \times 10^{-6}$ [m] の条件で、矢高 H を変化させた場合の段付きはりの1次固有振動数 $\hat{\Omega}_1 / (2\pi)$ を示す。縦軸は1次固有振動数 $\hat{\Omega}_1 / (2\pi)$, 横軸は矢高 H [mm] である。図より、初期軸圧縮変位 U_c を与えると1次固有振動数 $\hat{\Omega}_1 / (2\pi)$ が増加している。これは U_c により、はりの形状が変化し、みかけの矢高が増加し、剛性が増加したためと考えられる。矢高 H が高いほど初期軸圧縮変位 U_c が1次固有振動数 $\hat{\Omega}_1 / (2\pi)$ に与える影響が小さくなっている。これは先の図7に示したような段状部分の局所変形によって初期軸圧縮変位 U_c の影響が吸収され、 U_c によるみかけの矢高の増加(すなわち剛性の増加)が抑制されるためと考えられる。

4. 結 言

初期軸圧縮変位により形状が変化する柔軟な二次元ビーム構造の共振特性を幾何学的非線形を考慮した有限要素法を用いて数値解析した。得られた結果を以下に示す。

(1)初期軸圧縮変位を作用させた真直はりの静的復元力特性および静的変形後の固有振動数を本有限

素法で求めた。この結果と著者らにより過去になされた理論解析結果は良く一致した。

(2)真直はりを台形状に5本組み合わせた構造(段付きはり)の静的復元力特性および静的変形後の固有振動数を本有限要素法で求めた。段付きはりの矢高が高いと、初期軸圧縮変位の影響が局所変形によって吸収され、復元力特性の変化が少ないことを明らかにした。その結果、矢高が高いほど、初期軸圧縮変位による一次の固有振動数の変化は小さいことがわかった。

Fig.6 Model of the frame structure

Fig.7 Deformed shapes of the frame structures due to initial axial compression

Fig.8 Static deflection of the frame structure

Fig.9 Eigen frequencies of the frame structure

参考文献

- (1) Okamoto, S. and Omura, Y., Dynamic Finite Element Analysis of a Geometric Nonlinear Structure Moving along an Arbitrary Trajectory, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 65, No. 638 (1999), pp. 3883-3889.
- (2) Shabana, A. A., Hussien, H. A. and Escalona, J. L., Application of the Absolute Nodal Coordinate Formulation to Large Rotation and Large Deformation Problem, *ASME J. of Mech. Design*, Vol. 120 (1998), pp. 188-195.
- (3) Singh, G. et al, Analysis of Nonlinear Vibrations of Unsymmetrically Laminated Composite Beam, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 10 (1991), pp. 1727-1735.
- (4) Ribeiro, P., Hierarchical Finite Element Analyses of Geometrically Non-linear Vibration of Beams and Plane Frames, *J. Sound Vib.*, 246-2 (2001), pp. 225-244.
- (5) Ribeiro, P. and Petyt, M., Nonlinear Vibration of Beams with Internal Resonance by Hierarchical Finite-Element Methods, *J. Sound Vib.*, Vol. 224, No. 4 (1999), 591-624.
- (6) Chen, S. H., Cheung, Y. K. and Xing, H. X., Nonlinear Vibration of Plane Structures by Finite Element and Incremental Harmonic Balance Method, *Nonlinear Dyn.*, Vol. 26 (2001), pp. 87-104.
- (7) Kobayashi, Y., Yamada, G. and Harada, A., Reduced-Order Model for Nonlinear Vibration Analysis by the Finite-Element Method, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 67, No. 657 (2001), pp. 1330-1337.
- (8) Harada, A. and Kobayashi, Y., Reduced-Order Nonlinear Modal Equations of Curved Beams by Using Pseudo-Mode, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 73, No. 728 (2007), pp. 989-996.
- (9) Yamaguchi, Y., Sakamoto, K., Nagai, K. and Maruyama, S., Eigen Frequencies of Two-Dimensional Beam Structures Subjected to Large Static Deformations due to Gravity (FEM Analysis with Geometric Nonlinearity), *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 70, No. 696 (2004), pp. 2211-2218.
- (10) Nagai, K., Suzuki, H., Yamaguchi, T. and Maruyama, S., Chaotic Oscillations of a Buckled-Beam Constrained by an Axial Spring, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 69, No. 679 (2003), pp. 565-572.